

Le equazioni lineari

Un'equazione goniometrica si dice **lineare** se assume la forma

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Per risolvere questo tipo di equazioni dobbiamo seguire procedure diverse a seconda che sia $c = 0$ (equazione *incompleta*) oppure $c \neq 0$ (equazione *completa*).

Le equazioni incomplete

L'equazione assume la forma $a \sin x + b \cos x = 0$

Per risolverla, posto $\cos x \neq 0$, dividiamo entrambi i membri per $\cos x$, ottenendo:

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \quad \text{cioè} \quad a \tan x + b = 0$$

che è un'equazione elementare che sappiamo risolvere.

L'operazione fatta è lecita in quanto i valori per cui $\cos x$ è uguale a 0 non sono soluzioni dell'equazione; infatti, quando $\cos x = 0$ (cioè per $x = 90^\circ + k180^\circ$) si ha che $\sin x$ è uguale a 1 oppure -1 e l'equazione diventa

$$a = 0 \quad \text{oppure} \quad -a = 0$$

cosa che è impossibile visto che abbiamo posto $a \neq 0$.

Esempi

a. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

Dividendo per $\cos x$ otteniamo $\tan x - \sqrt{3} = 0$

da cui $\tan x = \sqrt{3} \rightarrow x = 60^\circ + k180^\circ$

b. $2 \sin x - 2 \cos x = 0$

Dividendo per $\cos x$ otteniamo $2 \tan x - 2 = 0$

da cui $\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Le equazioni complete

Data l'equazione $a \sin x + b \cos x + c = 0$, possiamo pensare di associare ad essa la prima relazione fondamentale della goniometria ottenendo il sistema

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

che, essendo la seconda delle sue equazioni sempre vera, è equivalente all'equazione data. Il sistema ottenuto è di secondo grado nelle incognite $\sin x$ e $\cos x$ e la sua risoluzione consente di determinare due coppie di valori di $\sin x$ e $\cos x$ dalle quali è poi possibile risalire ai valori di x .

Esempio

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0$$

Scriviamo il sistema equivalente ottenuto con la prima relazione fondamentale:

$$\begin{cases} \sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

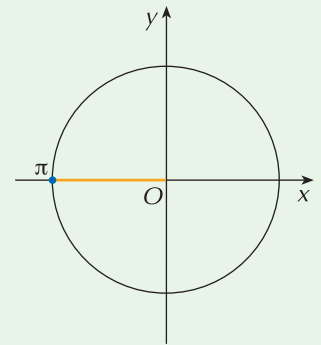
Ricaviamo $\sin x$ dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} \\ (\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3})^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} \\ 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

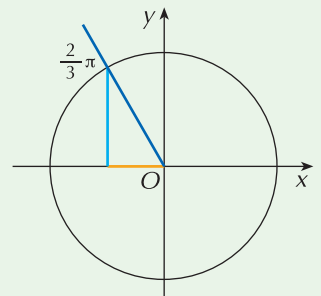
Risolvendo la seconda equazione otteniamo: $\cos x = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

Risostituendo questi valori nella prima abbiamo le due soluzioni del sistema:

• $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$ che identifica gli angoli $x = \pi + 2k\pi$



• $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ che identifica gli angoli $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$



ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni lineari incomplete.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$$

Poiché $\cos x = 0$ non è soluzione dell'equazione, possiamo dividere entrambi i membri per $\cos x$ ottenendo

$$\sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siamo così pervenuti alla risoluzione di un'equazione elementare, dalla quale ricaviamo che

$$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

2 $\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x = 0$ [30° + k180°]

3 $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$ [-60° + k180°]

4 $\sin x + \cos x = 0$ [135° + k180°]

5 $3 \cos x - 2 \sin x = 0$ [56°18'36" + k180°]

6 $4 \sin x = 3 \cos x$ [36°52'12" + k180°]

7 $\sin x - \cos x = 0$ [$\frac{\pi}{4} + k\pi$]

8 $\sin(-x) + \sqrt{3}\cos x = 0$ [60° + k180°]

9 $\sin(180^\circ - x) - \cos(-x) = 0$ [45° + k180°]

Risolvi le seguenti equazioni lineari complete.

10 ESERCIZIO GUIDATO

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

L'equazione è equivalente al sistema
$$\begin{cases} -\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Applicando il metodo di sostituzione, otteniamo
$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cos x - 1 \\ 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x = 0 \end{cases}$$

e, risolvendo la seconda equazione
$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \sqrt{3} \cos x - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \sqrt{3} \cos x - 1 \end{cases}$$

da cui
$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione assegnata sono: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

11	$\sqrt{3} \sin x = 2 + \cos x$	$\left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$
12	$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$	$[45^\circ + k360^\circ]$
13	$\sin x = \sqrt{3}(1 - \cos x)$	$\left[2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$
14	$\cos x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} = 0$	$[30^\circ + k360^\circ; 90^\circ + k360^\circ]$
15	$\cos x + \sqrt{3}(1 - \sin x) = 0$	$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right]$
16	$\sin x = (\sqrt{2} + 1)\cos x - 1$	$\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right]$
17	$\sin x + \cos x = 1$	$\left[2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$
18	$\sqrt{3} \sin x = \cos x + \sqrt{3}$	$[90^\circ + k360^\circ; 150^\circ + k360^\circ]$
19	$\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x = 3$	$\left[\frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right]$
20	$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$	$\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right]$
21	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sin x$	$[180^\circ + k360^\circ; 300^\circ + k360^\circ]$