Concetti chiave e regole

La funzione radice e i radicali

Nell'insieme R_0^+ dei numeri reali positivi o nulli l'operazione di elevamento a potenza si può invertire e l'operazione inversa è l'estrazione di radice.
Dato un qualunque numero reale $a \geq 0$, si dice radice n-esima di a il numero non negativo b per il quale $b^n = a$.
La radice n-esima di a si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.

La proprietà invariantiva

I radicali in R_0^+ godono della fondamentale **proprietà invariantiva**:

- se l'indice della radice e l'esponente del radicando vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero intero positivo, si ottiene un radicale che ha lo stesso valore di quello dato: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad \forall p \in Z^+$

Grazie a questa proprietà si possono eseguire le seguenti operazioni:

- semplificare un radicale dividendo indice della radice ed esponente del radicando per il loro $M.C.D.$
- ridurre due o più radicali allo stesso indice che è il $m.c.m.$ fra gli indici delle radici
- moltiplicare o dividere due radicali se questi hanno lo stesso indice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- portar dentro o portar fuori dal simbolo di radice i possibili fattori.

Quando due radicali non hanno lo stesso indice, per trovare il loro prodotto o quoziente si devono prima ricondurre allo stesso indice.

Radicali e moduli

Quando si eseguono delle operazioni sui radicali, si deve prestare attenzione a che:

- il dominio dell'espressione che si ottiene come risultato sia lo stesso di quello dell'espressione data
- il segno dell'espressione che si ottiene come risultato sia lo stesso di quello dell'espressione data.

In caso contrario, si deve valutare di quali fattori è necessario considerare il modulo al fine di mantenere lo stesso dominio e lo stesso segno.

La somma di radicali

Due radicali si possono sommare o sottrarre solo se sono **simili**, cioè se hanno lo stesso fattore radicale; in questo caso basta applicare la proprietà di raccoglimento e comportarsi, in sostanza, come con i monomi simili.

I radicali quadratici doppi

Un radicale quadratico doppio è un radicale che ha la forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.
Se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto, il radicale si può trasformare nella somma o differenza di due radicali semplici con la formula:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

La razionalizzazione

Razionalizzare una frazione che ha un denominatore che contiene dei radicali significa scriverla in modo che il denominatore diventi un'espressione razionale. Per fare questo si devono moltiplicare il numeratore e il denominatore della frazione per un opportuno **fattore razionalizzante** che ha una forma diversa a seconda dei casi:

- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{a}$
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ con $k < n$
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ il fattore razionalizzante è $\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$

Le potenze ad esponente razionale

Un radicale di argomento $a \geq 0$ si può scrivere sotto forma di potenza ad esponente razionale con la seguente corrispondenza: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Alle potenze ad esponente frazionario si possono applicare proprietà analoghe a quelle delle potenze ad esponente intero.

I radicali in R

In R un radicale di argomento negativo esiste solo se l'indice della radice è dispari ed è:

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a} \qquad \text{con} \quad a < 0,\ n \text{ dispari}$$

Inoltre, affinché si possa considerare un'operazione in R, l'estrazione di radice deve dare un solo risultato, quindi:

- se n è pari: $\sqrt[n]{a}$ $\begin{cases} \text{non esiste se } a < 0 \\ \text{è uguale a } \sqrt[n]{a} \text{ se } a \geq 0 \end{cases}$ per esempio $\begin{cases} \sqrt{-4} \quad \text{non esiste} \\ \sqrt{9} = 3 \end{cases}$

- se n è dispari: $\sqrt[n]{a}$ $\begin{cases} \text{è uguale a } -\sqrt[n]{-a} \text{ se } a < 0 \\ \text{è uguale a } \sqrt[n]{a} \text{ se } a \geq 0 \end{cases}$ per esempio $\begin{cases} \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2 \\ \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases}$