I sistemi simmetrici

Consideriamo il sistema di secondo grado $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-5 \end{cases}$

e osserviamo inizialmente che, se scambiamo le due variabili ponendo x al posto di y e viceversa, il sistema rimane lo stesso:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-5 \end{cases} \quad \text{è la stessa cosa di} \quad \begin{cases} y+x=4 \\ yx=-5 \end{cases}$$

perché l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni commutative.
Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione ricavando l'espressione di x dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x=4-y \\ y(4-y)=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4-y \\ y^2-4y-5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$$

Osserviamo che anche nelle soluzioni x e y si scambiano i valori.
Un sistema che presenta queste caratteristiche si dice simmetrico.

Si dice **simmetrico** un sistema di due equazioni nelle due incognite x e y che rimane invariato se x si scambia con y.

Se un sistema simmetrico ammette come soluzione la coppia $(a,\ b)$, allora ammette anche la coppia $(b,\ a)$.

Un sistema simmetrico di secondo grado è sempre riconducibile alla forma

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

dove s e p sono numeri reali.
Questo sistema è il modello algebrico di un problema che abbiamo già affrontato nel paragrafo 2 di questo capitolo: trovare due numeri x e y conoscendo la loro somma s ed il loro prodotto p.
Oltre al metodo di sostituzione, per risolvere un sistema simmetrico possiamo allora anche ricondurci alla determinazione delle radici dell'equazione di secondo grado

$$t^2-st+p=0$$

Le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

sono le coppie $(t_1,\ t_2)$ *e* $(t_2,\ t_1)$ *che sono le radici dell'equazione*

$$t^2-st+p=0$$

Le soluzioni di questa equazione, chiamiamole t_1 e t_2, accoppiate nei due modi possibili, sono anche le soluzioni del sistema; si ha cioè che il sistema è verificato dalle coppie:

$$\begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=t_2 \\ y=t_1 \end{cases}$$

Risolviamo, ad esempio, il sistema $\begin{cases} x+y=14 \\ xy=45 \end{cases}$

Risolviamo l'equazione ausiliaria $t^2-14t+45=0$.
Le soluzioni sono $t=9 \ \vee \ t=5$.

Le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$

Quindi: $S = \{(9, 5); (5, 9)\}$.

ESERCIZI

1 $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}$ $[S = \{(3, -5); (-5; 3)\}]$

2 $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -4 \end{cases}$ $[S = \{(-1, 4); (4, -1)\}]$

3 $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = -6 \end{cases}$ $[S = \{(1, -6); (-6, 1)\}]$

4 $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ xy = 6 \end{cases}$ $[S = \{(2, 3); (3, 2)\}]$

5 $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

6 $\begin{cases} x + y = \dfrac{4}{3} \\ 3xy = -4 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{2}{3}; 2\right); \left(2; -\frac{2}{3}\right)\right\}\right]$

7 $\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x(y + x) = -35 + x^2 \end{cases}$ $[S = \{(-7, 5); (5, -7)\}]$

8 $\begin{cases} (x + y)^2 = x^2 - 64 + y^2 \\ 3x + y = 2(x + 2) \end{cases}$ $[S = \{(-4, 8); (8, -4)\}]$