

Il teorema di Rolle e la sua dimostrazione

Teorema di Rolle. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ che abbia le seguenti caratteristiche:

- sia continua in $[a, b]$
- sia derivabile in ogni punto interno di tale intervallo
- assuma valori uguali agli estremi di questo intervallo, cioè sia $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a, b) nel quale la sua derivata si annulla, in cui cioè si ha che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione.

Il teorema di Weierstrass ci assicura che la funzione assume in $[a, b]$ il suo valore massimo M ed il suo valore minimo m . Allora esistono due punti c e d appartenenti ad $[a, b]$ tali che $M = f(c)$ e $m = f(d)$; inoltre ogni altro valore assunto dalla funzione al variare di x in $[a, b]$ è compreso fra questi due, cioè $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Premesso questo, distinguiamo il caso in cui è $m = M$ da quello in cui è $m < M$.

I caso.

Se $m = M$ la funzione è costante in tutto l'intervallo, ed ha derivata nulla in tutti i suoi punti; quindi anche in un punto c particolare. Il teorema è, in questo caso, dimostrato.

II caso.

Se $m < M$, poiché per ipotesi la funzione assume valori uguali agli estremi, essa deve assumere o il valore minimo o il valore massimo in un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Supponiamo che sia il punto c , cioè quello in cui assume valore massimo, ad essere interno.

Allora poiché in un punto di massimo la funzione assume il suo valore più grande, deve essere vero che $f(c+h) \leq f(c)$ (**figura a lato**); devono allora valere anche le seguenti disuguaglianze

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{se } h > 0$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{se } h < 0$$

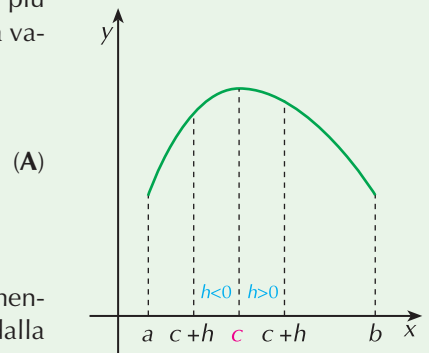
L'espressione al primo membro di tali disuguaglianze è il rapporto incrementale della funzione relativo al punto $x = c$, rispettivamente dalla destra e dalla sinistra.

Poiché per ipotesi f è una funzione derivabile in (a, b) , esistono finiti ed uguali i limiti dei rapporti incrementali per $h \rightarrow 0$ ed è

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

Le relazioni (A) ci dicono che la derivata nel punto c è contemporaneamente negativa o nulla e positiva o nulla; questo significa che essa deve valere zero, cioè deve essere $f'(c) = 0$.

Se invece è il punto d , in cui la funzione assume valore minimo, ad essere interno all'intervallo $[a, b]$, si procede ad un analogo ragionamento e si arriva alle stesse conclusioni. ◀



Il teorema di Lagrange e la sua dimostrazione

Teorema. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ che abbia le seguenti caratteristiche:

a. sia continua in $[a, b]$

b. sia derivabile in ogni punto interno di tale intervallo

allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo (a, b) tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dimostrazione.

Consideriamo la funzione ausiliaria $\varphi(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right]$

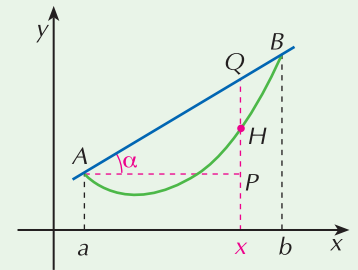
Anche se ciò non è indispensabile ai fini della dimostrazione, cerchiamo di capire che cosa rappresenta la funzione $\varphi(x)$: indicati con $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ i punti della curva in corrispondenza degli estremi dell'intervallo $[a, b]$, il rapporto $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coefficiente angolare della retta AB .

Il termine $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ rappresenta allora la quantità $\overline{AP} \tan \alpha$, cioè la

misura del segmento PQ (**figura a lato**); se a tale segmento aggiungiamo $f(a)$, otteniamo l'ordinata del punto Q sulla corda AB . In definitiva, la parte racchiusa fra parentesi quadre nell'espressione di $\varphi(x)$ è l'ordinata del punto Q .

In ogni punto $x \in (a, b)$, $\varphi(x)$ indica allora la differenza fra l'ordinata del punto H , appartenente alla funzione (cioè $f(x)$) e l'ordinata del corrispondente punto sulla corda (cioè la parte in parentesi quadra).

Veniamo ora alla dimostrazione.



Osserviamo che la funzione φ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Infatti:

■ essendo la differenza di due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , anch'essa è continua e derivabile in tali intervalli;

■ assume valori uguali agli estremi:

$$\bullet \varphi(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) \right] = 0$$

$$\bullet \varphi(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right] = 0$$

Esiste allora in (a, b) almeno un punto c in cui è $\varphi'(c) = 0$.

Calcoliamo la derivata della funzione φ : $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

allora $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ed è $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

Quest'ultima relazione ci dice che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.