Approfondimento

Le equazioni letterali intere

Le equazioni letterali sono equazioni che, oltre a contenere un'incognita, contengono anche altre lettere che vengono considerate dei *parametri*, cioè numeri che hanno un valore non noto ma che non sono considerati l'incognita dell'equazione.
Risolvere un'equazione letterale non comporta meccanismi di calcolo diversi da quelli usati per le equazioni numeriche. Bisogna però prestare attenzione ad applicare correttamente i due principi di equivalenza.
In generale, possiamo dire che **si può sempre**:

- trasportare i termini da un membro all'altro dell'equazione cambiando loro il segno
- cambiare tutti i segni dei termini ai due membri
- moltiplicare o dividere entrambi i membri per un coefficiente numerico diverso da zero.

Non è invece possibile:

- moltiplicare o dividere per un coefficiente letterale senza avere posto le condizioni di diversità da zero di tale coefficiente.

Per esempio, considerata l'equazione $ax - a + 3 = 0$:

- possiamo trasportare i termini noti (quelli senza la x) al secondo membro: $ax = a - 3$
- possiamo dividere per a, coefficiente dell'incognita, solo se poniamo la condizione $a \neq 0$: $x = \dfrac{a-3}{a}$.

I esempio

Risolviamo e discutiamo l'equazione $3ax = x + a$ di dominio $D = R$.

Trasportiamo i termini con la x al primo membro e i termini noti al secondo: $3ax - x = a$
Avere due termini in x non permette di risolvere l'equazione, ma possiamo fare un raccoglimento a fattor comune:

$$x(3a - 1) = a \qquad (\mathbf{1})$$

Per trovare la soluzione dobbiamo dividere entrambi i membri per $3a - 1$ e, se vogliamo applicare correttamente il secondo principio di equivalenza, dobbiamo imporre che questo fattore sia diverso da zero; quindi:

- se $3a - 1 \neq 0$, cioè $a \neq \dfrac{1}{3}$, l'equazione ha soluzione $x = \dfrac{a}{3a-1}$
- dobbiamo adesso chiederci che cosa accade quando $a = \dfrac{1}{3}$; in questo caso non si può dividere per $3a - 1$ ma possiamo vedere come si trasforma l'equazione (**1**) sostituendo $\dfrac{1}{3}$ al posto di a:

  $x(3a - 1) = a$ diventa $x \cdot 0 = \dfrac{1}{3}$ che è un'equazione impossibile.

Riassumendo:

- se $a \neq \dfrac{1}{3}$ $\quad S = \left\{\dfrac{a}{3a-1}\right\}$
- se $a = \dfrac{1}{3}$ $\quad S = \varnothing$.

II esempio

$$\frac{3x-a}{a}-\frac{x-a}{2a}=\frac{1-x}{2}$$

L'equazione è intera e ha dominio R: $\boldsymbol{D=R}$

C'è però il parametro a al denominatore:

- condizione iniziale sul parametro $a \neq 0$. Se $a = 0$ l'equazione, avendo denominatore uguale a 0, perde significato.

Svolgendo i calcoli otteniamo: $\dfrac{2(3x-a)-(x-a)}{2a}=\dfrac{a(1-x)}{2a}$

Possiamo moltiplicare entrambi i membri per $2a$ avendo supposto $a \neq 0$:

$$2a\cdot\frac{2(3x-a)-(x-a)}{2a}=\frac{a(1-x)}{2a}\cdot 2a \quad\rightarrow\quad 6x-2a-x+a=a-ax \quad\rightarrow\quad ax+5x=2a$$

Raccogliamo x a fattor comune al primo membro:

$$x(a+5)=2a \qquad (\mathbf{1})$$

Per trovare il valore di x, dobbiamo dividere entrambi i membri dell'equazione per il fattore $a+5$, analizziamo quindi i vari casi.

- Se $a+5 \neq 0$, cioè se $a \neq -5$, possiamo dividere per tale fattore ottenendo:

  $$\frac{(a+5)x}{a+5}=\frac{2a}{a+5} \qquad \rightarrow \qquad x=\frac{2a}{a+5}.$$

- Se $a+5=0$, cioè se $a=-5$, non possiamo dividere; sostituiamo -5 al posto di a nell'equazione (**1**):

  $x(a+5)=2a$ diventa $0\cdot x=2(-5)$ cioè $0\cdot x=-10$ che è impossibile.

Riassumendo:

- *se* $a \neq 0, -5: S=\left\{\dfrac{2a}{a+5}\right\}$
- *se* $a=0$: *l'equazione perde significato*
- *se* $a=-5: S=\varnothing$.

ESERCIZI

Comprensione

1 Indica quali sono le condizioni che il parametro a deve soddisfare affinché le seguenti equazioni non perdano significato:

a. $\dfrac{x-3}{a}=1$ **b.** $x-2=\dfrac{1}{a-2}+3x$ **c.** $\dfrac{x+1}{a-1}=0$ **d.** $\dfrac{x}{a^2+5a+6}-3=0$

[$a \neq 0$; $a \neq 2$; $a \neq 1$; $a \neq -2 \;\wedge\; a \neq -3$]

2 L'equazione $ax=a-1$ di dominio R:

a. ha sempre soluzione $\dfrac{a-1}{a}$ **b.** ha soluzione $\dfrac{a-1}{a}$ se $a \neq 0$

c. ha soluzione $\dfrac{a-1}{a}$ se $a \neq 1$ **d.** ha soluzione $\dfrac{a-1}{a}$ se $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ [**b.**]

3 L'equazione $(3-a)x = a$ è:

a. indeterminata: ① se $a = 3$ ② se $a = 0$ ③ mai

b. determinata: ① se $a \neq 3$ ② se $a \neq 0$ ③ sempre

c. impossibile: ① se $a = 3$ ② se $a = 0$ ③ mai [**a.** ③; **b.** ①; **c.** ①]

Risolvi le seguenti equazioni letterali intere, determinando le eventuali condizioni da imporre ai parametri.

4 **ESERCIZIO GUIDATO**

$1 + bx = 3$

Scriviamo l'equazione nella forma $bx = 2$

- Se $b \neq 0$ possiamo dividere per b in base al secondo principio di equivalenza ottenendo:

  $\frac{bx}{b} = \frac{2}{b} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{b}$

- Se $b = 0$ non possiamo dividere per b e, scrivendo nell'equazione ottenuta 0 al posto di b, abbiamo:

  $0 \cdot x = 2 \quad \rightarrow \quad 0 = 2$ l'equazione è impossibile.

Riassumendo: se $b \neq 0$ allora $S = \left\{\frac{2}{b}\right\}$

se $b = 0$ allora $S = \varnothing$

5 **ESERCIZIO GUIDATO**

$5a + 2x - 3 = 0$

Scriviamo l'equazione nella forma $2x =$ ....

Il coefficiente di x è numerico e non è necessario discutere l'equazione: $x = \frac{3-5a}{2}$.

Riassumendo: $\forall a \in R \quad S = \left\{\frac{3-5a}{2}\right\}$

Completa la risoluzione delle seguenti equazioni.

6 $(a-1)x = a + 2$ se $a \neq$ ... $x =$ ....

se $a =$ ..... l'equazione è ....

7 $(a+3)x = a^2 - 9$ se $a \neq$ ..... $x =$ ....

se $a =$ ..... l'equazione è ....

8 $ax + 3 = x - 2$

Trasporta i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo: ....

Raccogli x al primo membro ....

Procedi alla discussione se $a \neq$ ..... $x =$ .....

se $a =$ ..... l'equazione è ....

9 $x - 2 = 2ax + 1$

Trasporta i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo: ....

Raccogli x al primo membro ....

Procedi alla discussione se $a \neq$ ..... $x =$ .....

se $a =$ ..... l'equazione è ....

Risolvi e discuti le seguenti equazioni.

10 $1-3x=a-2+x$ $\left[\forall a\in R \quad S=\left\{\frac{3-a}{4}\right\}\right]$

11 $a(x+1)-3=a+2$ $\left[\text{se } a\neq 0 \text{ allora } S=\left\{\frac{5}{a}\right\}; \text{ se } a=0 \text{ allora } S=\varnothing\right]$

12 $ax+x=3$ $\left[\text{se } a\neq -1 \text{ allora } S=\left\{\frac{3}{a+1}\right\}; \text{ se } a=-1 \text{ allora } S=\varnothing\right]$

13 $(x-2)(b-1)=0$ $[\text{se } b\neq 1 \text{ allora } S=\{2\}; \text{ se } b=1 \text{ allora } S=R]$

14 $a^2x+a=x+1$ $\left[\text{se } a\neq 1 \wedge a\neq -1 \text{ allora } S=\left\{-\frac{1}{a+1}\right\}; \text{ se } a=1 \text{ allora } S=R; \text{ se } a=-1 \text{ allora } S=\varnothing\right]$

15 $(a^2-5a+6)x=0$ $[\text{se } a\neq 2 \ \wedge \ a\neq 3 \text{ allora } S=\{0\}; \text{ se } a=2 \ \vee \ a=3 \text{ allora } S=R]$

16 $(a^2-7a+12)x=1$ $\left[\text{se } a\neq 4 \ \wedge \ a\neq 3 \text{ allora } S=\left\{\frac{1}{(a-4)(a-3)}\right\}; \text{ se } a=4 \ \vee \ a=3 \text{ allora } S=\varnothing\right]$

17 $5b(x+1)-2=6(b-1)$ $\left[\text{se } b\neq 0 \text{ allora } S=\left\{\frac{b-4}{5b}\right\}; \text{ se } b=0 \text{ allora } S=\varnothing\right]$

18 $a^2-ax=5x+25$ $[\text{se } a\neq -5 \text{ allora } S=\{a-5\}; \text{ se } a=-5 \text{ allora } S=R]$

19 $a(x+2)-10+2x=2(x-5)+3a$ $[\text{se } a\neq 0 \text{ allora } S=\{1\}; \text{ se } a=0 \text{ allora } S=R]$

20 $\left(\frac{1}{2}x+a\right)\left(\frac{1}{2}x-a\right)-\left(\frac{1}{2}x+a\right)^2=a(x-2a)$ $[\text{se } a\neq 0 \text{ allora } S=\{0\}; \text{ se } a=0 \text{ allora } S=R]$

21 $(x-a)(x+a)+x=x(x+1)+a^2$ $[\text{se } a\neq 0 \text{ allora } S=\varnothing; \text{ se } a=0 \text{ allora } S=R]$

Risolvi le seguenti equazioni letterali intere, determinando le eventuali condizioni da imporre ai parametri.

22 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$2b-x=\frac{x}{b}$$

L'equazione è intera ed ha dominio R; dobbiamo porre però le condizioni sul parametro: affinchè l'equazione abbia significato deve essere $b\neq 0$.
In questa ipotesi riduciamo tutti i termini nei due membri allo stesso denominatore e svolgiamo i calcoli:

$$\cancel{b}\cdot\frac{2b^2-bx}{\cancel{b}}=\frac{x}{\cancel{b}}\cdot\cancel{b} \quad\rightarrow\quad x+bx=2b^2 \quad\rightarrow\quad x(b+1)=2b^2$$

Discussione.

Ricordiamo che

- se il coefficiente della x è diverso da zero allora l'equazione è determinata.

  Quindi se $b\neq -1$ la soluzione è $\frac{x\cancel{(b+1)}}{\cancel{(b+1)}}=\frac{2b^2}{(b+1)} \quad\rightarrow\quad x=\frac{2b^2}{(b+1)}$

- se invece il coefficiente della x è nullo, bisogna verificare se si ottiene un'equazione indeterminata oppure impossibile:

  se $b=-1$ l'equazione diventa $0x=2$ ed è impossibile.

Riassumendo: se $b \neq 0$ (condizione iniziale) $\wedge$ $b \neq -1$ allora $S = \left\{ \frac{2b^2}{b+1} \right\}$;
se $b = 0$ allora l'equazione perde significato;
se $b = -1$ allora $S = \varnothing$.

23 $\frac{1-x}{a} + 1 = \frac{1+x}{a}$ $\left[\text{se } a = 0 : \text{l'equazione perde significato; se } a \neq 0 : S = \left\{ \frac{a}{2} \right\}\right]$

24 $\frac{x}{a^2} - \frac{x-a}{2a} + \frac{1}{a-2} = 1$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 0 \vee a = 2 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 2 : S = \left\{ \frac{a^2(4-a)}{(a-2)^2} \right\}\end{array}\right]$

25 $\frac{x-2}{a+2} + \frac{x+2}{a-3} = \frac{12 - a(2a+3)}{a^2 - a - 6}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = -2 \vee a = 3 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq -2 \wedge a \neq 3 \wedge a \neq \frac{1}{2} : S = \{-(a+2)\}; \\ \text{se } a = \frac{1}{2} : S = R\end{array}\right]$

26 $\frac{2x-1}{a+2} + \frac{x+1}{a-2} = \frac{1}{a^2-4}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 2 \vee a = -2 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 2 \wedge a \neq -2 \wedge a \neq \frac{2}{3} : S = \left\{ \frac{3}{2-3a} \right\}; \\ \text{se } a = \frac{2}{3} : S = \varnothing\end{array}\right]$

27 $\frac{x+3}{2a+4} + \frac{x-3}{2a-4} = \frac{ax-6}{a^2-4}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 2 \vee a = -2 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 2 \wedge a \neq -2 : S = R\end{array}\right]$

28 $\frac{x}{a^2-a} + \frac{x}{a^2+a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a-a^3}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 0 \vee a = 1 \vee a = -1 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -1 : S = \left\{ -\frac{a}{2} \right\}\end{array}\right]$

29 $\frac{x}{a-1} + \frac{x}{a+1} + \frac{2x}{1-a^2} = 0$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 1 \vee a = -1 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 1 \wedge a \neq -1 : S = \{0\}\end{array}\right]$

30 $\frac{x+2}{a-2} = \frac{ax-4}{a^2-4} + \frac{(x-2)(a+3)}{a^2+5a+6}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = \pm 2 \vee a = -3 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 4 \wedge a \neq -3 \wedge a \neq \pm 2 : S = \left\{ \frac{-4(1+a)}{4-a} \right\}; \\ \text{se } a = 4 : S = \varnothing\end{array}\right]$

31 $\frac{x}{a^2+2a} - \frac{a+1}{a+2} + \frac{x-1}{a+2} = \frac{x-2}{a^2}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 0 \vee a = -2 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 0 \wedge a \neq -2 \wedge a^2 \neq 2 : S = \{a+2\}; \\ \text{se } a^2 = 2 : S = R\end{array}\right]$

32 $\frac{x-1}{a-3} + \frac{x+1}{a-2} = \frac{4(a^2-6)-2}{a^2-5a+6}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 3 \vee a = 2 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 3 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq \frac{5}{2} : S = \{2a+5\}; \\ \text{se } a = \frac{5}{2} : S = R\end{array}\right]$

33 $\frac{2x-5a}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x+2}{2a} + \frac{x-2a}{6} - \frac{2(a+3)}{3a}$ $\left[\begin{array}{l}\text{se } a = 0 : \text{l'equazione perde significato;} \\ \text{se } a \neq 0 \wedge a \neq 1 : S = \left\{ \frac{2}{3}(4a+3) \right\}; \text{ se } a = 1 : S = R\end{array}\right]$