Approfondimento

Le equazioni e le disequazioni con i moduli

Ricordiamo che il valore assoluto o modulo di un numero è il numero stesso considerato senza il suo segno. Tuttavia, poiché abbiamo identificato i numeri assoluti con quelli positivi, possiamo dire che il valore assoluto di un numero reale a ha questo significato:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Poiché lo zero non ha segno, il valore $a = 0$ può essere attribuito indifferentemente al primo o al secondo caso; noi lo abbiamo associato al primo.
Un analogo significato si deve attribuire al modulo di un'espressione. Per esempio:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Per poter risolvere un'equazione o una disequazione nelle quali l'incognita si trova in un'espressione che fa parte di un modulo, è necessario togliere il simbolo di modulo, distinguendo il caso in cui il suo argomento è positivo o nullo da quello in cui è negativo.

Vediamo come si deve procedere attraverso degli esempi.

Le equazioni

Risolviamo l'equazione $x + |5x-2| = 2x+4$

Per poter togliere il modulo dobbiamo conoscere il segno del binomio $5x-2$:

$$|5x-2| \begin{cases} 5x-2 & \text{se } x \geq \dfrac{2}{5} \\ 2-5x & \text{se } x < \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Possiamo quindi dire che l'equazione è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{2}{5} \\ x + \boxed{5x-2} = 2x+4 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x < \dfrac{2}{5} \\ x + \boxed{2-5x} = 2x+4 \end{cases}$$

Risolvendo le due equazioni troviamo: $\begin{cases} x \geq \dfrac{2}{5} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x < \dfrac{2}{5} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Poiché $\dfrac{3}{2}$ è maggiore di $\dfrac{2}{5}$ e $-\dfrac{1}{3}$ è minore di $\dfrac{2}{5}$, ciascuna soluzione soddisfa il proprio sistema e le soluzioni sono entrambe accettabili: $S = \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

Le disequazioni

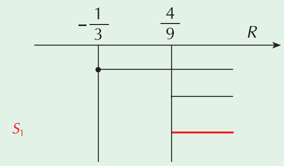
Risolviamo la disequazione $|3x+1| + 2x > 5 - 4x$

Studiamo il segno dell'argomento del modulo:

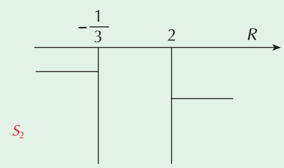
$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \geq -\dfrac{1}{3} \\ -3x-1 & \text{se } x < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La disequazione è quindi equivalente ai due sistemi.

Primo sistema: $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \boxed{3x+1} + 2x > 5 - 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{4}{9} \end{cases} \rightarrow S_1 : x > \dfrac{4}{9}$



Secondo sistema: $\begin{cases} x < -\dfrac{1}{3} \\ \boxed{-3x-1} + 2x > 5 - 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{1}{3} \\ x > 2 \end{cases} \rightarrow S_2 : \varnothing$



L'insieme delle soluzioni è l'**unione** dei due insiemi S_1 e S_2, ma poiché l'insieme S_2 è vuoto, la disequazione è verificata nell'intervallo $x > \dfrac{4}{9}$.

Attenzione agli errori.

Gli insiemi S_1 e S_2 sono sempre disgiunti; per determinare l'insieme delle soluzioni di una disequazione con i moduli si deve trovare l'unione degli insiemi S_1 e S_2 **e non l'intersezione** che è l'insieme vuoto.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni con i moduli.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3 + |1 - 4x| = 2(x-1) + 5x$

Studiamo il segno dell'argomento del modulo: $|1-4x| = \begin{cases} 1-4x & \text{se } x \leq \dfrac{1}{4} \\ 4x-1 & \text{se } x > \dfrac{1}{4} \end{cases}$

L'equazione è quindi equivalente a:

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ 3 + (1 - 4x) = 2(x - 1) + 5x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ 3 + (4x - 1) = 2(x - 1) + 5x \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione del primo sistema:

$$3 + 1 - 4x = 2x - 2 + 5x \quad \to \quad -11x = -6 \quad \to \quad x = \frac{6}{11}$$

Poiché $\frac{6}{11}$ non soddisfa la condizione $x \leq \frac{1}{4}$, la soluzione trovata non è accettabile.

Risolviamo l'equazione del secondo sistema:

$$3 + 4x - 1 = 2x - 2 + 5x \quad \to \quad -3x = -4 \quad \to \quad x = \frac{4}{3}$$

Poiché $\frac{4}{3}$ soddisfa la condizione $x > \frac{1}{4}$, la soluzione trovata è accettabile.

L'insieme delle soluzioni è quindi: $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

2 $6 + |x| = 3x$ $\qquad$ $3 - |x + 2| = x - 1$ $\qquad$ $[S = \{3\};\ S = \{1\}]$

3 $|7x + 2| = 12$ $\qquad$ $2x + |1 - x| = 1 - x$ $\qquad$ $\left[S = \left\{\frac{10}{7}, -2\right\};\ S = \{0\}\right]$

4 $|2x - 3| = x + 2$ $\qquad$ $1 - x = 2|3x + 2|$ $\qquad$ $\left[S = \left\{5, \frac{1}{3}\right\};\ S = \left\{-\frac{3}{7}, -1\right\}\right]$

5 $1 - |3 - x| = 5x$ $\qquad$ $3 + 2|x - 4| = x + 1$ $\qquad$ $\left[S = \left\{-\frac{1}{2}\right\};\ S = \left\{\frac{10}{3}, 6\right\}\right]$

6 $|x - 1| = 2x - 3$ $\qquad$ $|6x - 1| + 3 = 4(x + 2)$ $\qquad$ $\left[S = \{2\};\ S = \left\{-\frac{2}{5}, 3\right\}\right]$

7 $|2x - 1| = 5x$ $\qquad$ $|3x + 5| - x = 1$ $\qquad$ $\left[S = \left\{\frac{1}{7}\right\};\ S = \varnothing\right]$

8 $2 + |3x - 1| = 2x$ $\qquad$ $2 - x = 1 + 2|1 - 5x|$ $\qquad$ $\left[S = \varnothing;\ S = \left\{\frac{1}{9}, \frac{3}{11}\right\}\right]$

9 $|x - 10| = 2x + 9$ $\qquad$ $3 + 2|x| = x - 5$ $\qquad$ $\left[S = \left\{\frac{1}{3}\right\};\ S = \varnothing\right]$

10 $2x + |2 + x| = 8x - 1$ $\qquad$ $\frac{1}{6}|x + 3| = 2$ $\qquad$ $\left[S = \left\{\frac{3}{5}\right\};\ S = \{-15, 9\}\right]$

11 $4 + 2|3x - 1| = 2x + 3(4 - x)$ $\qquad$ $4 + |x| = 1 - x$ $\qquad$ $\left[S = \left\{-\frac{6}{5}, \frac{10}{7}\right\};\ S = \varnothing\right]$

12 $\frac{1}{2}(3x - 4) + 2 = 1 - |2x + 1|$ $\qquad$ $\frac{3}{2}|6 - 3x| = \frac{1}{2}(x + 4)$ $\qquad$ $\left[S = \{-4, 0\};\ S = \left\{\frac{7}{5}, \frac{11}{4}\right\}\right]$

13 $\frac{2(x - 3)}{3} - |1 - x| = \frac{1}{2}(2x - 5)$ $\qquad$ $3x - 1 = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| + x$ $\qquad$ $\left[S = \left\{\frac{3}{4}; \frac{9}{8}\right\};\ S = \left\{x \geq \frac{1}{2}\right\}\right]$

14 $|x - 2| - 3 = 1 - x$ $\qquad$ $x - 2|3 - 4x| = -1$ $\qquad$ $\left[S = \{3\};\ S = \left\{\frac{5}{9}, 1\right\}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni con i moduli.

15 **ESERCIZIO GUIDATO**

$|x-4| + x > 3x + 7$

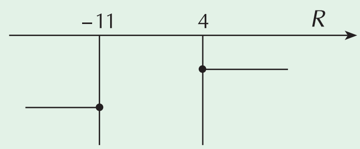
Segno dell'argomento del modulo: $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ 4-x & \text{se } x < 4 \end{cases}$

La disequazione è quindi equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \boxed{x-4} + x > 3x + 7 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 4 \\ \boxed{4-x} + x > 3x + 7 \end{cases}$$

Risolvendo il primo sistema si ottiene:

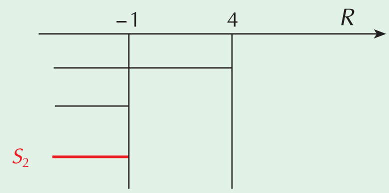
$$\begin{cases} x \geq 4 \\ -x > 11 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x < -11 \end{cases}$$



$S_1 = \varnothing$

Risolvendo il secondo sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x < 4 \\ -3x > 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x < 4 \\ x < -1 \end{cases}$$



$S_2: \quad x < -1$

L'unione dei due insiemi è ancora l'insieme S_2, quindi la disequazione è verificata se $x < -1$.

16 $6 - |3 - 8x| \leq x + 4$ $\qquad$ $2 + |x| > 3x + 4$ $\qquad$ $\left[x \leq \frac{1}{7} \vee x \geq \frac{5}{9};\ x < -\frac{1}{2}\right]$

17 $|3x - 4| + x > 2(x - 1)$ $\qquad$ $x - |x - 2| > 3(x - 1)$ $\qquad$ $[S = R;\ x < 1]$

18 $1 - |2x + 9| > x - 4$ $\qquad$ $2(x + 3) - 4|x| > 0$ $\qquad$ $\left[-14 < x < -\frac{4}{3};\ -1 < x < 3\right]$

19 $\frac{x+1}{3} + \frac{|3-2x|}{4} > \frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}|x - 4| + x \leq 2$ $\qquad$ $[S = R;\ x \leq 0]$

20 $\frac{3}{4}|5x - 1| > 1 + \frac{x}{2}$ $\qquad$ $3 - \frac{4}{5}|2 - x| \geq x$ $\qquad$ $\left[x < -\frac{1}{17} \vee x > \frac{7}{13};\ x \leq \frac{23}{9}\right]$

21 $|2 - 7x| + x < 3x - 1$ $\qquad$ $|x| - x \geq 3$ $\qquad$ $\left[S = \varnothing;\ x \leq -\frac{3}{2}\right]$

22 $\frac{2x+9}{3} - \frac{|5-x|}{4} \geq \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} - \frac{7|x-1|}{2} > 1$ $\qquad$ $\left[x \geq -\frac{19}{11};\ S = \varnothing\right]$