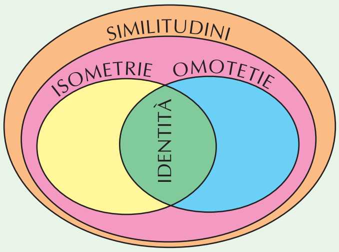
APPROFONDIMENTO

Le affinità

Traslazioni, simmetrie assiali o centrali, omotetie e dilatazioni, di cui abbiamo già fatto largo uso nello studio della geometria analitica, insieme ad altre trasformazioni quali le rotazioni, sono legate fra loro da una relazione di tipo insiemistico come quella rappresentata in ***figura 1*** e fanno parte di un gruppo più vasto di trasformazioni che prende il nome di affinità.

Figura 1

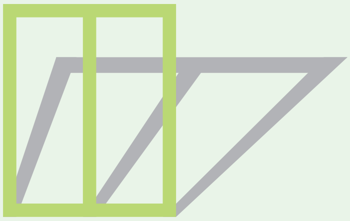


Una **affinità** è una corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano che ha come invarianti l'allineamento dei punti e il parallelismo.

Ad un'affinità si richiede quindi solo di trasformare rette in rette e rette parallele in rette parallele.
Tutte le trasformazioni che abbiamo applicato finora sono quindi delle affinità, mentre non possiamo considerare tali quelle che comportano delle deformazioni come, per esempio, le immagini che otteniamo dagli specchi deformanti (in ***figura 2a*** una celebre litografia del pittore e architetto olandese M.C. Escher che mostra il riflesso di una stanza su una superficie sferica) oppure le ombre proiettate da una lampada nelle quali le immagini di due rette parallele non sono più tali (***figura 2b***).

Figura 2

a.



b.

Le equazioni delle trasformazioni che abbiamo applicato finora hanno tutte la caratteristica di essere di tipo lineare, cioè della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

Per esempio:

- se $a = e = 1$, $b = d = 0$ otteniamo le equazioni di una traslazione $\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + f \end{cases}$
- se $a = e = -1$ e tutti gli altri coefficienti sono uguali a zero, troviamo le equazioni della simmetria avente centro nell'origine: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$
- se $b = d = 1$ e tutti gli altri coefficienti sono uguali a zero, troviamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = x$: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Vogliamo dimostrare che:

Teorema. Un'affinità è sempre descritta da un sistema di equazioni lineari fra le variabili x e y e le loro trasformate x' e y' :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases} \qquad \text{con} \quad ae - bd \neq 0$$

Dimostrazione.

In accordo con la definizione, dobbiamo far vedere che:

1. la corrispondenza stabilita da queste equazioni è biunivoca
2. una retta viene trasformata in una retta
3. se due rette sono parallele, anche le loro trasformate lo sono.

1. La corrispondenza è biunivoca se ad ogni coppia (x, y) corrisponde una sola coppia (x', y') e viceversa. Deve quindi essere possibile risolvere il sistema rispetto a x e y in modo da individuare le equazioni della trasformazione inversa.
   Riscriviamo allora il sistema in modo da isolare le due incognite:
   $$\begin{cases} ax + by = c - x' \\ dx + ey = f - y' \end{cases}$$
   In base alla regola di Cramer, il sistema è determinato se
   $$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \neq 0$$
   Questa è dunque la condizione affinché la corrispondenza sia biunivoca.

Regola di Cramer.

Considerato il sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

e posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

se $\Delta \neq 0$ *allora*

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \wedge y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

2. Risolvendo il sistema, troviamo le espressioni di x e y in funzione di x' e y' che sono ancora espressioni lineari, quindi della forma
   $$\begin{cases} x = Ax' + By' + C \\ y = Dx' + Ey' + F \end{cases}$$
   Operando queste sostituzioni nell'equazione di una retta, troviamo ancora un'equazione di primo grado, quindi ancora una retta.

3. Siano $r : px + qy + h = 0$ e $s : px + qy + k = 0$ le equazioni di due rette parallele.
   Operiamo le sostituzioni indicate dal sistema:
   - la retta r si trasforma in:
     $$p(Ax' + By' + C) + q(Dx' + Ey' + F) + h = 0 \quad \rightarrow \quad (pA + qD)x' + (pB + qE)y' + pC + qF + h = 0$$
   - la retta s si trasforma in:
     $$p(Ax' + By' + C) + q(Dx' + Ey' + F) + k = 0 \quad \rightarrow \quad (pA + qD)x' + (pB + qE)y' + pC + qF + k = 0$$

   ed è evidente che anche queste due rette sono parallele avendo lo stesso coefficiente angolare.

Da ultimo osserviamo che ogni trasformazione non lineare trasforma un'equazione lineare in una che non lo è, quindi una retta non viene più trasformata in una retta.
Le sole equazioni che possono descrivere un'affinità sono quindi di forma lineare. ◀

Stabilisci se le seguenti equazioni rappresentano delle affinità.

1 $\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$ [si]

2 $\begin{cases} x' = x - 3y + 1 \\ y' = x^2 + y \end{cases}$ [no]

3 $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{2}x + 2y \\ y' = -x + \dfrac{1}{4}y + 1 \end{cases}$ [si]

4 $\begin{cases} x' = -2x + y + 1 \\ y' = 2x - y - 3 \end{cases}$ [no]

5 $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \sqrt{2}y \\ y' = \sqrt{2x} - y + 1 \end{cases}$ [no]

6 $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ [no]

Considerate le affinità definite dalle equazioni date, rispondi alle richieste.

7 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x - 3y \end{cases}$

troviamo i corrispondenti dei punti $A(2, -1)$ e $B(1, 1)$ e la misura del segmento trasformato.

Sostituiamo le coordinate dei punti nelle equazioni della trasformazione:

$\begin{cases} x' = 4 - 3 = 1 \\ y' = 2 + 3 = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A'(1, 5)$

$\begin{cases} x' = 2 + 3 = 5 \\ y' = 1 - 3 = -2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad B'(5, -2)$

Calcoliamo la misura del segmento $A'B'$: $\overline{A'B'} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.

8 $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ trova i corrispondenti dei punti $A(1, -1)$, $B(-2, 0)$, $C(0, 2)$.

[$A'(-2, 3)$; $B'(2, -4)$; $C'(2, -2)$]

9 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ trova il triangolo che corrisponde a quello di vertici $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$.

[$(0, 2)$; $(-1, -1)$; $(-2, 2)$]

10 $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}y \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y \end{cases}$ trova il quadrilatero che corrisponde al rettangolo di vertici $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, 0)$; che tipo di quadrilatero hai ottenuto?

$\left[(3, 1); (4, 4); \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$

11 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ trova il triangolo che corrisponde a quello di vertici $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(0, -1)$ e determinane l'area. $[A'(1, 5), B'(-4, 1), C'(1, -1); \text{area} = 15]$

12 $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}x - 2y \\ y' = x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$ trova come si trasforma il quadrato che ha tre vertici nei punti $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(4, 2)$.

$\left[A'\left(-\frac{9}{4}, -\frac{1}{2}\right), B'\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), C'(-3, 5), D'\left(-\frac{31}{4}, 3\right); \text{è un parallelogramma}\right]$

Considerate le affinità definite dalle equazioni date, rispondi alle richieste.

13 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 2x \end{cases}$ trova la retta che corrisponde a quella di equazione $x + 4y - 6 = 0$.

Troviamo le equazioni della trasformazione inversa risolvendo il sistema rispetto a x e y:

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 2x \end{cases} \quad \text{diventa} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}y' \\ y = -\dfrac{1}{3}x' + \dfrac{1}{6}y' \end{cases}$$

Dobbiamo quindi operare le sostituzioni: $\begin{cases} x \Rightarrow \dfrac{1}{2}y \\ y \Rightarrow -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{6}y \end{cases}$

L'equazione $x + 4y - 6 = 0$ diventa

$$\left(\frac{1}{2}y\right) + 4\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y\right) - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 8x - 7y + 36 = 0$$

14 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ trova la retta che corrisponde a quella che passa per i punti $(0, 2)$ e $(1, -1)$. $[7x + 5y - 8 = 0]$

15 $\begin{cases} x' = -2y \\ y' = \dfrac{1}{2}x - y \end{cases}$ trova la parabola che corrisponde a quella di equazione $y = x^2$. $[2x^2 - 8xy + 8y^2 + x = 0]$

16 $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + y \\ y' = 2y \end{cases}$ trova la curva che corrisponde alla circonferenza avente centro nell'origine e raggio 2. $[16x^2 - 16xy + 5y^2 - 16 = 0]$

17 Scrivi l'equazione della curva che corrisponde alla circonferenza di centro O e raggio 2 nella trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$. Riconosci in essa una curva particolare? $\left[\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1\right]$

18 Scrivi l'equazione della curva corrispondente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ nell'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = x - \dfrac{1}{3}y \end{cases}$ e costruiscine il grafico. $\left[y = \dfrac{1}{27}x^2 - \dfrac{1}{9}x\right]$

19 ## ESERCIZIO GUIDATO

Scrivi le equazioni dell'affinità che fa corrispondere al triangolo di vertici $O(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 1)$ il triangolo di vertici $O'(2, 3)$, $B'(5, 2)$, $C'(3, 6)$.

L'affinità non lascia fissa l'origine (infatti il punto O non si trasforma in se stesso); le sue equazioni sono quindi

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

Se $O'(2, 3)$ deve corrispondere all'origine, allora deve essere $\begin{cases} 2 = c \\ 3 = f \end{cases}$

Se $B'(5, 2)$ deve corrispondere a $B(8, 0)$, allora deve essere $\begin{cases} 5 = 8a + c \\ 2 = 8d + f \end{cases}$

Se $C'(3, 6)$ deve corrispondere a $C(0, 1)$, allora deve essere $\begin{cases} 3 = b + c \\ 6 = e + f \end{cases}$

Raggruppando le equazioni nelle tre incognite a, b, c e nelle incognite d, e, f e risolvendo i sistemi ottenuti, trovi i coefficienti delle equazioni della affinità. $\left[\begin{cases} x' = \dfrac{3}{8}x + y + 2 \\ y' = -\dfrac{1}{8}x + 3y + 3 \end{cases}\right]$

20 Individua la matrice dell'affinità che lascia fissa l'origine e che trasforma i punti $A(2, 1)$ e $B(3, -2)$ nei punti $A'(3, -1)$ e $B'(8, -5)$. $\left[\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

21 Scrivi le equazioni dell'affinità che trasforma il triangolo di vertici $A(1, 1)$, $B(3, -2)$, $C(1, 4)$ nel triangolo i cui vertici corrispondenti sono nell'ordine $A'(1, 5)$, $B'(6, 0)$, $C'(-2, 14)$. $\left[\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}\right]$