Modelli matematici e ricerca operativa

Obiettivi

- formalizzare un problema costruendone il modello matematico
- comprendere il concetto di funzione obiettivo
- saper determinare la soluzione ottimale di un problema

1. Problemi e modelli

1.1 Costruire un modello: le fasi operative

A partire dal primo biennio e continuando poi nel secondo, si è più volte sottolineata l'importanza che ha il saper costruire un modello adeguato a rappresentare una situazione problematica. In questo capitolo vogliamo riprendere e approfondire questo argomento mostrando come le conoscenze matematiche acquisite finora consentano di trovare le soluzioni ottimali di un problema.
In particolare, è la **Ricerca Operativa** (di seguito abbreviata in RO), disciplina di recente sviluppo (le sue origini risalgono alla prima metà del secolo scorso), che si occupa di applicare il metodo scientifico alla soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale; sostanzialmente si tratta di applicare i metodi della matematica che permettono di giungere alle scelte migliori per gestire nel modo più efficiente possibile situazioni complesse, quali per esempio la gestione dei sistemi di produzione e d'impresa.

Qualunque sia la sua natura, la risoluzione di un problema di RO passa attraverso alcune fasi che possiamo così sintetizzare.

Fase 1: **Individuazione del problema da risolvere e raccolta di tutte le informazioni ad esso inerenti.**

In questa fase si individuano le variabili coinvolte e tutte le condizioni a cui esse devono sottostare. In particolare, occorre individuare le **variabili controllabili**, dette anche **variabili di azione**, cioè quelle variabili il cui comportamento è noto e quindi quantificabile, e quelle **non controllabili**, cioè quelle variabili di cui non è possibile prevedere il comportamento se non in termini probabilistici, ma che influiscono sui possibili esiti della situazione in esame.
Ad esempio, in un problema di ottimizzazione della produzione, le variabili controllabili sono relative al rendimento dei macchinari e alla produttività degli

operai, le variabili non controllabili sono gli eventuali guasti ai macchinari o le eventuali malattie dei dipendenti.

Fase 2: **Costruzione del modello matematico che riassuma le caratteristiche del problema.**

Di solito, il modello cui si perviene dopo l'analisi del problema e l'individuazione delle variabili è espresso tramite una funzione che, per il ruolo che svolge, prende il nome di **funzione obiettivo**.
Le variabili della funzione obiettivo sono poi soggette a dei **vincoli** esprimibili mediante equazioni o disequazioni nelle variabili controllabili x_i; ad esempio vincoli di non negatività, detti anche **vincoli di segno**, che esprimono che le quantità coinvolte non possono assumere valori negativi, oppure **vincoli tecnici**, che esprimono ad esempio che in un processo produttivo possono intervenire quantità limitate di una certa materia prima.
In dipendenza dal tipo di problema e dal tipo di vincoli, le variabili possono poi assumere valori di tipo discreto (numero di oggetti prodotti, numero di dipendenti, numero di processi produttivi fra cui scegliere), o di tipo continuo (tempo di esecuzione di una operazione, quantità di merce da trasportare); vedremo che i metodi di risoluzione del problema possono essere diversi nei due casi.

Fase 3: **Analisi del modello matematico ed individuazione della soluzione ottimale.**

La soluzione ottimale, individuata mediante i metodi della matematica è quella che rende massima (o minima a seconda dei casi) la funzione obiettivo.

Fase 4: **Analisi dei risultati.**

La funzione obiettivo e l'insieme dei vincoli costituiscono solo un modello del problema e la soluzione trovata è ottimale solo per quel particolare modello. Esiste quindi sempre uno scarto tra quello che si è costruito con un insieme di equazioni e di formule e la situazione reale che queste relazioni rappresentano; una volta trovata la soluzione si rende perciò necessario procedere alla sua verifica in modo da provvedere ad un eventuale aggiustamento del modello così da renderlo più aderente alla situazione che rappresenta.

Va sottolineato che i punti elencati non sono da considerarsi strettamente sequenziali in quanto in un processo decisionale reale si deve continuamente aggiornare la situazione modificando il modello in base alle informazioni aggiuntive.

1.2 Le tipologie dei problemi

Nei prossimi paragrafi ci occuperemo per primo di *problemi di scelta* nelle diverse forme in cui si possono presentare, distinguendo tra problemi in condizioni di certezza e problemi in condizioni di incertezza.
Problemi di scelta in *condizioni di certezza* si riferiscono a situazioni in cui le conseguenze di un'azione sono determinabili a priori; per esempio quando si deve scegliere tra due o più preventivi per l'esecuzione di una lavorazione.
Ci si trova invece in *condizioni di incertezza* quando una o più variabili del problema sono variabili aleatorie delle quali si possono conoscere solo i valori di probabilità; per esempio decidere la quantità di un bene da produrre si può valutare solo sulla base di indagini di mercato e di previsioni di vendita.

Subito dopo prenderemo in considerazione problemi di *programmazione lineare* in cui sia la funzione obiettivo sia i vincoli sono espressi da relazioni di tipo lineare.

2. Problemi di scelta in condizioni di certezza

2.1 Il caso continuo

Supponiamo dapprima che la variabile x possa assumere un qualsiasi valore reale; in questa ipotesi possiamo lavorare con le funzioni reali di variabile reale, rappresentarle in un diagramma cartesiano e, dalla loro analisi, dedurre quali possono essere le scelte ottimali.
Vediamo alcuni esempi che riassumono i casi più significativi.

Problema di massimo con funzione obiettivo lineare: $y = mx + q$.

Una azienda che produce stoffe ha un costo giornaliero di € 3000 per ogni telaio, al quale va aggiunta una spesa per la materia prima di € 4 per ogni metro prodotto; la stoffa viene poi rivenduta a € 5,20 al metro. Qual è la produzione giornaliera che consente il massimo profitto, supponendo che tutta la produzione venga venduta, se la capacità produttiva di ogni impianto non può superare i 15000 m ogni giorno?

La variabile d'azione è la produzione giornaliera di ogni telaio che può essere rappresentata da un numero reale non negativo; indichiamo dunque con x il numero di metri di tessuto prodotto da un telaio, con $x \geq 0$.
La funzione obiettivo è la funzione profitto e di essa dobbiamo trovare il punto di massimo.
Dai dati del problema possiamo ricavare le seguenti funzioni:

Funzione dei costi: $C(x) = 3000 + 4x$

Funzione ricavo: $R(x) = 5{,}2x$

Funzione profitto: $P(x) = 5{,}2x - 3000 - 4x = 1{,}2x - 3000$

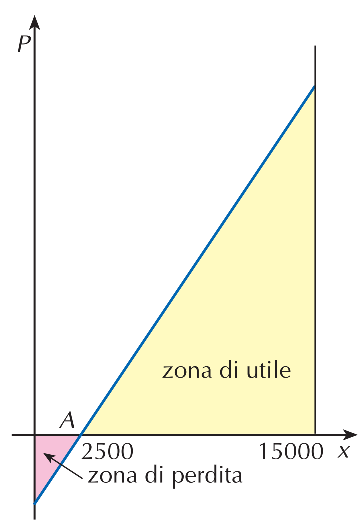
Vincoli: $0 \leq x \leq 15000$

Il modello matematico del problema diventa dunque

$$\begin{cases} P(x) = 1{,}2x - 3000 & \text{da massimizzare} \\ 0 \leq x \leq 15000 & \text{vincolo per la variabile d'azione} \end{cases}$$

La funzione obiettivo è una retta il cui grafico è in ***figura 1***; il massimo profitto si ha nel punto di massima produzione, cioè per $x = 15000$; non è conveniente produrre meno di 2500 m di stoffa perché si andrebbe in perdita.

Figura 1



Problema di massimo con funzione obiettivo quadratica: $y = ax^2 + bx + c$.

Un'impresa acquista e rivende della merce senza eseguire lavorazioni. Il prezzo di acquisto è in funzione della quantità acquistata x, in quintali, ed è pari a € 52,80 al quintale diminuito di un importo pari, in euro, allo 0,05% del peso della merce acquistata. Il prezzo di vendita è fisso ed è di € 72 al quintale. I costi di gestione sostenuti sono quantificabili in € 12000 fissi mensili cui vanno aggiunti costi di distribuzione pari, in euro, allo 0,2% del quadrato delle quantità vendute. Determiniamo la quantità x di merce che determina il massimo profitto mensile supponendo che non vi siano quantità rimaste invendute e che le possibilità di acquisto siano:

a. illimitate

b. non superiori a 10000 quintali

c. non superiori a 5000 quintali.

La variabile d'azione x è la quantità, in quintali, di merce acquistata ed è quindi rappresentata da un numero reale non negativo (vincolo di segno). La funzione obiettivo è il profitto e di essa dobbiamo trovare il valore massimo.

Funzione dei costi: $C(x) = (52{,}8 - 0{,}0005x)x + 12000 + 0{,}002x^2 = 0{,}0015x^2 + 52{,}8x + 12000$

Funzione ricavo: $R(x) = 72x$

Funzione profitto: $P(x) = 72x - 0{,}0015x^2 - 52{,}8x - 12000 = -0{,}0015x^2 + 19{,}2x - 12000$

Vincoli nei vari casi: **a.** $x \geq 0$

b. $0 \leq x \leq 10000$

c. $0 \leq x \leq 5000$

Dobbiamo quindi massimizzare la funzione P quando questa è soggetta ai vincoli **a.**, oppure **b.**, oppure **c.**.

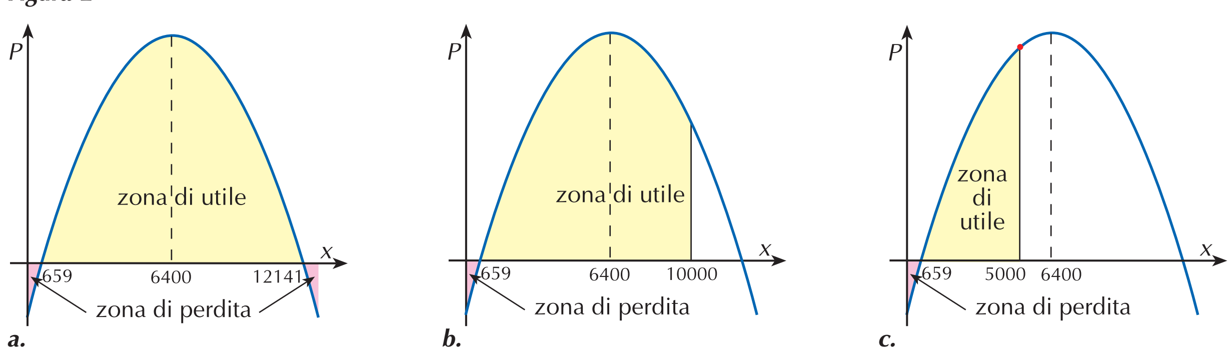
La funzione obiettivo è una parabola con la concavità rivolta verso il basso ed il suo vertice V rappresenta il punto di massimo (***figura 2a***). L'analisi del modello ci porta ad affermare che, indipendentemente dai vincoli, non conviene acquistare e rivendere meno di 659 quintali (valore arrotondato) e più di 12141 quintali (valore arrotondato) perché per $x < 659$ e $x > 12141$ i costi superano i ricavi e si lavorerebbe in perdita. Quindi, poiché si ha che $V(6400, 49440)$, il profitto massimo si ha in corrispondenza di:

a. 6400 quintali di merce acquistata, che corrisponde ad un profitto massimo di € 49440;

b. ancora 6400 quintali di merce (***figura 2b***);

c. 5000 quintali di merce, che corrisponde ad un profitto massimo di € 46500 (***figura 2c***).

Figura 2



Problema di minimo con funzione obiettivo più complessa

Un'azienda che lavora materia prima sostiene, per la sua produzione giornaliera, dei costi complessivi composti da € 1812 di spese fisse e, in euro,

$0{,}7 + 0{,}0004x$ per ogni quintale di materia prima lavorata dove x indica il numero di quintali. Vogliamo determinare la produzione giornaliera che consente di ridurre al minimo il costo medio di produzione nei seguenti casi:

a. produzione massima giornaliera di 1500q

b. produzione massima giornaliera di 3000q.

In questo caso la funzione obiettivo è la funzione del costo medio che, questa volta, va minimizzata.
Il costo medio (o costo unitario) è il rapporto fra il costo totale e la quantità prodotta e si ha che:

la funzione del costo totale è: $C(x) = 1812 + (0{,}7 + 0{,}0004x)x = 0{,}0004x^2 + 0{,}7x + 1812$

la funzione del costo medio è: $C_m(x) = \dfrac{0{,}0004x^2 + 0{,}7x + 1812}{x}$

i vincoli sono: **a.** $0 < x \leq 1500$

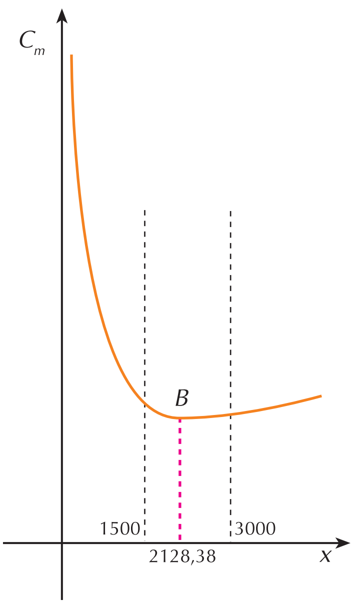
b. $0 < x \leq 3000$

Per trovare i punti di minimo relativi della funzione C_m ricorriamo all'analisi e calcoliamo la derivata prima della funzione obiettivo

$$C'_m(x) = \frac{0{,}0004x^2 - 1812}{x^2}$$

Essa si annulla in $x = \pm 100\sqrt{453} \approx \pm 2128{,}38$ e, dal segno della derivata prima e considerando che deve essere $x > 0$, deduciamo che vi è un punto di minimo in $x = 100\sqrt{453} \approx 2128{,}38$ (***figura 3***).
Se teniamo conto del vincolo **a.** che esclude il minimo trovato, il minor costo unitario si ha in corrispondenza dell'estremo destro cioè in $x = 1500$ ed è $C_m(1500) \approx 2{,}51(€)$.
Se teniamo conto del vincolo **b.**, il punto di minimo assoluto coincide con quello di minimo relativo ed è $C_m\left(100\sqrt{453}\right) \approx 2{,}40(€)$.

Figura 3



Problema di massimo con funzione obiettivo definita da più leggi

1. Una industria, per la produzione di un certo liquore, sostiene un costo di € 2,48 al litro e una spesa fissa settimanale, indipendente dalla quantità prodotta, di € 1600. La produzione viene ceduta ad alcuni concessionari che la pagano:

€ 4 per quantità fino a 1000 litri compresi;

€ 3,80 per quantità variabili tra i 1000 ed i 2000 litri inclusi;

€ 3,60 per quantità variabili tra i 2000 ed i 3000 litri inclusi.

Cerchiamo la quantità più conveniente da produrre e vendere per avere il massimo profitto tendo conto di una produzione massima di 3000 litri.

Siamo di nuovo in presenza di una funzione profitto di cui dobbiamo trovare il punto di massimo. Questa volta però la funzione obiettivo è una funzione definita a tratti, cioè, indicato con x il numero di litri prodotti e venduti, assume differenti espressioni a seconda dell'intervallo cui x appartiene.

Calcoliamo innanzi tutto la funzione costo: $C(x) = 1600 + 2{,}48x$

La funzione ricavo è data da: $$R(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ 3{,}8x & \text{se } 1000 < x \leq 2000 \\ 3{,}6x & \text{se } 2000 < x \leq 3000 \end{cases}$$

La funzione profitto conseguentemente è $$P(x) = \begin{cases} 1{,}52x - 1600 & \text{se } 0 \leq x \leq 1000 \\ 1{,}32x - 1600 & \text{se } 1000 < x \leq 2000 \\ 1{,}12x - 1600 & \text{se } 2000 < x \leq 3000 \end{cases}$$

Il vincolo di produzione è: $$0 \leq x \leq 3000$$

Il grafico della funzione $P(x)$ è in ***figura 4***. Osserviamo che in $x = 1000$ e in $x = 2000$ la funzione presenta delle discontinuità di prima specie, e che in tutti gli intervalli considerati la funzione è un tratto di retta crescente. Si ha profitto per una produzione superiore ai 1212 litri (valore approssimato ottenuto risolvendo l'equazione $1{,}32x - 1600 = 0$ calcolato sul secondo tratto di curva); il profitto è massimo in uno degli estremi destri degli intervalli di variabilità di x e poiché

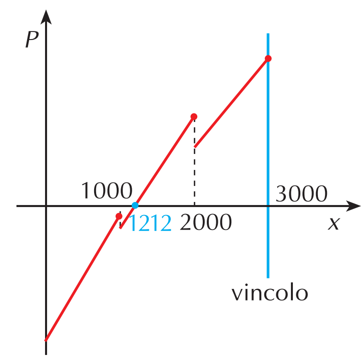
$P(1000) = -80$

$P(2000) = 1040$

$P(3000) = 1760$

si ha il massimo profitto per una produzione e vendita di 3000 litri.

Figura 4



2. Un'azienda commerciale è concessionaria esclusiva per la vendita di un determinato solvente chimico sul quale vengono pagate delle provvigioni che variano a seconda della quantità venduta secondo il seguente schema:

€ 6,20 per ogni unità venduta fino a un massimo di 5000hl

€ 7,40 per ogni unità venduta per quantità comprese fra 5000 e 8000hl

€ 8 per ogni unità venduta per quantità oltre gli 8000hl.

Le spese che l'azienda deve sostenere sono quantificabili in € 8000 fissi e spese variabili unitarie date dalla relazione $2 + 0{,}0003x$, dove x indica la quantità prodotta e venduta.
Vogliamo determinare qual è la quantità ottimale di vendita per ottenere il massimo profitto se si stima che non sia possibile vendere più di 12000hl.

Anche in questo caso dobbiamo massimizzare il profitto.

La funzione dei costi è: $C(x) = 8000 + (2 + 0{,}0003x)x = 0{,}0003x^2 + 2x + 8000$

La funzione ricavo è: $$R(x) = \begin{cases} 6{,}2x & \text{se } 0 \leq x \leq 5000 \\ 7{,}4x & \text{se } 5000 < x \leq 8000 \\ 8x & \text{se } 8000 < x \leq 12000 \end{cases}$$

La funzione obiettivo è $$P(x) = \begin{cases} -0{,}0003x^2 + 4{,}2x - 8000 & \text{se } 0 \leq x \leq 5000 \\ -0{,}0003x^2 + 5{,}4x - 8000 & \text{se } 5000 < x \leq 8000 \\ -0{,}0003x^2 + 6x - 8000 & \text{se } 8000 < x \leq 12000 \end{cases}$$

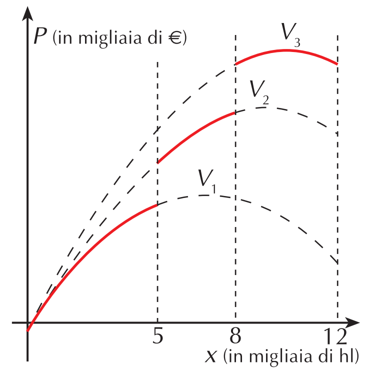
Vincolo: $$0 \leq x \leq 12000$$

La funzione P è rappresentata graficamente da tre archi di parabola di vertici rispettivamente

$V_1 = (7000, 6700) \qquad V_2 = (9000, 16300) \qquad V_3 = (10000, 22000)$

Osserviamo che in $x = 5000$ e $x = 8000$ la funzione presenta dei punti di discontinuità di prima specie (in ***figura 5*** la funzione è quella rappresentata in rosso). Il massimo profitto si avrà dunque nel vertice della terza parabola, in corrispondenza di una vendita di 10000hl; il profitto massimo corrispondente è di € 22000.

Figura 5



2.2 Il caso discreto

In molte situazioni la variabile d'azione x può assumere solo valori interi; per esempio x può rappresentare il numero di scatole di cioccolatini prodotte da un'industria dolciaria o il numero di magliette prodotte da un'azienda di confezioni. In questi casi ci si comporta in modo diverso a seconda della quantità di dati a disposizione.

Dati poco numerosi

Se i dati a cui fare riferimento sono poco numerosi, possiamo fare una analisi diretta calcolando il valore della funzione obiettivo per ognuno di essi e confrontando i risultati ottenuti. Osserva il seguente esempio.

Una azienda deve lanciare un nuovo prodotto sul mercato e decide di affidare la campagna pubblicitaria a degli spot televisivi che vadano in onda ogni giorno per 8 settimane consecutive. La società televisiva presenta il preventivo in cui sono previsti € 40 000 di spese fisse cui vanno aggiunti:

- € 600 per ogni spot trasmesso durante la giornata fino ad un massimo di 3 spot giornalieri
- € 500 per ogni spot trasmesso in giornata se questi variano fra 4 e 6.

L'azienda prevede che durante queste 8 settimane il ricavo ottenuto dalla vendita del prodotto in seguito alla pubblicità varierà secondo la seguente tabella

numero spot giornalieri	1	2	3	4	5	6
ricavo in migliaia di euro	70	100	180	240	250	260

Cerchiamo di capire qual è la frequenza degli spot che darà il massimo profitto all'azienda.

Stabiliamo innanzi tutto i costi che l'azienda deve sostenere nei vari casi:

- per 1 spot al giorno abbiamo un costo di $40000 + 600 \cdot \underbrace{7}_{\text{gg. settimana}} \cdot \underbrace{8}_{\text{n. settimane}} = 73600\,(€)$
- per 2 spot al giorno il costo è $40000 + 1200 \cdot 7 \cdot 8 = 107200\,(€)$
- per 3 spot al giorno il costo è $40000 + 1800 \cdot 7 \cdot 8 = 140800\,(€)$
- per 4 spot al giorno il costo è $40000 + 2000 \cdot 7 \cdot 8 = 152000\,(€)$
- per 5 spot al giorno il costo è $40000 + 2500 \cdot 7 \cdot 8 = 180000\,(€)$
- per 6 spot al giorno il costo è $40000 + 3000 \cdot 7 \cdot 8 = 208000\,(€)$

Riassumiamo i dati relativi ai costi e ai ricavi in una tabella: la situazione di miglior resa della pubblicità si avrà in corrispondenza del massimo profitto.

numero spot giornalieri	ricavo (in migliaia di euro)	costo (in migliaia di euro)	profitto (in migliaia di euro)
1	70	73,6	−3,6
2	100	107,2	−7,2
3	180	140,8	39,2
4	240	152	**88**
5	250	180	70
6	260	208	52

Dall'esame della tabella possiamo affermare che l'azienda ottiene il massimo profitto se effettua 4 spot giornalieri per 8 settimane.

Dati numerosi

Quando i dati sono molti la procedura precedente risulta impraticabile; la cosa più conveniente è allora quella di considerare x come variabile continua ed approssimare il valore ottimale trovato all'intero immediatamente inferiore o successivo a seconda del criterio di ottimizzazione. Vediamo un esempio.

Una fabbrica di biciclette ha dei costi fissi mensili di € 150000 e sostiene un costo di € 120 per ogni bicicletta prodotta; il prodotto viene immesso sul mercato con un prezzo di vendita dato dalla relazione $p = 250 - 0{,}015x$ dove x indica la quantità prodotta. L'azienda, sfruttando al meglio i propri impianti ed il personale, riesce a produrre al massimo 5000 biciclette all'anno. Determiniamo la produzione ottimale di biciclette per avere il massimo profitto.

Determiniamo costi, ricavi e profitto in funzione di x, numero di biciclette prodotte:

Costi: $C(x) = 150000 + 120x$

Ricavo: $R(x) = (250 - 0{,}015x)x = -0{,}015x^2 + 250x$

Profitto: $P(x) = -0{,}015x^2 + 130x - 150000$

Dobbiamo dunque massimizzare la funzione P con i vincoli

$$\begin{cases} 0 < x \le 5000 \\ x \in N \end{cases}$$

Consideriamo la variabile x come se fosse reale e determiniamo il massimo di questa funzione.
Trattandosi di una parabola con concavità rivolta verso il basso il punto di massimo si trova nel vertice, cioè in $x = \dfrac{130}{0{,}03} \approx 4333{,}33$.

I valori interi più vicini alla soluzione sono $x = 4333$ e $x = 4334$; il profitto in tali punti è lo stesso, infatti

$$P(4333) = 131666{,}665 \qquad P(4334) = 131666{,}66$$

Si avrà quindi il massimo profitto producendo 4333 o 4334 biciclette.

2.3 La scelta tra più alternative

In un problema di RO a volte la scelta ottimale non è unica e si diversifica a seconda dei valori assunti dalla variabile d'azione; vediamo qualche esempio.

I esempio: un problema di massimo

Una banca pubblicizza tre forme di investimento di capitali. Nel primo caso (A) offre un rendimento netto del 6% all'anno diminuito di € 1 000 per le spese sostenute dalla banca per la gestione del capitale; nel secondo caso (B) offre una rendita netta del 4% all'anno diminuita di € 200 a forfait; nel terzo caso (C) garantisce una rendita netta del 2,5% all'anno senza spese aggiuntive. Determina, al variare del capitale investito la forma più conveniente fra quelle proposte, nell'arco di un anno.

Indichiamo con x il capitale da investire e, assumendo come unità di misura € 1000, calcoliamo gli interessi y che ciascuna delle tre forme produce.

- Investimento di tipo A: $y = 0{,}06x - 1$ (retta a)
- Investimento di tipo B: $y = 0{,}04x - 0{,}2$ (retta b)
- Investimento di tipo C: $y = 0{,}025x$ (retta c)

Le funzioni di rendimento ottenute sono lineari e rappresentano quindi rispettivamente le rette a, b, c della ***figura 6a***. Le ascisse dei punti di intersezione si trovano risolvendo i seguenti sistemi

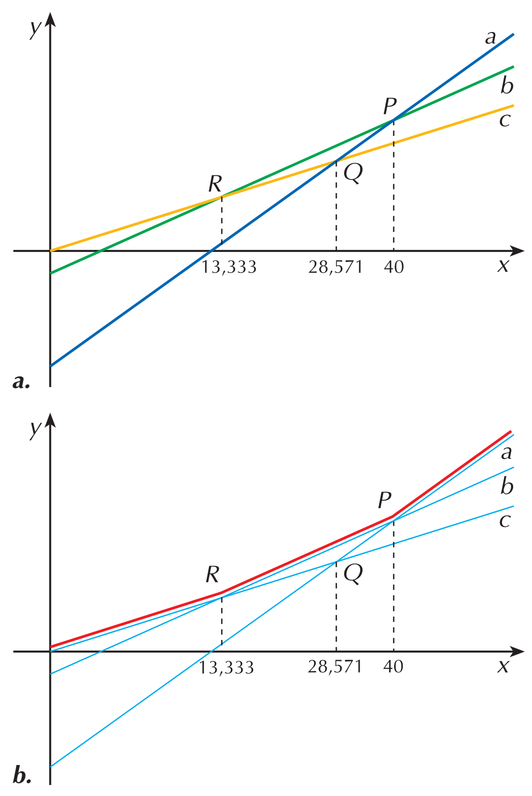
$$a \cap b \begin{cases} y = 0{,}06x - 1 \\ y = 0{,}04x - 0{,}2 \end{cases} \qquad x_P = 40$$

$$a \cap c \begin{cases} y = 0{,}06x - 1 \\ y = 0{,}025x \end{cases} \qquad x_Q = 28{,}571$$

$$b \cap c \begin{cases} y = 0{,}04x - 0{,}2 \\ y = 0{,}025x \end{cases} \qquad x_R = 13{,}333$$

L'investimento migliore è quello che, al variare di x, rende gli interessi più alti alla fine dell'anno, cioè quello che appartiene al tratto in colore rosso in ***figura 6b***.

Figura 6



Possiamo quindi dire che:

- se $0 \leq x < 13{,}333$ la scelta migliore è l'investimento C
- se $13{,}333 < x < 28{,}571$ la scelta migliore è l'investimento B
- se $x > 28{,}571$ la scelta migliore è l'investimento A
- Nel punto $x = 13{,}333$ la scelta può cadere indifferentemente su B o su C; nel punto $x = 28{,}571$ la scelta può cadere indifferentemente su A o su B.

Punti come R e P di questo esempio si dicono **punti di indifferenza**. Un punto di indifferenza si trova quindi in corrispondenza di un valore di x per cui la scelta può cadere indifferentemente su una o su un'altra possibilità.

II esempio: **un problema di minimo**

Un'azienda alimentare può inscatolare fino ad un massimo di 3q di mais ogni giorno in scatole da 500g ciascuna.
Per fare ciò può utilizzare tre cicli diversi che hanno gli stessi costi per unità di tempo e dei quali si sa che:

- il ciclo A impiega 10 secondi per preparare una scatola e ha tempi di preparazione iniziali di 1 ora;
- il ciclo B impiega 15 secondi per ogni scatola e la sua preparazione iniziale è di 30 minuti;
- il ciclo C impiega 20 secondi per ogni scatola ma ha tempi di preparazione di soli 15 minuti.

Quale ciclo conviene usare per avere il massimo rendimento?

Analizziamo il problema. Con 3q di mais a disposizione si possono produrre 600 scatole da 500g ciascuna; il massimo rendimento, visto che i tre cicli hanno lo stesso costo, si ha utilizzando il ciclo produttivo che richiede meno tempo. La variabile d'azione è quindi il numero x di scatole che si possono riempire e la funzione obiettivo è quella che esprime il tempo y di utilizzo di ciascun ciclo. Assumendo come unità di misura del tempo il minuto, si ha così che:

- per il ciclo A: $y = \frac{1}{6}x + 60$ (retta a)
- per il ciclo B: $y = \frac{1}{4}x + 30$ (retta b)
- per il ciclo C: $y = \frac{1}{3}x + 15$ (retta c)

Ogni funzione ha poi come vincolo il sistema $\begin{cases} 0 \le x \le 600 \\ x \in N \end{cases}$

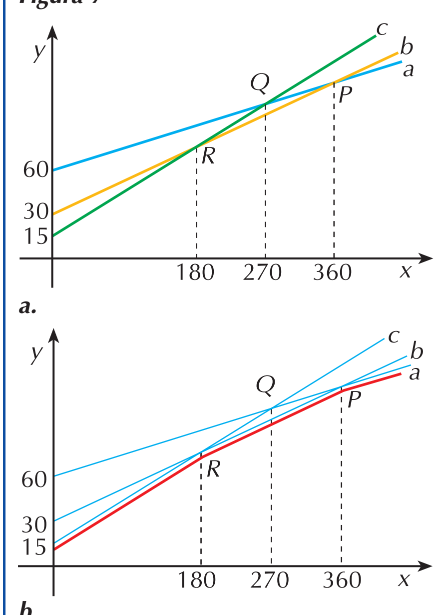


Figura 7

Determiniamo i punti di indifferenza (***figura 7a***):

$a \cap b \begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 60 \\ y = \frac{1}{4}x + 30 \end{cases}$ $P(360,120)$

$a \cap c \begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 60 \\ y = \frac{1}{3}x + 15 \end{cases}$ $Q(270,105)$

$b \cap c \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 30 \\ y = \frac{1}{3}x + 15 \end{cases}$ $R(180,75)$

La scelta più conveniente per l'azienda è quella che comporta un minor tempo di utilizzo della macchina (e quindi un minor costo). Dall'analisi del grafico deduciamo che (***figura 7b***):

- se $0 \leq x < 180$ i tempi minori sono quelli relativi alla retta c corrispondente al ciclo C;
- se $x = 180$ i tempi del ciclo C e del ciclo B sono uguali, quindi la scelta può cadere indifferentemente sull'uno o sull'altro;
- se $180 < x < 360$ i tempi minori sono quelli relativi alla retta b corrispondente al ciclo B;
- se $x = 360$ i tempi dei cicli A e B sono uguali, quindi la scelta è indifferente;
- se $360 < x \leq 600$ i tempi minori sono relativi alla retta a, quindi la scelta dovrà cadere sul ciclo A.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La produzione di un bene prevede dei costi definiti dalla funzione $C = 100x + 20000$ e dei ricavi definiti dalla funzione $R = -5x^2 + 750x$, dove x è la quantità di bene prodotta e venduta. Per quali valori di x si ha un guadagno?

a. $x > 80$ **b.** $50 < x < 80$ **c.** $x > 50$ **d.** $x < 80$

2. Un'azienda di trasporto merci offre ai suoi clienti tre diversi tipi di contratto per trasporti a pieno carico e per viaggi non superiori a 2000 km:

A: € 2 000 a forfait

B: € 2 al km

C: € 1 al km a cui bisogna aggiungere € 500 di spese fisse.

Dopo aver rappresentato graficamente la situazione, per ciascuna delle seguenti affermazioni barra vero o falso:

a. per un numero di km inferiore a 500 è più conveniente il contratto B V F
b. per un viaggio di 1000 km conviene il contratto B V F
c. per un viaggio di 1500 km è indifferente il contratto A oppure C V F
d. il contratto A non conviene mai. V F

3. PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

In molti problemi di scelta non vi è certezza dei risultati per diversi fattori: l'impossibilità di avere informazioni complete su un fenomeno, il verificarsi di eventi imprevedibili, l'ingresso sul mercato di prodotti concorrenziali, il cambiamento della situazione politica di un Paese, possibili crisi economiche su vasta scala e così via.
In questi casi le variabili delle funzioni obiettivo sono aleatorie; ci si trova quindi in *condizioni di incertezza* e le scelte possono essere fatte solo in termini di probabilità. Per affrontare questo argomento è quindi necessario avere conoscenze sul calcolo delle probabilità e sulle variabili aleatorie che puoi trovare sul volume 4 del testo base.

3.1 Il criterio del valor medio

Supponiamo che una azienda possa produrre un certo bene con quattro pro-

cessi produttivi diversi, che indicheremo con A_1, A_2, A_3, A_4, e che la vendita di quel bene si possa fare a tre prezzi diversi; indicheremo con E_1, E_2, E_3 gli eventi che indicano la possibilità di vendere al primo, al secondo o al terzo prezzo; tali eventi sono naturalmente incompatibili uno con l'altro (se si vende ad un prezzo, non si può vendere ad un altro) e sono complementari (la vendita deve essere fatta ad uno dei prezzi indicati).
In dipendenza dal processo produttivo scelto e dal prezzo di vendita, l'azienda ha calcolato che potrà avere dei guadagni che, in migliaia di euro, sono indicati nella seguente tabella a doppia entrata.

		ALTERNATIVE			
		A_1	A_2	A_3	A_4
EVENTI	E_1	−50	0	50	10
	E_2	160	320	120	−100
	E_3	500	180	160	400

In essa leggiamo per esempio che con il processo produttivo A_1, al verificarsi dell'evento E_1, si avrebbe una perdita di € 50 000; con il processo produttivo A_3, al verificarsi dell'evento E_2, si avrebbe un guadagno di € 120 000 e così via. Vediamo allora come si può procedere per fare una scelta ragionata.

Supponiamo che, attraverso indagini di mercato, si sia riusciti a determinare la probabilità di riuscire a vendere ad uno dei prezzi fissati, sia cioè nota la probabilità di ciascuno degli eventi E_i.
Aggiungiamo alla tabella precedente una colonna che riporti tali probabilità; trattandosi di eventi complementari ed incompatibili la somma delle tre probabilità deve essere ovviamente 1.

		ALTERNATIVE				
		A_1	A_2	A_3	A_4	Probabilità
EVENTI	E_1	−50	0	50	10	0,4
	E_2	160	320	120	−100	0,3
	E_3	500	180	160	400	0,3

Ciascuna alternativa può essere vista come una variabile casuale che assume i valori indicati dal corrispondente guadagno (positivo o negativo). Così, ad esempio, la variabile aleatoria A_1 può assumere il valore −50 con probabilità 0,4, il valore 160 con probabilità 0,3, il valore 500 con probabilità 0,3; analogamente per le altre variabili aleatorie.
Un criterio di scelta può allora essere basato sul comportamento medio di ciascuna variabile, vale a dire che, una volta calcolati i guadagni medi di ciascuna alternativa, sceglieremo quella che ha ottenuto il guadagno medio più alto.

Tenendo presente che $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$, nel nostro caso abbiamo dunque:

alternativa A_1: $M(A_1) = -50 \cdot 0{,}4 + 160 \cdot 0{,}3 + 500 \cdot 0{,}3 = 178$

alternativa A_2: $M(A_2) = 0 \cdot 0{,}4 + 320 \cdot 0{,}3 + 180 \cdot 0{,}3 = 150$

alternativa A_3: $\quad M(A_3) = 50 \cdot 0{,}4 + 120 \cdot 0{,}3 + 160 \cdot 0{,}3 = 104$

alternativa A_4: $\quad M(A_3) = 10 \cdot 0{,}4 - 100 \cdot 0{,}3 + 400 \cdot 0{,}3 = 94$

Il guadagno atteso ha il suo massimo con l'alternativa A_1, sarà dunque su questo processo produttivo che cadrà la nostra scelta.

Generalizziamo quanto visto attraverso l'esempio.

In un problema di scelta fra più alternative in condizione di incertezza possiamo individuare:

- un certo numero m di eventi aleatori E_i, indipendenti e complementari, ciascuno avente probabilità p_i, in modo che $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$;
- un certo numero n di alternative A_j fra cui effettuare le scelte;
- $n \times m$ risultati R_{ij} che derivano dall'alternativa A_j in dipendenza dell'evento E_i.

I risultati R_{ij}, che sono i valori della funzione obiettivo che si vuole massimizzare o minimizzare, possono essere rappresentati in una tabella a doppia entrata, alla quale di solito si affianca una colonna con le probabilità degli eventi E_i

		ALTERNATIVE						
		A_1	A_2		A_j		A_n	Probabilità
EVENTI	E_1	R_{11}	R_{12}		R_{1j}		R_{1n}	p_1
	E_2	R_{21}	R_{22}		R_{2j}		R_{2n}	p_2
	E_i	R_{i1}	R_{i2}		R_{ij}		R_{in}	p_i
	E_m	R_{m1}	R_{m2}		R_{mj}		R_{mn}	p_m

A tale tabella si dà il nome di **tabella dei risultati** o, in terminologia anglosassone, **Playoff table**.
I valori di probabilità p_i possono essere determinati con indagini di tipo statistico o mediante valutazioni soggettive basate sul grado di fiducia che si ripone nell'evento E_i.
In questo modello, le alternative A_j assumono la funzione di variabili aleatorie i cui valori, con le rispettive probabilità, sono quelli della colonna A_j della tabella dei risultati.

Un criterio di scelta che ben si adatta a questo modello è il **criterio del valor medio**. Esso consiste nel calcolare il valore atteso M di ciascuna variabile aleatoria A_j :

$$M(A_j) = \sum_{i=1}^{n} R_{ij} p_i$$

e nello scegliere, a seconda dei casi, il massimo o il minimo dei valori attesi ottenuti.

ESEMPI

1. Per produrre un certo articolo una azienda può scegliere fra tre diversi processi produttivi, che indichiamo con A, B, C, per i quali si è stimata la seguente funzione di profitto, in euro, in dipendenza dalla quantità x prodotta e venduta giornalmente:

- per il processo A: $P_A = 0{,}2x - 300$
- per il processo B: $P_B = 0{,}18x - 200$
- per il processo C: $P_C = 0{,}19x - 250$

Le probabilità di vendita dell'articolo prodotto sono espresse dalla seguente tabella:

Quantità	1000	2000	3000	4000	5000
Probabilità	0,1	0,3	0,35	0,2	0,05

In base a queste informazioni, qual è il processo produttivo più conveniente per l'azienda?

Il processo produttivo più conveniente è quello che consente di realizzare il massimo profitto, il quale dipende però dalla quantità venduta; gli eventi aleatori E_i sono quindi quelli che indicano le quantità vendute. Per costruire la tabella dei risultati, dobbiamo calcolare, per ogni processo produttivo, i profitti ottenuti dalle vendite di 1000, 2000, 3000, 4000 e 5000 unità di bene. Per il processo produttivo A abbiamo, in euro

$P_A(1000) = 0{,}2 \cdot 1000 - 300 = -100$

$P_A(2000) = 0{,}2 \cdot 2000 - 300 = 100$

$P_A(3000) = 0{,}2 \cdot 3000 - 300 = 300$

$P_A(4000) = 0{,}2 \cdot 4000 - 300 = 500$

$P_A(5000) = 0{,}2 \cdot 5000 - 300 = 700$

Il valore atteso del profitto per questo processo produttivo, tenendo conto dei valori di probabilità è dunque:

$$M(A) = -100 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}3 + 300 \cdot 0{,}35 + 500 \cdot 0{,}2 + 700 \cdot 0{,}05 = 260\,(€)$$

Analogamente per gli altri processi produttivi. La tabella dei risultati, con l'indicazione nell'ultima riga dei valori attesi, è dunque la seguente (q indica la quantità venduta):

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1 $q = 1000$	−100	−20	−60	0,1
	E_2 $q = 2000$	100	160	130	0,3
	E_3 $q = 3000$	300	340	320	0,35
	E_4 $q = 4000$	500	520	510	0,2
	E_5 $q = 5000$	700	700	700	0,05
	M	260	304	282	

Poiché il maggior valor medio si ha per il procedimento produttivo B, sarà questo da scegliere per avere il massimo guadagno.

3.2 Scelte che tengono conto del rischio

La soglia del rischio

Se è vero che il criterio del valor medio ci aiuta a fare delle scelte, è anche vero che tale metodo non tiene conto della variabilità dei valori assunti dalla funzione obiettivo; se poi teniamo presente che spesso le valutazioni delle probabilità sono soggettive, ci accorgiamo che non sempre un criterio di scelta basato sulla massimizzazione (o minimizzazione) del valor medio della funzione obiettivo può essere sufficiente.
Supponiamo, ad esempio, che i valori dei profitti risultanti dall'investimento di un capitale in dipendenza di due eventi siano quelli riportati nella seguente tabella (in migliaia di euro)

		ALTERNATIVE		
		A	*B*	Probabilità
EVENTI	E_1	-200	60	0,2
	E_2	300	235	0,8

Calcoliamo il valor medio di ogni alternativa:

$M(A) = -200 \cdot 0{,}2 + 300 \cdot 0{,}8 = 200$

$M(B) = 60 \cdot 0{,}2 + 235 \cdot 0{,}8 = 200$

Poiché $M(A) = M(B)$, le due alternative sono indifferenti ed è quindi la stessa cosa, dal punto di vista del profitto medio atteso, scegliere una o scegliere l'altra.
Se però le guardiamo sotto un altro punto di vista, quello del rischio che si corre investendo in A o in B, le cose non stanno più così: con la forma di investimento A possiamo guadagnare molto se si verifica l'evento E_2, ma possiamo anche perdere molto se si verifica l'evento E_1; con la forma di investimento B non arriviamo ai guadagni che potremmo avere in A, ma non perdiamo mai del denaro. In questo caso è dunque la nostra propensione al rischio che ci fa scegliere.
Un caso come questo si presenta frequentemente quando si deve scegliere in che modo investire un capitale; alcuni Fondi di investimento proposti dalle banche sono più "a rischio" di altri, perché una percentuale elevata del capitale viene investito in forme che possono dare grandi guadagni ma anche grandi perdite (ad esempio gli investimenti in titoli azionari); altri Fondi sono considerati meno "a rischio" perché, pur avendo una quota del capitale investito in azioni, la maggior parte di esso rimane impegnato in forme più tranquille come Titoli di Stato, obbligazioni e così via.

Dobbiamo quindi affrontare il problema della valutazione del rischio: come è possibile determinare una misura del rischio che si corre facendo una scelta piuttosto che un'altra?
Possiamo sicuramente dire che **un'alternativa è più rischiosa di un'altra se nella prima vi è maggior variabilità fra i dati**; allora, poiché il grado di variabilità di una distribuzione di probabilità è misurato dallo scarto quadratico medio σ, dovremo calcolare lo scarto quadratico medio di ogni alternativa: un valore di σ elevato indica grande variabilità e quindi maggior rischio.

Se consideriamo il modello generale di un problema di scelta in condizioni di incertezza visto nel paragrafo precedente, lo scarto quadratico medio di ogni alternativa A_j è dato da

$$\boxed{\sigma(A_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[R_{ij} - M(A_j)\right]^2 \cdot p_i}}$$

Tornando all'esempio iniziale, calcoliamo i valori di σ delle due forme di investimento

$$\sigma(A) = \sqrt{(-200 - 200)^2 \cdot 0{,}2 + (300 - 200)^2 \cdot 0{,}8} = 200$$

$$\sigma(B) = \sqrt{(60 - 200)^2 \cdot 0{,}2 + (235 - 200)^2 \cdot 0{,}8} = 70$$

La seconda alternativa ha una variabilità minore rispetto alla prima, quindi un grado di rischio minore; ciò conferma le nostre valutazioni iniziali.

Se abbiamo imparato a valutare il rischio, non abbiamo però ancora dato una risposta precisa alla domanda iniziale: come scegliere tenendo conto di quest'ultimo?
È evidente che ogni persona ha una sua propensione al rischio e la scelta, dopo aver analizzato la situazione, è quindi soggettiva. Quello che si può fare è allora fissare una soglia che rappresenti il rischio massimo sopportabile da un individuo (tale soglia può essere diversa quindi da soggetto a soggetto) oltre la quale scartare le alternative; di solito si sceglie una frazione del valor medio.

LA MISURA DEL RISCHIO

Indicato con **grm**$(\boldsymbol{A_j})$ il **grado di rischio massimo** dell'alternativa A_j, si ha che

$$\text{grm}(A_j) = \frac{M(A_j)}{k} \qquad \text{con} \qquad k \in N_0$$

Il valore di k viene evidentemente scelto dal soggetto che sta facendo la valutazione. Una scelta di valori piccoli per k indica grande propensione al rischio (per $k = 1$ si ha il grado di rischio massimo); tale propensione diminuisce al crescere di k e quindi grandi valori di k indicano valutazioni di prudenza.
Una volta fissato il valore di k e calcolato il corrispondente grm per ogni alternativa A_j, per fare una scelta basta a questo punto confrontare il grado di rischio di ogni alternativa con il corrispondente grm; se

- $\sigma(A_j) < \text{grm}(A_j)$ l'alternativa A_j può essere ritenuta accettabile dal soggetto
- $\sigma(A_j) > \text{grm}(A_j)$ l'alternativa A_j deve essere scartata perché troppo rischiosa.

Vediamo un esempio di applicazione di questo criterio.
Ad un piccolo risparmiatore, la cui propensione al rischio può ritenersi pari ad $\frac{1}{4}$ del valor medio di ogni alternativa, vengono proposte due forme di investimento dei capitali dalle quali si possono avere i profitti (in migliaia di euro) indicati nella seguente tabella dei risultati.

		ALTERNATIVE		
		A	*B*	Probabilità
EVENTI	E_1	5	3	0,4
	E_2	7	9	0,6

Determiniano l'alternativa più indicata per il risparmiatore.

Calcoliamo il valor medio delle due alternative:

$$M(A) = 6{,}2 \qquad M(B) = 6{,}6$$

Se non tenessimo conto del fattore rischio, la scelta sarebbe già fatta: l'alternativa più conveniente è quella che dà il profitto medio più elevato e quindi l'alternativa *B*.
Vediamo che cosa accade tenendo presente il grado di rischio massimo di questo risparmiatore; calcoliamo gli scarti quadratici medi di ogni alternativa:

$$\sigma(A) = \sqrt{(5-6{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (7-6{,}2)^2 \cdot 0{,}6} = 0{,}98$$

$$\sigma(B) = \sqrt{(3-6{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (9-6{,}6)^2 \cdot 0{,}6} = 2{,}94$$

Posto $k = 4$, il grado di rischio massimo per l'alternativa *A* è $\text{grm}(A) = \dfrac{6{,}2}{4} = 1{,}55$, quello per l'alternativa *B* è $\text{grm}(B) = \dfrac{6{,}6}{4} = 1{,}65$.

Confrontiamo i valori trovati riassumendoli in una tabella:

	ALTERNATIVE	
	A	*B*
M	6,2	6,6
σ	0,98	2,94
$\text{grm} = \dfrac{M}{4}$	1,55	1,65

Ci accorgiamo subito che il rischio dell'alternativa *B* (che è 2,94) è maggiore del grado di rischio sopportabile dal risparmiatore (che è 1,65), mentre il rischio dell'alternativa *A* (che è 0,98) è minore del grado di rischio massimo (che è 1,55); se teniamo conto del rischio, il risultato precedente è ribaltato e dobbiamo concludere che il risparmiatore sceglierà l'alternativa *A* perché, pur facendogli guadagnare di meno, è meno rischiosa.

Il criterio del pessimista e quello dell'ottimista

Un altro modo di procedere per scegliere fra più alternative in condizioni di incertezza è quello che prende il nome di **criterio del pessimista**; esso si applica in questo modo.

- Quando si hanno più possibilità di scelta e siamo di fonte ad un problema di massimo:
  - si individua il valore più basso della funzione di utilità per ogni alternativa (il minimo di ogni colonna della tabella dei risultati);
  - si trova il massimo dei valori individuati;
  - si sceglie come alternativa quella cui appartiene il massimo dei minimi.

  Per come avviene la scelta questo criterio si dice anche **criterio del maximin**.

- Se invece siamo in presenza di un problema di minimo:
  - si individua il valore più alto della funzione di utilità per ogni alternativa (il massimo di ogni colonna della tabella dei risultati);
  - si trova il minimo dei valori individuati;
  - si sceglie come alternativa quella cui appartiene il minimo dei massimi.

  Per come avviene la scelta questo criterio si dice anche **criterio del minimax**.

Il nome di "criterio del pessimista" dato a questo metodo deriva dal fatto che si sceglie sempre la migliore fra le situazioni peggiori che possono capitare. Come avrai senz'altro notato, questo criterio prescinde dai valori di probabilità degli eventi E_i.

Criterio opposto a questo è quello dell'**ottimista** che consiste nello scegliere la migliore fra le migliori situazioni; quindi:

- in presenza di un problema di massimo si sceglieranno i valori più alti di ogni alternativa e quindi l'alternativa che comporta il valore massimo fra questi (criterio del **maximax**);

- in presenza di un problema di minimo si sceglieranno i valori più bassi di ogni alternativa e quindi l'alternativa che comporta il valore minimo fra questi (criterio del **minimin**).

Ad esempio, se un **problema di massimizzazione** dei risultati avesse la seguente tabella

		ALTERNATIVE				
		A	*B*	*C*	*D*	*E*
EVENTI	E_1	10	−20	15	8	−2
	E_2	−1	30	10	20	16
	E_3	5	40	−5	30	10

- con il criterio del pessimista si procederebbe in questo modo:

  situazione peggiore $A: -1$ $B: -20$ $C: -5$ $\boldsymbol{D: 8}$ $E: -2$

  scelta D perché la meno peggio delle situazioni.

- con il criterio dell'ottimista si procederebbe in questo modo:

  situazione migliore $A : 10$ **$B : 40$** $C : 15$ $D : 30$ $E : 16$

  scelta B perché è la migliore fra le situazioni migliori.

Se un **problema di minimizzazione** dei risultati avesse la seguente tabella

		ALTERNATIVE			
		A	*B*	*C*	*D*
EVENTI	E_1	10	5	8	15
	E_2	18	7	6	10
	E_3	9	12	11	7

- con il criterio del pessimista si procederebbe in questo modo:

  situazione peggiore $A : 18$ $B : 12$ **$C : 11$** $D : 15$

  scelta C perché è la meno peggio delle situazioni.

- con il criterio dell'ottimista si procederebbe in questo modo:

  situazione migliore $A : 9$ **$B : 5$** $C : 6$ $D : 7$

  scelta B perché è la migliore fra le situazioni migliori.

3.3 Un esempio conclusivo

Vediamo di riassumere le cose che abbiamo imparato finora attraverso un esempio.
Una azienda produce un certo articolo che immette sul mercato al prezzo di € 2. Per la sua fabbricazione può scegliere tra due diversi processi produttivi che hanno la stessa resa ma costi diversi:

- processo A: costo unitario di € 1 più costi fissi di € 1000
- processo B: costo unitario di € 0,80 più un costo pari, in euro, allo 0,04% del quadrato degli articoli prodotti.

La quantità venduta è stimata in base alla seguente tabella.

Articoli venduti	500	1000	1500	2000	2500
Probabilità	0,10	0,15	0,20	0,30	0,25

Esaminiamo quale processo produttivo scegliere in base:

- al criterio del valor medio;
- all'introduzione di un rischio pari alla quarta parte del valor medio;
- al criterio del pessimista;
- al criterio dell'ottimista.

Per entrambi i processi produttivi il ricavo è $R(x) = 2x$ dove x indica la quantità prodotta e venduta

Per il processo produttivo A il profitto è $P_A(x) = 2x - x - 1\,000 = x - 1\,000$

Per il processo produttivo B il profitto è $P_B(x) = 2x - 0{,}80x - 0{,}0004x^2 = 1{,}20x - 0{,}0004x^2$

Le alternative fra cui scegliere sono i due processi produttivi, gli eventi sono le vendite possibili e la funzione obiettivo è il profitto. Scriviamo la tabella dei risultati (in euro) e aggiungiamo le righe con i valori medi del profitto di ogni alternativa, gli scarti quadratici medi e i coefficienti di massimo rischio

		ALTERNATIVE		
		A	B	Probabilità
EVENTI	E_1 500	−500	500	0,1
	E_2 1 000	0	800	0,15
	E_3 1 500	500	900	0,20
	E_4 2000	1 000	800	0,30
	E_5 2 500	1 500	500	0,25
	M	725	715	
	σ	641,77488	162,09565	
	$\text{grm} = \dfrac{M}{4}$	181,25	178,75	

- Se la scelta si deve basare sul criterio del valor medio, l'alternativa più conveniente è la A che comporta un guadagno atteso maggiore.
- Se dobbiamo tenere conto del fattore rischio con un grado massimo pari a $\frac{1}{4}$ del valore medio, l'alternativa migliore è la B.
- In base al criterio del pessimista l'alternativa migliore è la B.
- In base al criterio dell'ottimista l'alternativa migliore è la A.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La tabella dei risultati relativa a tre alternative di guadagno (in migliaia di euro) in dipendenza da quattro eventi aleatori incompatibili e complementari è la seguente

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1	2	0	10	0,15
	E_2	0	14	8	0,30
	E_3	16	6	6	0,35
	E_4	6	5	2	0,20

Completa le seguenti richieste:

a. il valore medio dell'alternativa A è ....

b. il valore medio dell'alternativa B è ....

c. il valore medio dell'alternativa C è ....

d. l'alternativa più conveniente è ....

2. Riferendoti al problema precedente, se il rischio massimo tollerabile è $\frac{2}{3}$ del valor medio, qual è la scelta ottimale?

4. LA PROGRAMMAZIONE LINEARE: IL MODELLO DEL PROBLEMA

Il modello matematico di un problema di RO è costituito da una funzione da ottimizzare, la *funzione obiettivo*, e da un insieme di *vincoli*, espressi da equazioni e/o disequazioni, tutti indipendenti tra loro. Se la funzione obiettivo e il sistema dei vincoli sono relazioni di tipo lineare, si parla di **programmazione lineare** (nel seguito abbreviata in PL).
Il modello matematico di un problema di PL è dunque il seguente:

funzione obiettivo $\quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots\dots + c_n x_n$

sistema dei vincoli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\dots\dots\dots,n \end{cases}$$

vincoli tecnici

vincoli di segno

dove i simboli di disuguaglianza delle relazioni dei vincoli, che abbiamo indicato sempre con " $\le$ ", possono anche essere dei simboli di " $\ge$ " oppure di " $=$ " e dove i coefficienti delle relazioni sono numeri reali. Vedremo più avanti che, con opportuni accorgimenti, si possono comunque sempre scrivere delle relazioni di uguaglianza.
In tale modello:

- le variabili x_i sono le variabili d'azione
- gli n coefficienti c_i si dicono **coefficienti economici** o **prezzi**;
- i coefficienti a_{ki} delle m relazioni vincolari nelle n variabili x_i (k varia fra 1 e m, i varia fra 1 e n) si dicono **coefficienti tecnologici**;
- i termini noti b_k delle relazioni vincolari si dicono **richieste**.

Nei paragrafi che seguono studieremo dei metodi che ci permettano di risolvere questo tipo di problemi, con particolare riguardo a quelli in due sole variabili o ad essi riconducibili utilizzando il metodo grafico.

5. LE DISEQUAZIONI LINEARI IN DUE VARIABILI

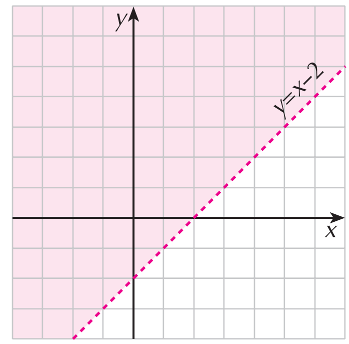
Prima di affrontare le tematiche individuate dobbiamo ricordare come si risolvono le disequazioni lineari in due variabili.
Vediamo subito alcuni esempi.

I esempio: risolviamo la disequazione $y - x + 2 > 0$

Esplicitiamo innanzi tutto la relazione rispetto alla variabile y: $\quad y > x - 2$
L'insieme delle soluzioni di questa disequazione è costituito dalle coppie (x, y) che appartengono a uno dei due semipiani delimitati dalla retta $y = x - 2$ (***figura 8***).
In questo caso, poiché l'ordinata di tali punti deve essere maggiore di quella dei corrispondenti punti sulla retta, l'insieme delle soluzioni è costituita dal semipiano superiore, esclusi i punti della retta (per questo motivo nella figura la retta è tratteggiata).
Per controllare la correttezza della risposta, puoi verificare se un punto del semipiano delle soluzioni soddisfa la disequazione; nel nostro caso, se scegliamo l'origine:

$0 - 0 + 2 > 0$ è vero, quindi il semipiano scelto è quello giusto.

Figura 8



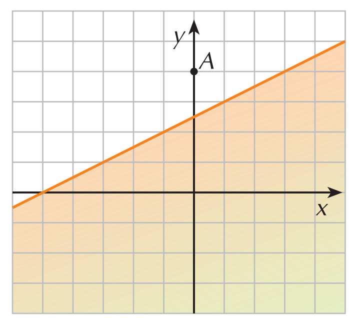
II esempio: risolviamo la disequazione $x - 2y + 5 \geq 0$

Riscriviamo la disequazione esplicitando rispetto a y: $\quad y \leq \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

La retta associata alla disequazione ha equazione: $\quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Le soluzioni della disequazione sono i punti del semipiano che, a parità di ascissa, hanno una ordinata minore o anche uguale a quella dei punti sulla retta; esse sono dunque rappresentate dai punti del semipiano in colore di ***figura 9***, compresi i punti della retta.

Figura 9



III esempio: risolviamo il sistema di disequazioni $\begin{cases} x - 2y + 6 > 0 \\ 3x + y - 5 \leq 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$

Riscriviamo il sistema esplicitando ciascuna disequazione rispetto a y

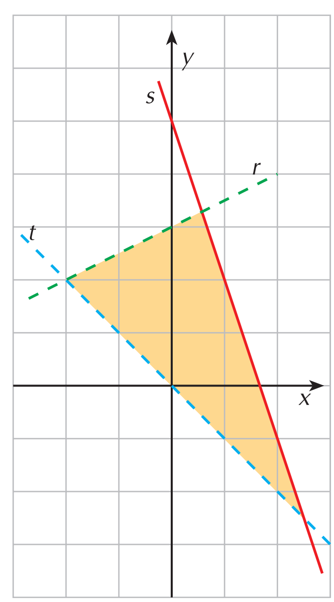
$$\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 3 \\ y \leq -3x + 5 \\ y > -x \end{cases}$$

Rappresentiamo nel piano cartesiano le tre rette di equazioni

$r: y = \frac{1}{2}x + 3 \qquad s: y = -3x + 5 \qquad t: y = -x$

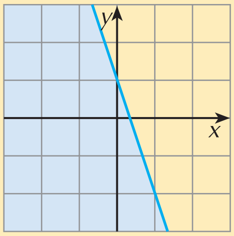
La soluzione del sistema è rappresentata dall'intersezione dei tre semipiani soluzioni di ciascuna disequazione (***figura 10***); osserviamo che, mentre non fanno parte dell'insieme delle soluzioni i punti delle rette r e t, ne fanno parte invece quelli del segmento della retta s.

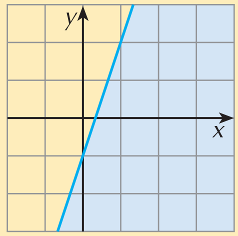
Figura 10

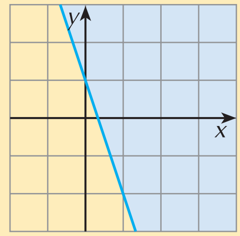


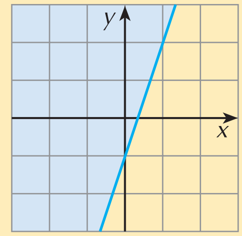
VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Indica quale dei seguenti grafici rappresenta la soluzione grafica della disequazione $y + 3x - 1 > 0$:

a.


b.


c.


d.


6. Programmazione lineare: il metodo grafico

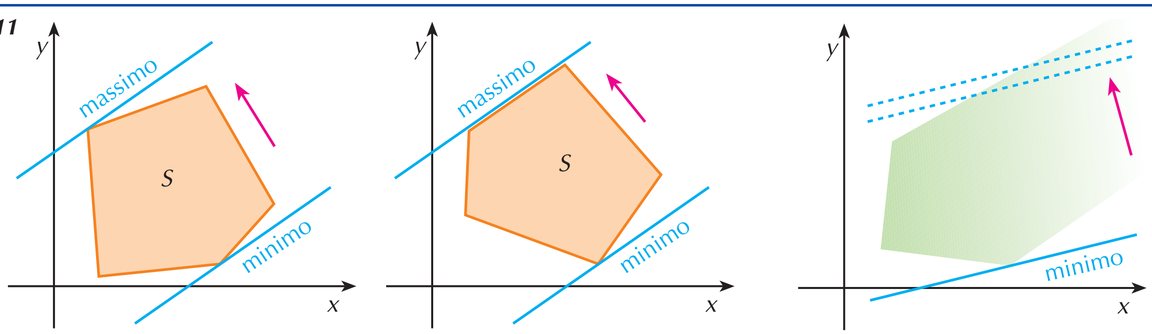
6.1 Problemi in due variabili

In un problema di PL in due variabili il sistema dei vincoli definisce in genere una regione del piano cartesiano che prende il nome di **regione ammissibile**; essa rappresenta l'insieme dei punti tra i quali cercare la soluzione.
La soluzione è l'insieme dei valori delle variabili che ottimizzano la funzione obiettivo, cioè dove essa assume il suo valore massimo o il suo valore minimo a seconda del problema. Poiché si tratta di una funzione di due variabili, i punti di massimo e di minimo si possono trovare con le linee di livello che, essendo la funzione lineare, sono rappresentare da un fascio di rette parallele.
Per esempio, se la funzione obiettivo è $z = 3x + 2y$, le linee di livello sono le rette $3x + 2y = k$.
Quando un fascio di rette parallele interseca una regione S del piano cartesiano (***figura 11a***), il valore minimo, se esiste, si trova in corrispondenza della prima retta del fascio che interseca S, il valore massimo in corrispondenza dell'ultima retta che la interseca
Di conseguenza, possiamo affermare che:

> se la regione ammissibile S è chiusa e limitata ed è un poligono, la soluzione ottimale di un problema di PL in due variabili si trova in corrispondenza di uno dei vertici di S (oppure in tutti i punti di un suo lato).

Se la regione ammissibile non è chiusa potrebbe non esserci il punto di massimo o di minimo (***figura 11b***) e si dovrà valutare l'esistenza della soluzione ottimale usando le linee di livello (vedi l'esempio 2 successivo).

Figura 11



a. esistono il minimo e il massimo ***b.*** esiste il minimo, non esiste il massimo

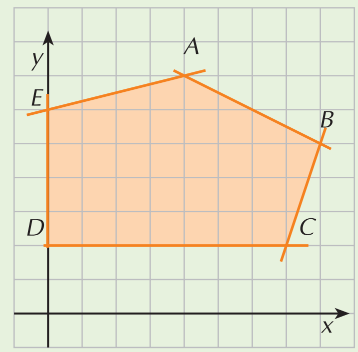
ESEMPI

Determiniamo i punti di massimo e di minimo assoluti delle seguenti funzioni con i vincoli indicati.

1. $z = x + 4y$ con i vincoli $\begin{cases} 4y - x \leq 24 \\ 2y + x \leq 18 \\ 5x - 2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 2 \end{cases}$

La regione ammissibile è costituita dei punti del poligono in ***figura 12*** che ha vertici nei punti $A(4, 7)$, $B(8, 5)$, $C\left(\frac{34}{5}, 2\right)$, $D(0, 2)$, $E(0, 6)$ (i vertici si ottengono intersecando a due a due le rette della frontiera).

Figura 12



Poiché la regione ammissibile è chiusa e limitata, i punti di massimo e di minimo assoluti si trovano in uno dei vertici; calcoliamo il valore della funzione f in tali punti:

$z(A) = 4 + 4 \cdot 7 = 32$

$z(B) = 8 + 4 \cdot 5 = 28$

$z(C) = \frac{34}{5} + 4 \cdot 2 = \frac{74}{5} = 14{,}8$

$z(D) = 0 + 4 \cdot 2 = 8$

$z(E) = 0 + 4 \cdot 6 = 24$

Il minimo assoluto si trova quindi nel punto D e vale 8 ed il massimo assoluto nel punto A e vale 32.

2. $z = 3x + 5y + 1$ con i vincoli $\begin{cases} 2y - x \leq 8 \\ 3y \geq x - 3 \\ 3y + 4x \geq 12 \end{cases}$

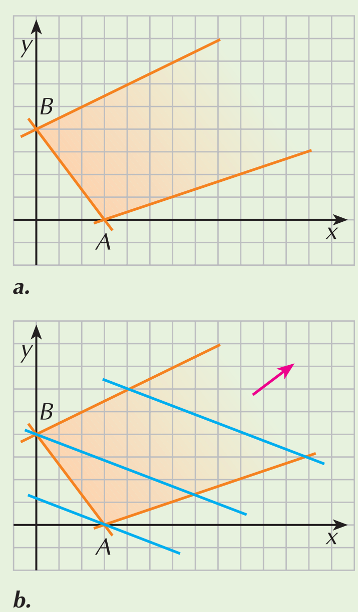
La regione ammissibile non è limitata e due suoi vertici sono i punti $A(3,0)$ e $B(0,4)$ (***figura 13a***).

Non possiamo in questo caso stabilire quali siano i punti di massimo e di minimo assoluti valutando la funzione nei vertici di tale regione; dobbiamo allora ricorrere alle linee di livello che, in questo caso hanno equazione

$$3x + 5y + 1 = k \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}k$$

Il fascio di rette da essa rappresentato ha la direzione indicata dalla freccia in ***figura 13b*** e, dalla sua osservazione, deduciamo che la funzione ha un punto di minimo assoluto in A, il cui valore è $z(A) = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 1 = 10$, ma non ha massimo assoluto.

Figura 13



3. Un'azienda produce due tipi di beni, che indicheremo con A e B, utilizzando due materie prime, che indicheremo con R e S. Si sa che per produrre una unità del bene A occorrono 3kg di R e 9kg di S, mentre per produrre una unità del bene B occorrono 5kg di R e 5kg di S; si sa inoltre che la disponibilità giornaliera della risorsa R è di 1500kg, mentre quella di S è di 2700kg. Il bene A viene rivenduto con un guadagno netto di € 12 per ogni unità, mentre il bene B con un guadagno netto di € 8 per ogni unità. Ci chiediamo quale dovrà essere la produzione giornaliera per avere il massimo guadagno, supponendo che ogni unità prodotta venga venduta.

Se indichiamo con x_1 la quantità di bene A e con x_2 la quantità di bene B da produrre giornalmente, si tratta di trovare il massimo della funzione profitto

$$z = 12x_1 + 8x_2$$

Per individuare il sistema di vincoli, conviene organizzare i dati del problema nella tabella che segue

beni / m. prime	A	B	Disp.
R	3	5	1500
S	9	5	2700

Il sistema dei vincoli è dunque il seguente:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 1500 & \text{la quantità di risorsa } R \text{ utilizzata non può superare } 1500 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 2700 & \text{la quantità di risorsa } S \text{ utilizzata non può superare } 2700 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \text{vincoli di segno} \end{cases}$$

Poiché sia la funzione, sia i vincoli sono lineari, costruiamo la regione ammissibile e valutiamo la funzione obiettivo nei suoi vertici:

- la regione ammissibile è il poligono rappresentato in ***figura 14***;
- i vertici di tale poligono sono i punti $O(0,0)$, $P(300,0)$, $Q(200,180)$, $T(0,300)$;
- la funzione obiettivo assume in tali punti i seguenti valori:

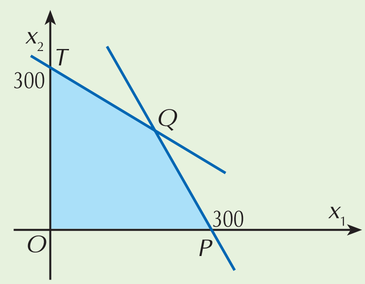
  $z(O) = 0$

  $z(P) = 12 \cdot 300 + 5 \cdot 0 = 3600$

  $z(Q) = 12 \cdot 200 + 8 \cdot 180 = 3840$

  $z(T) = 12 \cdot 0 + 8 \cdot 300 = 2400$

Figura 14



Il massimo si ha quindi in corrispondenza del punto Q, cioè producendo e vendendo 200 unità del bene A e 180 unità del bene B.

6.2 Problemi riconducibili a due variabili

Un'industria cosmetica vuole realizzare una nuova crema mescolando tre tipi di creme che già produce e che indicheremo con A, B, C; ciascuna crema contiene due principi attivi, P_1 e P_2 nelle proporzioni indicate nella seguente tabella

	A	B	C
P_1	30%	15%	25%
P_2	20%	60%	40%

La nuova crema dovrà contenere non meno del 20% di P_1 e non meno del 30% di P_2. Se le creme A, B, C costano rispettivamente € 0,08, € 0,05 e € 0,06 al grammo, quale dovrà essere la composizione della nuova crema per avere il minimo costo?

Se indichiamo con x_1, x_2, x_3 le quantità delle tre creme che occorreranno per fare 1g di quella nuova, si ha che $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

La funzione obiettivo, da minimizzare, è $z = 0{,}08x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}06x_3$

Il sistema dei vincoli è
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 \geq 0{,}2 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 \geq 0{,}3 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

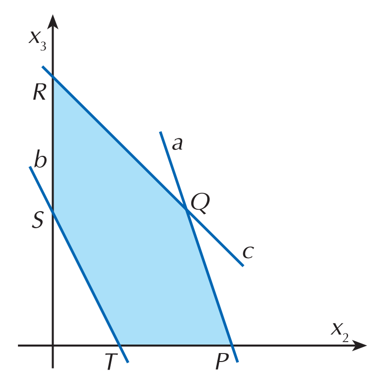
Si tratta di un problema in tre variabili in cui una delle relazioni vincolari è espressa tramite un'equazione. In casi come questo ci si può ricondurre ad un problema con un numero inferiore di variabili ricavando l'espressione di una di esse, ad esempio x_1, dall'equazione del sistema e sostituendola negli altri vincoli; poiché $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, così facendo si ottiene:

funzione obiettivo $\quad z = 0{,}08(1 - x_2 - x_3) + 0{,}05x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}08 - 0{,}03x_2 - 0{,}02x_3$

sistema dei vincoli
$$\begin{cases} 0{,}3(1 - x_2 - x_3) + 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 \geq 0{,}2 \\ 0{,}2(1 - x_2 - x_3) + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 \geq 0{,}3 \\ 1 - x_2 - x_3 \geq 0 \qquad \text{vincolo di segno per } x_1 \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

che semplificato diventa
$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 \leq 2 & (a) \\ 4x_2 + 2x_3 \geq 1 & (b) \\ x_2 + x_3 - 1 \leq 0 & (c) \\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Figura 15



Possiamo dunque ricorrere al metodo grafico per la risoluzione di questo problema. In ***figura 15*** puoi vedere la regione ammissibile i cui vertici sono i punti $P\left(\frac{2}{3},0\right)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $R(0,1)$, $S\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $T\left(\frac{1}{4},0\right)$.

Calcoliamo il valore della funzione nei vertici:

$z(P) = 0{,}06 \qquad z(Q) = 0{,}055 \qquad z(R) = 0{,}06 \qquad z(S) = 0{,}07 \qquad z(T) = 0{,}0725$

Il minimo si trova in corrispondenza del punto Q, vale a dire quando $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}5$ e quindi $x_1 = 1 - 0{,}5 - 0{,}5 = 0$; l'azienda, per avere il minimo costo di produzione per la nuova crema dovrà utilizzare 0,5g di crema B e 0,5g di crema C, non utilizzando la A.

Possiamo generalizzare quanto visto nell'esempio dicendo che:

quando nel sistema dei vincoli compaiono delle equazioni, si può ridurre il numero delle variabili ricavando l'espressione di una o più di esse dalle equazioni e sostituendole nelle disequazioni vincolari.

Affinché un problema di PL in n variabili possa essere ricondotto ad un problema in due variabili occorre che $n-2$ relazioni vincolari siano delle equazioni; da esse infatti si possono ricavare le espressioni di $n-2$ delle n variabili coinvolte ed ottenere un sistema di disequazioni nelle sole due variabili rimaste. Vediamo altri esempi.

ESEMPI

1. Massimizziamo la funzione $z = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$

soggetta ai vincoli
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 \geq 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 20 \\ x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Le variabili del problema sono 4 e le equazioni sono 2; è quindi possibile ricondurre il problema ad uno equivalente con due variabili. Consideriamo allora il sistema delle due equazioni e scriviamo le espressioni di due variabili in funzione delle altre due; risolvendo ad esempio rispetto a x_3 e x_4 otteniamo che:
$$\begin{cases} x_3 = 10 - 2x_1 + x_2 \\ x_4 = 10 + x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Se sostituiamo tali espressioni nella funzione obiettivo e nel sistema delle disequazioni vincolari otteniamo il nuovo problema

massimizzare $z = 7x_1 + 10$ con i vincoli
$$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq \dfrac{5}{2} \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ 10 - 2x_1 + x_2 \geq 0 & \text{vincolo di segno di } x_3 \\ 10 + x_1 - 2x_2 \geq 0 & \text{vincolo di segno di } x_4 \end{cases}$$

La regione ammissibile è costituita dai punti del triangolo di vertici $A\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{15}{4}, \dfrac{5}{2}\right)$, $C(2, 6)$ (***figura 16***)

in cui abbiamo omesso di disegnare le rette dei vincoli di segno relativi a x_3 e x_4 perché ininfluenti e si ha che

$z(A) = 7 \cdot 2 + 10 = 24$

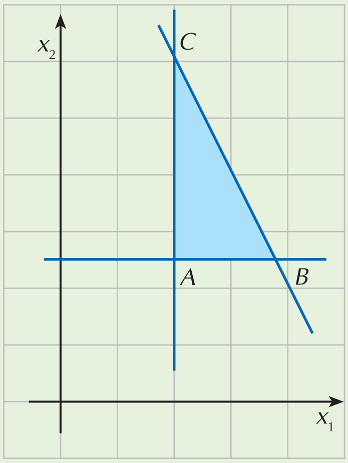
$z(B) = 7 \cdot \dfrac{15}{4} + 10 = 36,25$

$z(C) = 7 \cdot 2 + 10 = 24$

Il massimo di questo problema si trova nel punto B; tornando alle quattro variabili iniziali, il punto di massimo si ha quindi per

$x_1 = \dfrac{15}{4}, \qquad x_2 = \dfrac{5}{2}, \qquad x_3 = 5, \qquad x_4 = \dfrac{35}{4}$

Figura 16

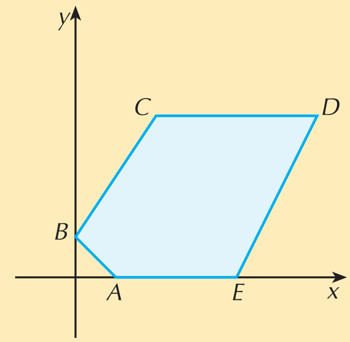


VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Un problema di PL ha come regione ammissibile quella rappresentata in figura e la funzione obiettivo è $z = x + y$; z è massima:

a. in D **b.** in B

c. in C **d.** in nessuno dei punti precedenti



7. Il PERT

Pert è l'acronimo di *Program evaluation & Review Technique*, un programma sviluppato dalla marina americana nel 1958 per la pianificazione e la costruzione del missile Polaris (un missile strategico bistadio a testata nucleare), che aveva come obiettivo quello di terminare il progetto nel più breve tempo possibile. Il Pert è quindi una strategia che si occupa di minimizzare i tempi di realizzazione di un progetto senza tener conto di altri fattori quali per esempio i costi. In ogni progetto c'è sempre un punto di partenza, nel seguito denominato con I, e un punto di arrivo, nel seguito denominato con S; in mezzo ci sono tutte le attività, alcune consequenziali altre parallele, che consentono di raggiungere il punto finale; è quindi indispensabile individuare con chiarezza tutte queste attività.
I passi fondamentali nella gestione di un progetto sono dunque i seguenti:

1. individuazione delle attività di cui si compone il progetto
2. individuazione dei vincoli di sequenza logico temporale delle varie attività e stima della durata delle attività
3. costruzione del diagramma
4. elaborazione dei dati.

Per comprendere il funzionamento del metodo ci affidiamo ad un semplice esempio nel quale ci occupiamo della produzione di un nuovo prodotto da parte di un'azienda.

FASE 1. Individuazione delle attività

A. progettazione

B. approvvigionamento materiali per il prodotto

C. approvvigionamento materiali per la confezione

D. assemblaggio prodotto

E. assemblaggio confezione

F. confezionamento.

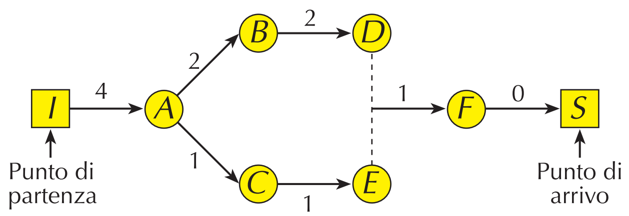
FASE 2. Vincoli di sequenza e tempi di realizzo

Riportiamo le attività e i tempi del loro realizzo (misurati in settimane) in una tabella:

Attività	Precedenze	Tempi
A	-	4
B	*A*	2
C	*A*	1
D	*B*	2
E	*C*	1
F	*D-E*	1

FASE 3. Costruzione del diagramma

Il diagramma del progetto si realizza tramite un grafo nel quale i nodi rappresentano le attività, gli archi orientati che li collegano indicano le precedenze; sugli archi vengono poi indicati i tempi di realizzo della fase immediatamente successiva. Nel nostro caso il grafo è il seguente:



FASE 4. Elaborazione dei dati

E' la fase più delicata del metodo; si compone sostanzialmente di due parti:

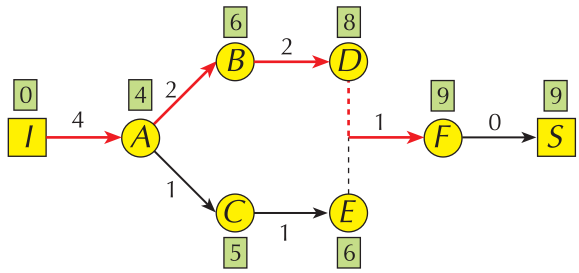
- individuazione del tempo massimo di realizzo del progetto: **tempo al più presto**
- individuazione del massimo ritardo che può subire il completamento di un'attività senza che il progetto completo subisca rallentamenti: **tempo al più tardi**.

Per la valutazione del *tempo al più presto* si costruisce una nuova tabella nella quale vengono riportati, accanto alle attività e alle precedenze, i tempi di durata complessivi mano a mano che si procede con lo sviluppo delle attività; alle attività corrispondenti al punto di partenza I e a quello di arrivo S viene attribuito un tempo pari a zero; nel caso del nostro esempio la tabella è la seguente (percorri il grafo e tieni conto dei tempi):

Attività	Precedenze	Tempi	Tempo precedente + durata attività	tempo al più presto
A	-	4	$t(I)+t(A)=0+4$	4
B	*A*	2	$t(A)+t(B)=4+2$	6
C	*A*	1	$t(A)+t(C)=4+1$	5
D	*B*	2	$t(B)+t(D)=6+2$	8
E	*C*	1	$t(C)+t(E)=5+1$	6
F	*D-E*	1	$t(D)+t(F)=8+1$ (percorso *D-F*) $t(E)+t(F)=6+1$ (percorso *E-F*)	9

Nell'ultima riga della tabella, dove esistono due percorsi distinti, si deve inserire il tempo maggiore tra i due in quanto dobbiamo essere sicuri che il progetto venga completato.

Aggiorniamo il grafo del progetto riportando i tempi al più presto in corrispondenza dei nodi delle attività:



Introduciamo ora il concetto di *cammino critico*.

Si definisce **cammino critico** la successione di attività che richiede il massimo tempo.

Nel nostro caso il cammino critico è quello formato dalla successione delle attività A-B-D-F (evidenziato dagli archi in rosso nel grafo precedente) che comporta il tempo massimo uguale a 9.

Per la valutazione del *tempo al più tardi*, cioè del massimo ritardo consentito, dobbiamo partire dal nodo finale e ripercorrere il grafo in senso inverso sottraendo i tempi di durata delle attività incontrate; in caso di più percorsi distinti, si deve tener conto del tempo minore. Sostanzialmente sono le attività che prevedono un tempo complessivamente inferiore a quello massimo consentito che possono subire dei ritardi; nel nostro esempio le attività che possono subire qualche ritardo sono quelle del cammino $A \rightarrow C \rightarrow E$ che ha un tempo complessivo inferiore a 9 (la somma dei tempi è 6).
Aggiorniamo quindi di nuovo il grafo affiancando ai tempi al più presto quelli al più tardi che calcoliamo così:

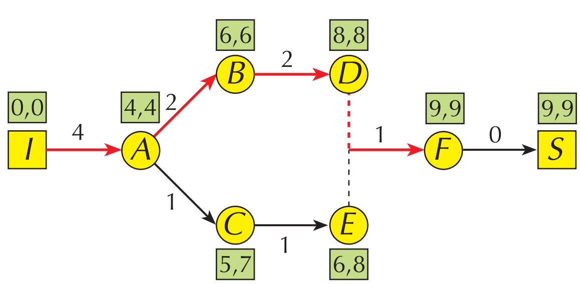
- nodo F tempo al punto di arrivo S − tempo di S: $9 - 0 = 9$
- nodo D tempo in F − tempo di D: $9 - 1 = 8$

Procedendo più speditamente:

- nodo B $8 - 2 = 6$
- nodo E $9 - 1 = 8$
- nodo C $8 - 1 = 7$
- nodo A due possibilità: da B verso A: $6 - 2 = 4$ da C verso A: $7 - 1 = 6$

poiché dobbiamo valutare il tempo minore, scriviamo 4.

L'aggiornamento del grafo è il seguente (il primo numero della casella verde è il tempo al più presto, il secondo è il tempo al più tardi).



I nodi in cui il tempo al più presto e quello al più tardi sono uguali vengono detti **vertici critici**; essi rappresentano le attività che, se dovessero subire per qualche motivo un ritardo, provocherebbero dei danni al progetto che non potrebbe essere terminato nei tempi previsti. Nel nostro esempio i vertici critici si trovano in corrispondenza delle attività A, B, D, F che costituiscono il cammino critico.

L'individuazione delle attività critiche è molto importante in quanto, rappresentando le tappe di un cammino di tempo massimo, è su di esse che si può agire per vedere se è possibile ridurne la durata per migliorare l'evoluzione del progetto; le attività non critiche sono invece più flessibili e, entro certi limiti, possono anche subire dei ritardi.

La differenza tra il tempo al più tardi e quello al più presto, calcolata in ogni nodo, viene detta **tempo di slittamento**; esso indica quanto ritardo è possibile tollerare senza che il progetto subisca dei rallentamenti.

Valutiamo i tempi di slittamento del nostro esempio e costruiamo la seguente tabella:

	Nodi attività					
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Tempo al più presto	4	6	5	8	6	9
Tempo al più tardi	4	6	7	8	8	9
Tempo di slittamento	0	0	2	0	2	0

I vertici non critici sono due: il nodo C e il nodo E entrambi con un tempo di slittamento pari a 2; questi valori rappresentano i tempi massimi entro cui deve obbligatoriamente teminare l'attività che arriva in quel nodo e iniziare quella che da esso parte.

Per completare l'analisi del progetto sono utili altri due parametri che definiamo come segue.

Indicata con A_{PQ} l'attività che inizia nel nodo P e termina nel nodo Q, si definisce:

- **margine libero** M_{PQ} l'espressione:

  (tempo al più presto nel nodo Q) − (tempo al più presto nel nodo P) − (tempo necessario all'espletamento dell'attività)

- **margine totale** M^t_{PQ} l'espressione

  (tempo al più tardi nel nodo Q) − (tempo al più tardi nel nodo P) − (tempo necessario all'espletamento dell'attività)

Per esempio, facendo riferimento all'ultimo grafo dell'esempio, nell'attività che va dal nodo A verso C:

- il margine libero M_{AC} è dato da:

$$\underbrace{5}_{\text{tempo al più presto in } C} - \underbrace{4}_{\text{tempo al più presto in } A} - \underbrace{1}_{\text{tempo dell'attività } A-C} = 0$$

- il margine totale M^t_{AC} è dato da:

$$\underbrace{7}_{\text{tempo al più tardi in } C} - \underbrace{4}_{\text{tempo al più tardi in } A} - \underbrace{1}_{\text{tempo dell'attività } A-C} = 2$$

Il margine libero è la quantità di tempo che può essere utilizzata senza modificare la durata del progetto.

Il margine totale è il massimo intervallo di tempo di cui può disporre quell'attività senza modificare la data di termine del progetto.

Prepariamo un'ultima tabella dove riportare i margini libero e totale per ogni attività:

Attività	Margine libero	Margine totale
I-A	$4 - 0 - 4 = 4$	$4 - 0 - 4 = 0$
A-B	$6 - 4 - 2 = 0$	$6 - 4 - 2 = 0$
B-D	$8 - 6 - 2 = 0$	$8 - 6 - 2 = 0$
D-F	$9 - 8 - 1 = 0$	$9 - 8 - 1 = 0$
A-C	$5 - 4 - 1 = 0$	$7 - 4 - 1 = 2$
C-E	$6 - 5 - 1 = 0$	$8 - 7 - 1 = 0$
*E-*F	$9 - 6 - 1 = 2$	$9 - 8 - 1 = 0$
F-S	$9 - 9 - 0 = 0$	$9 - 9 - 0 = 0$

Analizziamo la tabella:

- un valore non nullo di margine libero significa, come abbiamo già detto, che si può tollerare un ritardo nel compimento dell'attività che collega i due nodi; per esempio l'attività *E-F* ha un margine di 2 settimane senza che il progetto venga compromesso a patto di non spostare la data del tempo al più presto, cioè l'attività successiva non può subire variazioni di tempistica;
- avere un margine totale non nullo significa avere più tempo per lo svolgimento di quella attività o poterla iniziare dopo;
- avere valori nulli di margine libero e totale significa che non ci sono margini di elasticità per i tempi.

Teniamo presente che, nella nostra analisi, abbiamo trattato un problema molto semplice e che il modello del Pert completo è molto più complesso; esso comporta anche tecniche di variazione del progetto con l'obiettivo di diminuire i tempi di realizzo; non tiene però in considerazione i costi di gestione dello stesso che possono anche variare considerevolmente.

I concetti e le regole

I problemi di scelta

La Ricerca Operativa si occupa di studiare le metodologie che consentono di trovare la soluzione ottimale di un problema.
Tra i problemi di cui si occupa la RO individuiamo:

- i problemi di scelta in cui si vuole trovare la soluzione ottimale tra quelle possibili
- i problemi di Programmazione Lineare dove si individua una funzione lineare da ottimizzare nella quale le variabili coinvolte sono soggette a dei vincoli lineari.

Condizioni di certezza

Se la variabile della funzione obiettivo può assumere valori reali oppure discreti ma con dati numerosi, si procede all'individuazione del punto di massimo o di minimo assoluto analizzando il grafico della funzione stessa se questo è noto, oppure si procede con i metodi dell'analisi.
Se invece i dati sono poco numerosi, si effettua un confronto diretto valutando caso per caso la funzione obiettivo.

Condizioni di incertezza

Se la variabile della funzione obiettivo è aleatoria, per la valutazione della scelta ottimale si costruisce la *playoff table* che riporta le alternative possibili e gli eventi aleatori che si possono verificare, ciascuno con il suo valore di probabilità. Il criterio di scelta è quello del valor medio che si calcola con la formula:

$$M(A_j) = \sum R_{ij} p_i$$

Il modello di un problema di PL

In ogni problema di programmazione lineare vi è una funzione obiettivo da ottimizzare, cioè rendere massima o minima, le cui variabili sono soggette a dei vincoli rappresentati da equazioni o disequazioni:

funzione obiettivo $\quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots\dots\dots + c_n x_n$

sistema dei vincoli
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\dots\dots\dots,n \end{cases}$$

vincoli tecnici

vincoli di segno

Disequazioni lineari in due variabili

Le soluzioni della disequazione $ax + b > 0$ oppure $ax + b < 0$ si possono interpretare in modo grafico ricercando le ascisse dei punti della retta che hanno una ordinata rispettivamente positiva o negativa.

Una disequazione lineare in due variabili $y \gtrless ax + b$ ha invece come soluzione tutti i punti di uno dei due semipiani delimitati dalla retta $y = ax + b$; per individuare quale sia il semipiano delle soluzioni si possono sostituire le coordinate di un punto appartenente a uno dei semipiani e vedere se la disequazione è soddisfatta.

Il metodo grafico per un problema in due variabili

La risoluzione grafica di un problema di PL consiste nel rappresentare nel piano cartesiano il sistema dei vincoli; individuata la regione di tali vincoli, rappresentata normalmente da un poligono, si valuta la funzione obiettivo nei vertici del poligono e si assume come soluzione quella che rende ottima la funzione obiettivo stessa.

Il Pert

Il Pert è una strategia che si occupa di minimizzare i tempi di realizzazione di un progetto senza tener conto di altri fattori.
In ogni progettazione occorre individuare:

- le attività che la realizzazione del progetto comporta
- i tempi di completamento di ogni attività
- la sequenza logico temporale delle attività.

E' poi opportuno costruire il diagramma delle attività e completarlo con i tempi di realizzo al più presto e al più tardi.

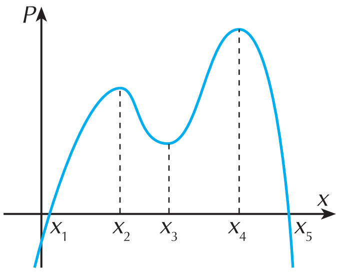
Modelli matematici e ricerca operativa

Problemi di scelta in condizioni di certezza

Comprensione

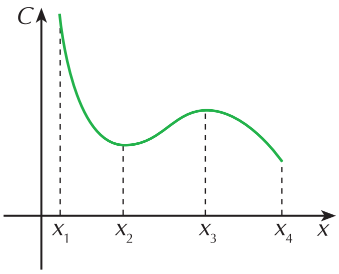
1 Il grafico a lato rappresenta una funzione profitto. Completa inserendo gli opportuni intervalli della variabile x che soddisfano le richieste:

a. si ha una situazione di perdita se ....
b. il profitto massimo si ottiene in corrispondenza di ....
c. il profitto minimo si ottiene in corrispondenza di ....
d. i profitti sono crescenti negli intervalli ....



2 Il grafico a lato rappresenta una funzione di costo. Completa inserendo gli opportuni intervalli della variabile x che soddisfano le richieste:

a. i costi sono decrescenti negli intervalli ....
b. il costo minimo si ha in corrispondenza di ....
c. il costo massimo si ha in corrispondenza di ....
d. escludendo gli estremi dell'intervallo che rappresenta la quantità prodotta, si ha un nuovo costo minimo in corrispondenza di .... e un nuovo costo massimo in corrispondenza di ....



Applicazione

Problemi di scelta nel continuo

3 Una ditta produce una merce con una spesa fissa settimanale di € 1 200 ed un costo di produzione di € 6 al kg. Sapendo che il prezzo di vendita è di € 12 al kg e che si possono al massimo produrre 1 200kg alla settimana, rappresenta graficamente la funzione di utile, determina qual è la produzione settimanale per ottenere il massimo utile, il relativo guadagno e la produzione minima per non subire perdite.

[1 200kg, € 6000; 200kg]

4 La capacità massima di produzione di un certo settore di un'industria chimica è di 100 000 litri di prodotto, che viene venduto a € 0,15 al litro. Il costo di produzione è determinato da un costo fisso pari a € 350 più un costo suppletivo di € 0,035 per ogni litro di prodotto. Rappresenta graficamente la funzione di utile e determina la produzione che realizza il massimo guadagno ed il relativo utile.

[100 000 ℓ; € 11 150]

5 Una ditta può produrre fino a 1200kg di un certo preparato alla settimana. I costi fissi settimanali ammontano a € 600 ed il costo di produzione per ogni kg di prodotto è di € 1,20. Supponendo che il prodotto sia venduto a € 2,40 al kg, in confezioni da 50kg, determina:

a. il numero di confezioni da produrre settimanalmente che permette di conseguire il massimo utile; [24]

b. il relativo guadagno; [€ 840]

c. la produzione minima per non subire perdite. [10]

6 Un'industria tessile, la cui capacità produttiva è di 3000m di tela al mese, ha una spesa fissa mensile di € 14580. Sapendo che la spesa variabile complessiva della produzione è pari, in euro, allo 0,2% del quadrato del numero di metri di tela prodotti, determina la produzione mensile che minimizza il costo di produzione al metro e l'importo di tale costo. Qual è il costo unitario minimo per una capacità produttiva di 2500m di stoffa. [2700m; € 10,80; € 10,83]

7 Un autotrasportatore sostiene annualmente una spesa fissa di € 1440 per assicurazione e tassa di possesso, una spesa unitaria di € 0,56 per ogni chilometro percorso ed una spesa di manutenzione pari, in euro, allo 0,04‰ del quadrato del numero dei chilometri percorsi. Determina il numero di chilometri che permette di ottenere la minima spesa unitaria e l'importo di tale spesa. [6000km; € 1,04]

8 Un'industria può produrre mensilmente sino a 2000kg di una certa merce. Per la produzione sostiene una spesa fissa mensile di € 1000 ed un costo di € 2 per ogni kg di prodotto. La domanda della merce è espressa in funzione del prezzo dalla relazione $x = 4800 - 800p$, dove x e la quantità richiesta e p è il prezzo al kg. Qual è la produzione che consente il massimo utile e a quanto ammonta quest'ultimo? Qual è il guadagno che si ottiene sfruttando al massimo la capacità produttiva? Come varia il guadagno se la capacità produttiva è di 1500kg? [1600kg; € 2200; € 2000; € 2187,50]

9 Un rappresentante, per vendere un solvente industriale, ha un costo di € 0,30 per ogni litro di prodotto venduto. Il ricavo è dato da una quota fissa mensile di € 700 e da una provvigione, per ogni litro venduto, pari a € 1 diminuite, in euro, dello 0,02‰ della quantità venduta. Determina il numero di litri di solvente da vendere mensilmente per avere il massimo guadagno e il suo importo. [17500ℓ; € 6825]

10 Il proprietario di un'autovettura deve sostenere € 712,50 di spese semestrali per assicurazione e tassa di possesso, cui si aggiungono € 600 per l'affitto del garage. Le spese annue di esercizio di tale autovettura sono stimate in € $0,09$ al chilometro cui va aggiunto un importo pari, in euro, allo 0,0525‰ del quadrato del chilometraggio annuo.
Determina il chilometraggio semestrale che gli consente di sostenere la minima spesa per chilometro e la spesa complessiva unitaria relativa al chilometraggio trovato. [5000kg; € 0,62]

11 Per la produzione di un particolare composto chimico, un'azienda sostiene un costo fisso mensile di € 10000 ed un costo variabile per ogni kg di prodotto determinato, in euro, dalla relazione $0{,}005x - 2$, dove x indica la quantità prodotta (in kg). Il composto viene venduto a € 25 al kg e la capacità produttiva dell'industria chimica è di 2000kg al mese. Dopo aver rappresentato graficamente la funzione di utile, determina il numero ottimale di kg da produrre e vendere per avere il massimo profitto ed il profitto stesso.
Se la capacità produttiva dell'azienda diventa di 3000kg al mese, qual è la quantità da produrre per avere il massimo utile? [2000kg, € 24000; 2700kg, € 26450]

12 Una ditta per il lavaggio industriale di biancheria può lavare fino a 50000kg di biancheria in una settimana, sostenendo spese fisse pari a € 750 settimanali e spese, per ogni kg lavato, quantificabili in € 1 al kg. Il prezzo di lavaggio per ogni kg è così stabilito: € 2,50 diminuite, in euro, dello 0,02‰ del numero dei kg lavati. Determina:

a. la funzione del profitto;

b. la quantità da trattare per non andare in perdita; [più di 503kg]

c. la quantità di biancheria che deve essere lavata settimanalmente per consentire alla lavanderia il massimo utile. [37500kg]

Problemi di scelta tra più alternative

13 Un utente può scegliere fra due tariffe per la fornitura di metano:

A. € 0,55 al metro cubo più € 9 di spese fisse al mese;

B. € 0,60 al metro cubo più € 6 di spese fisse al mese.

Stabilisci quale delle due tariffe è più conveniente all'utente al variare del consumo mensile di metano.

[$0 < x \leq 60 : B$; $x \geq 60 : A$]

14 Una ditta ha bisogno di un operaio specializzato per eseguire un certo lavoro e può scegliere fra due persone *A* e *B* di pari capacità. Per tale lavoro, l'operaio *A* chiede € 200 fisse più € 32 all'ora, l'operaio *B* chiede € 40 per ogni ora di lavoro. A quale dei due operai conviene rivolgersi?

[$0 < x \leq 25 : B$; $x \geq 25 : A$]

15 Per spedire della merce una azienda di trasporti prevede tre differenti contratti a seconda del volume d'ingombro x, espresso in metri cubi, della merce stessa, con una eventuale quota fissa aggiuntiva. La spesa y del cliente, in euro, è espressa dalle tre funzioni:

A. $y = 300 + 20x$ *B*. $y = 150 + 50x$ *C*. $y = 100x$

Determina, al variare di x, l'alternativa più conveniente tenendo presente che il massimo ingombro è di 15 metri cubi. [$0 < x \leq 3 : C$; $3 \leq x \leq 5 : B$; $5 \leq x \leq 15 : A$]

16 Un rappresentante di libri propone al libraio acquirente due forme di pagamento:

A. € 10 per ogni libro acquistato e € 40 fisse di spese di imballaggio e spedizione;

B. € 12 per ogni libro acquistato senza spese aggiuntive.

Determina, al variare del numero di libri, la convenienza del libraio. [$0 < x \leq 20 : B$; $x \geq 20 : A$]

17 Ad un impiegato vengono proposte tre forme di calcolo dello stipendio:

A. € 800 al mese più € 10 per ogni pratica evasa;

B. € 1500 al mese fisse;

C. nessuno stipendio base ma € 50 per ogni pratica evasa.

Determina, al variare del numero x di pratiche evase ogni mese, la scelta più conveniente per l'impiegato. [$0 < x \leq 30 : B$; $x \geq 30 : C$]

18 Il preventivo per il trasporto di una data merce presentato da due imprese *A* e *B* è il seguente:

A. € 0,50 al quintale più una spesa fissa di € 200;

B. € 0,90 al quintale più una spesa fissa di € 120.

Sapendo che il numero dei quintali da trasportare non è mai superiore ai 400, determina il preventivo più conveniente. [$0 < x \leq 200 : B$; $200 \leq x \leq 400 : A$]

19 Un industriale per fabbricare le sue scatole di cartone può usare due differenti tipi di produzione che indichiamo con *A* e *B*. Per il tipo di produzione *A* la spesa di manodopera per ogni pezzo è di € 12, più una spesa fissa giornaliera di € 240. Il tipo di produzione *B* comporta invece una spesa fissa di € 360 più una spesa per pezzo di € 10.

a. Determina il tipo di produzione giornaliera più conveniente per l'industriale al variare della quantità x prodotta. [$0 < x \leq 60 : A$; $x \geq 60 : B$]

b. Ripeti il calcolo precedente supponendo che, anche per l'alternativa *B*, la spesa per ogni pezzo sia di € 12. Che cosa osservi?

20 Una piccola fabbrica di magliette, può scegliere tre diversi modi per produrle con i seguenti costi:

A. una spesa fissa di € 74 più € 0,63 per ogni maglietta prodotta;

B. una spessa fissa di € 210, 80 più € 0,25 per ogni maglietta prodotta;

C. una spesa di € 1 per ogni maglietta prodotta.

Determina l'alternativa più conveniente in dipendenza del numero di magliette prodotte giornalmente, sapendo che le ore di lavorazione del personale consentono di produrne non meno di 150 ma non più di 400. [$150 \leq x \leq 200 : C$; $200 \leq x \leq 360 : A$; $360 \leq x \leq 400 : B$]

21 Un calzaturificio dispone di due macchinari per tagliare e cucire la pelle per confezionare scarpe. La prima macchina necessita di un tempo di 15 minuti per essere predisposta e prepara la pelle per tre paia di scarpe al minuto: la seconda macchina necessita di 30 minuti per essere predisposta e prepara la pelle per 4 paia di scarpe al minuto. Determina, al variare del numero di scarpe che si devono preparare, qual è la macchina più conveniente da usare, tenendo presente che, vista la disponibilità di pelle giornaliera, non è possibile confezionare più di 250 paia di scarpe al giorno.
[$0 < x \leq 180$: prima macchina; $180 \leq x \leq 250$: seconda macchina]

22 Una ditta che produce bulloni possiede due macchine. La prima richiede un tempo di preparazione di mezz'ora e produce 3 bulloni al minuto; la seconda richiede 50 minuti per la preparazione e produce 6 bulloni al minuto. Ogni macchina non può rimanere accesa per più di 8 ore consecutive. Determina, al variare del numero x di bulloni prodotti, in quali casi conviene usare l'una o l'altra macchina.
[$0 < x \leq 120$: prima macchina; $120 \leq x \leq 2580$: seconda macchina]

23 Un'azienda deve inscatolare i suoi prodotti e per fare ciò ha a disposizione tre macchinari che indichiamo con A, B, C. La macchina A necessita di 15 minuti per essere predisposta all'uso e confeziona 10 scatole al minuto; la macchina B necessita di 30 minuti di preparazione e prepara 15 scatole al minuto; la C non necessita di tempi di preparazione e prepara 6 scatole al minuto. La produzione massima giornaliera non supera le 5000 scatole. Determina, al variare del numero x di scatole da confezionare, qual è la macchina più conveniente da usare. [$0 < x \leq 225 : C$; $225 \leq x \leq 450 : A$; $450 \leq x \leq 5000 : B$]

Problemi di scelta nel discreto

24 Un'impresa edile costruisce piccoli appartamenti e li vende al prezzo di € 100000 ciascuno. I costi di costruzione di ogni singolo appartamento variano secondo la seguente tabella:

n. appartamenti	costo singolo appartamento
5	60000
10	54000
15	48000
20	40000
25	44000
30	56000

Determina il numero di appartamenti che conviene costruire per avere il massimo utile netto complessivo ed il valore di tale utile. [25; € 1400000]

25 Per la lavorazione di un articolo, prodotto in lotti di 500 pezzi ciascuno, si sostiene un spesa fissa di € 1000 ed un costo di € 0,45 al pezzo. Il prezzo di vendita al lotto è decrescente rispetto al numero di lotti venduti secondo la tabella seguente (il prezzo è indicato in euro):

N. lotti	1	2	3	4	5	6	7	8
Prezzo	600	580	540	500	480	460	410	360

Determina il numero di lotti da produrre settimanalmente per ottimizzare il guadagno. [6]

26 Un'azienda che produce dolciumi decide di fare una campagna promozionale distribuendo gratuitamente i suoi prodotti ad ore stabilite nell'arco della giornata e per un certo numero di giorni. Per fare ciò sostiene delle spese fisse di € 75000 cui vanno aggiunti € 2500 al giorno per ogni distribuzione, che si riduce a € 2200 se le distribuzioni sono più di tre al giorno. Il ricavo che l'azienda stima di poter avere dalla campagna è in funzione del numero di distribuzioni giornaliere ed è rappresentato nella seguente tabella:

N. distribuzioni	1	2	3	4	5	6
Ricavo (in migliaia di euro)	78	90	100	101	103	105

Determina il numero di distribuzioni giornaliere che determina il massimo profitto e il valore di tale profitto. [3; € 17500]

27 Un'impresa decide di fare una campagna pubblicitaria televisiva. La spesa unitaria è di € 4000 per il primo spot e decresce di € 100 per ogni spot in più; a tale spesa se ne deve aggiungere una fissa di € 8400. Si stima che il rendimento aumenti al crescere del numero di spot secondo la seguente tabella:

Numero spot	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimento (in migliaia di euro)	20	26	31	36	40	44	46	48	50	52

Determina il numero di spot che consente il massimo utile. [6]

28 Un dato prodotto è fabbricato in lotti di 100 pezzi ciascuno. Per la lavorazione si sostiene una spesa fissa giornaliera di € 2500, un costo di € 9 per ciascun pezzo, ed il numero di pezzi prodotti in un giorno non può superare le 800 unità. Sapendo che il prezzo di vendita è di € 2000 per il primo lotto e che il prezzo di vendita decresce di € 150 per ogni lotto venduto in più, determina quanti lotti si devono produrre giornalmente per avere il massimo guadagno ed il guadagno stesso. [8; € 2100]

29 Una ditta produce settimanalmente un certo numero di giocattoli, ognuno dei quali costa, alla produzione, € 2,80 e sostiene una spesa fissa di € 400. Il ricavo previsto per ogni giocattolo è di € 10, con una spesa di vendita per ognuno di essi pari, in euro, al 2‰ del quadrato del numero dei giocattoli venduti. Determina il numero dei giocattoli che la ditta deve produrre settimanalmente per avere il massimo utile. [1800]

30 Una ditta, specializzata nella produzione di un determinato articolo, sostiene una spesa fissa settimanale di € 3600 ed una spesa variabile unitaria pari, in euro, all'1% del quadrato del numero di oggetti prodotti. Determina il numero di oggetti che è più conveniente produrre in modo da realizzare il minimo costo unitario di produzione settimanale e l'importo di tale costo. [600; € 12]

31 Un'industria produce tende per campeggio. Ogni tenda costa alla ditta € 200 e viene venduta a € 250 con una diminuzione del prezzo di vendita per ogni attrezzatura pari, in euro, al 10% del numero delle attrezzature vendute. L'industria sostiene inoltre settimanalmente spese fisse pari a € 1500. Determina il massimo numero di tende che conviene produrre per avere il massimo utile relativo e l'importo di tale utile. [250; € 4750]

32 Un'industria dolciaria confeziona scatole di biscotti che ne contengono, ciascuna, 750g. Ogni scatola viene venduta a € 12. Le spese fisse sostenute mensilmente sono di € 7200; si hanno inoltre costi di € 6 al kg per la produzione dei biscotti e di € 0,30 per ogni scatola per il loro confezionamento. Determina il numero minimo di scatole che devono essere confezionate per non essere in perdita, il numero di scatole che consente il massimo guadagno ed il guadagno stesso, sapendo che mensilmente non si possono confezionare più di 6000 scatole. [1000; 6000; € 36000]

PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

Risolvi i seguenti problemi di scelta in condizioni di incertezza applicando il criterio del valor medio.

33 Una mensa scolastica può servire fino a 600 coperti al giorno, ma il numero degli studenti è casuale ed è stimato secondo la seguente tabella:

N. Studenti	200	300	400	500	600
Probabilità	0,15	0,30	0,41	0,09	0,05

Da ogni pasto la mensa ricava € 4,60 ed ogni studente assente viene a costare € 1,80. Determina il valor medio del profitto. [€ 1217,60]

34 Considera la seguente tabella dei risultati i cui dati rappresentano dei profitti. Determina per ogni alternativa il valor medio.

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1	-10	25	20	0,3
	E_2	10	0	8	0,25
	E_3	25	23	48	0,45

[$M(A) = 10,75$; $M(B) = 17,85$; $M(C) = 29,6$]

35 Considera la seguente tabella dei risultati i cui dati rappresentano dei profitti. Dopo aver determinato per ogni alternativa il valor medio, scegli l'alternativa migliore.

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1	-1	5	10	0,2
	E_2	12	10	8	0,25
	E_3	15	12	28	0,4
	E_4	8	9	7	0,15

[$M(A) = 10$; $M(B) = 9,65$; $M(C) = 16,25$]

36 Una fabbrica di conserve può confezionare il suo prodotto in bottiglie di vetro (A), in bottiglie di plastica (B), in barattoli di lamiera (C), con i seguenti costi:

A: costo fisso settimanale di € 2000, più € 1 per ogni bottiglia;

B: costo fisso settimanale di € 1400, più € 1,20 per ogni bottiglia;

C: € 1,80 per ogni barattolo.

Il prodotto così confezionato viene venduto rispettivamente a € 1,80, € 2, € 2,50 al pezzo e si stima di poter piazzare sul mercato nei primi tre mesi dell'anno le seguenti quantità settimanali:

N. pezzi	10000	12000	20000	35000	40000
Probabilità	0,2	0,25	0,35	0,15	0,05

Trova l'alternativa che produce il massimo profitto. [$M(A) = 13400(€)$; $M(B) = 14000(€)$; $M(C) = 13475(€)$]

37 Un utente può scegliere fra due seguenti tariffe di energia elettrica:
A: € 0,15 al kwh più € 12 fisse al mese;
B: € 0,11 al kwh più € 20 fisse al mese.
Il consumo è una variabile aleatoria che assume i seguenti valori:

Consumo (in kwh)	210	220	230	240	250
Probabilità	0,1	0,2	0,45	0,2	0,05

Determina la tariffa più conveniente per l'utente. [$M(A) = 46{,}35(€)$; $M(B) = 45{,}19(€)$]

Risolvi i seguenti problemi in cui la decisione tiene conto anche del rischio.

38 Per la produzione di una certa merce, una ditta può seguire due processi produttivi che comportano costi diversi:
A: spese fisse di € 750 e costo di € 1,20 per ogni pezzo prodotto;
B: spese fisse di € 150, costo di € 1,50 per ogni pezzo prodotto e costo di manutenzione pari, in euro, allo 0,075‰ del quadrato della quantità prodotta.
Il prezzo di vendita della merce è di € 3 al pezzo. Sapendo che la quantità di prodotto venduta è una variabile aleatoria che assume i valori indicati nella seguente tabella:

Quantità	500	1000	1500	2000	2500
Probabilità	0,05	0,30	0,40	0,20	0,05

calcola il profitto e determina il processo produttivo più conveniente in base al criterio del valor medio.
Si modifica la scelta se la ditta valuta di non poter sopportare un rischio superiore ad $\frac{1}{3}$ del valor medio?
[$M(A) = 1860(€)$, $M(B) = 1850{,}63(€) : B$; $\sigma_A = 849{,}06(€)$; $\sigma_B = 601{,}99(€) : B$]

39 Si vuole investire un capitale e si ha la possibilità di scegliere tra due alternative A e B nei quali i ricavi, espressi in migliaia di euro, sono dipendenti da tre eventi di probabilità nota secondo la seguente tabella

		ALTERNATIVE		
		A	B	Probabilità
EVENTI	E_1	9	13	0,25
	E_2	18	16	0,50
	E_3	28	24	0,25

Determina l'alternativa più conveniente. Come si modifica la scelta se non si vuole superare un rischio pari alla terza parte del valore medio? [$M(A) = 18{,}25$; $M(B) = 17{,}25$; B con $\sigma(B) = 4{,}085$]

40 La tabella dei guadagni di un'impresa, espressi in migliaia di euro e relativa a tre possibili investimenti dipendenti da cinque eventi aleatori di probabilità nota, è la seguente

		ALTERNATIVE			
		A	B	C	Probabilità
EVENTI	E_1	$-1{,}5$	-15	3	0,10
	E_2	$7{,}5$	24	-9	0,25
	E_3	6	0	$7{,}5$	0,35
	E_4	$-1{,}5$	-3	$4{,}5$	0,20
	E_5	12	12	6	0,10

Determina la scelta più conveniente tenendo conto che si è disposti a sopportare un rischio non superiore al valore medio. [$M(A) = 4{,}725$; $M(B) = 5{,}1$; $M(C) = 2{,}175$]

LE DISEQUAZIONI LINEARI IN DUE VARIABILI

Applicazione

Disequazioni lineari

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni.

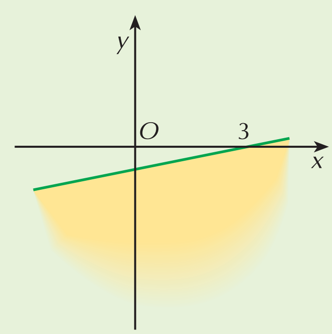
41 **ESERCIZIO GUIDA**

$x - 5y \geq 3$

Esplicitando la disequazione rispetto alla variabile y si ottiene

$y \leq \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

che rappresenta il semipiano in colore in figura.



In alternativa, dopo aver rappresentato la retta $x - 5y = 3$, scegliamo un punto in uno dei due semipiani, per esempio l'origine e vediamo se le sue coordinate soddisfano la disequazione:

$0 \geq 3 \quad \rightarrow$ non è verificata, il semipiano delle soluzioni è quello che non contiene O.

42 $\frac{2}{3}x + y + 1 \leq 0$

43 $x - \frac{1}{2}y - 2 \geq 0$

44 $x - 7 \leq 0$

45 $2y + 4 \geq 0$

46 $-y + x \leq 3$

47 $2 \leq x + y$

48 $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \leq 0$

49 $-y + \frac{3}{2} \geq 0$

50 $-2 - \frac{3}{4}x \leq y$

51 $0 \leq x + y + 1$

52 $3x - 5y \geq 0$

53 $x - 4y + 1 < 0$

54 $3 - 2x \leq y$

55 $3 \leq x + 7y$

56 $5 - 2x \leq 2y$

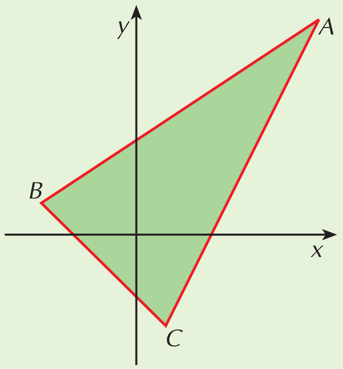
Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni, se esistono, dei seguenti sistemi di disequazioni o delle disequazioni ad esse riconducibili.

57 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} 3y - 2x - 9 \leq 0 \\ y + x + 2 \geq 0 \\ y - 2x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto in questo modo: $\begin{cases} y \leq \dfrac{2}{3}x + 3 \\ y \geq -x - 2 \\ y \geq 2x - 5 \end{cases}$

e definisce il triangolo in figura di vertici $A(6, 7)$, $B(-3, 1)$, $C(1, -3)$.



58 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5y + 12x - 60 \leq 0 \\ 5y - 12x + 60 \geq 0 \end{cases}$

59 $\begin{cases} y \geq -\dfrac{3}{2}x \\ 5y \leq -x + 8 \\ 3y - 2x + 16 \geq 0 \end{cases}$

60 $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x + 3y - 2 > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

61 $\begin{cases} x > 5 \\ y < 4 \\ x - 3y + 1 < 0 \end{cases}$

62 $\begin{cases} 2x + y \leq 40 \\ x + 3y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

63 $\begin{cases} 5x - 2y - 10 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 8 \end{cases}$

64 $\begin{cases} 5y \geq -6x - 25 \\ 3y - 2x \geq -1 \\ y \geq -5 \end{cases}$

65 $\begin{cases} y \leq 2x + 4 \\ 4x - 2y + 3 \leq 0 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

66 $\begin{cases} y + 2x - 16 \geq 0 \\ 5y - 2x + 40 \geq 0 \\ y < 5 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$

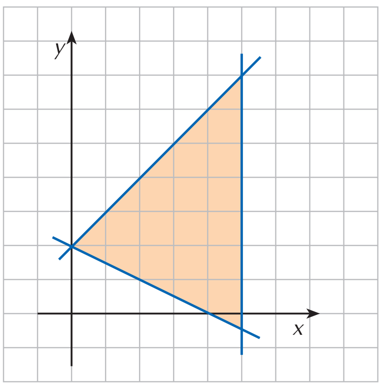
67 $\begin{cases} y \geq 0 \\ 4y - 3x \leq 0 \\ 4y - 3x + 6 \leq 0 \\ 4y - 3x - 24 \geq 0 \end{cases}$

68 $\begin{cases} 2y - x \geq -5 \\ 2y + 3x \geq -9 \\ y \geq \dfrac{4}{5}x - \dfrac{34}{5} \\ x \leq -3y \end{cases}$

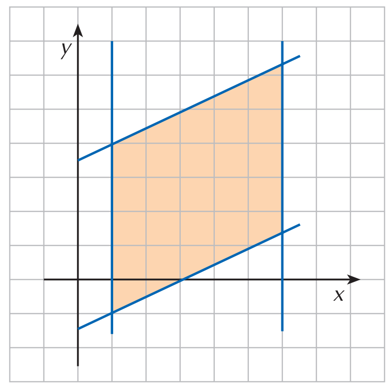
69 $\begin{cases} 2y + x \leq 22 \\ y \geq 7x - 35 \\ 3y + 5x \geq 6 \\ y - 2 \leq 4x \end{cases}$

Individua il sistema di disequazioni che delimita le regioni di piano di seguito rappresentate.

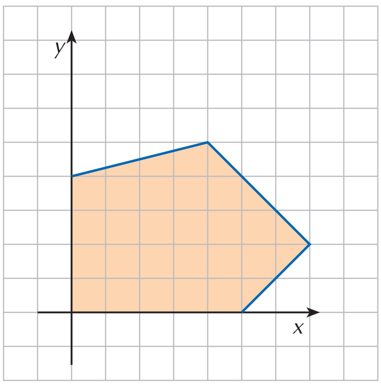
70



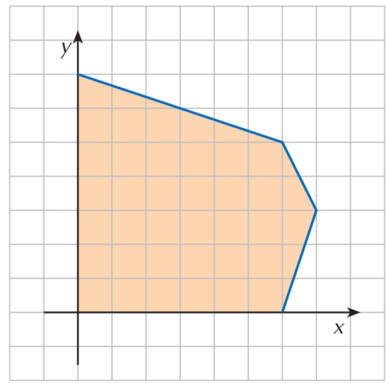
71



72



73



PROGRAMMAZIONE LINEARE: IL METODO GRAFICO

RICORDA

Per risolvere un problema di PL innanzi tutto devi determinare la regione ammissibile. Puoi poi procedere in due modi:

- valutare la funzione z nei vertici di tale regione ed individuare, se esistono, il massimo ed il minimo;
- disegnare le curve di livello della funzione z (fascio di rette parallele) e determinare, se esistono, la prima e l'ultima retta che incontrano la regione ammissibile.

Comprensione

74 Se la regione individuata nel piano cartesiano dal sistema dei vincoli è un poligono, allora la soluzione ottima si trova in corrispondenza:
a. di un punto interno al poligono
b. di uno dei vertici del poligono
c. nell'origine se questa appartiene al sistema dei vincoli
d. nel vertice del poligono che si trova più lontano dall'origine.

75 Barra vero o falso.
Se la regione individuata nel piano cartesiano dal sistema dei vincoli è una regione aperta:
a. per trovare la soluzione ottima si deve utilizzare il metodo delle linee di livello V F
b. la soluzione ottima si può ancora trovare in uno dei vertici esistenti V F
c. la soluzione ottima può anche non esistere. V F

Applicazione

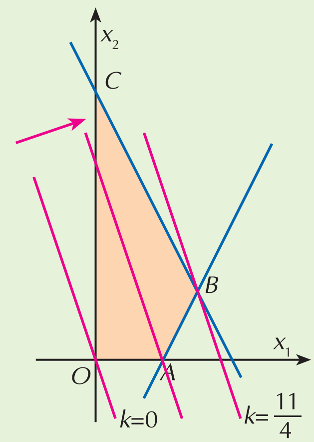
Determina, quando esistono, i minimi ed i massimi delle seguenti funzioni obiettivo z, soggette al sistema di vincoli indicato.

76 **ESERCIZIO GUIDA**

$z = 6x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La funzione z, da minimizzare e da massimizzare, è lineare e l'insieme di vincoli è individuato da un sistema di disequazioni anch'esse lineari. Scelto un sistema di riferimento ortogonale Ox_1x_2, la regione ammissibile, individuata dal sistema dei vincoli, è il poligono di vertici $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $B\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$ e $C(0, 1)$.



Si può procedere in due modi.

1. Studiare l'andamento delle curve di livello di equazione $6x_1 + 2x_2 = k$.
Esse individuano un fascio di rette che, al crescere di k, si muovono nel verso indicato dalla freccia. Il valore minimo si ha in corrispondenza dell'origine ed è $z(0, 0) = 0$, il valore massimo in corrispondenza del punto B ed è $z\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{4}$.

2. Calcolare la funzione nei vertici del poligono $OABC$:

$z(O) = 0 \qquad z(A) = \frac{3}{2} \qquad z(B) = \frac{11}{4} \qquad z(C) = 2$

dal cui confronto, si ricavano gli stessi risultati determinati attraverso il precedente metodo.

77 $z = x_1 - x_2 + 1$

$$\begin{cases} 25x_1 - x_2 \leq 50 \\ \frac{1}{10}x_1 - x_2 \geq -80 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[$z(0, 80) = -79$; $z(2, 0) = 3$]

78 $z = 60x_1 - 63x_2 + 65$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

[$z(0, 4) = -187$; $z(5, 0) = 365$]

79 $z = 41x_1 - 82x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \leq 35 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z(0, 40) = -3280;\ z\left(\frac{35}{4}, 0\right) = 358{,}75\right]$

80 $z = 23x_1 - 7x_2$

$$\begin{cases} 20x_1 - 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z(0,\ 4) = -28;\ z\left(\frac{30}{23},\ \frac{62}{23}\right) = \frac{256}{23}\right]$

81 $z = -100x_1 + 200x_2 - 100$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z\left(\frac{20}{3},\ 0\right) \approx -766{,}667;\ z(20,\ 20) = 1\,900\right]$

82 $z = 10x_1 - 15x_2 + 30$

$$\begin{cases} 150 \leq x_1 + x_2 \leq 300 \\ -150 \leq x_1 - x_2 \leq 150 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$[z(75,\ 225) = -2\,595;\ z(150,\ 0) = 1\,530]$

83 $z = 21x_1 + 35x_2$

$$\begin{cases} -13x_1 + x_2 \geq -52 \\ -6x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z(0,\ 0) = 0;\ z\left(\frac{62}{7},\ \frac{442}{7}\right) = 2\,396\right]$

84 $z = 33x_1 - 22x_2$

$$\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 70 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z\left(0,\ \frac{70}{3}\right) = \frac{1\,540}{3};\ z(10,\ 10) = 110\right]$

85 $z = 81x_1 - 27x_2 + 10$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \leq 200 \\ x_1 + x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z(0,\ 48) = -1\,286;\ z\left(\frac{392}{9},\ \frac{40}{9}\right) = 3\,418\right]$

86 $z = 40x_1 - 36x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 \geq 0 \\ 4x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\left[z(0,\ 0) = 0;\ z\left(\frac{3}{4},\ 0\right) = 30\right]$

87 $z = 112x_1 + 112x_2$

$$\begin{cases} 15x_1 - x_2 \geq 30 \\ x_1 - 15x_2 \geq 30 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[$z(30,\ 0) = 3\,360$; non esiste massimo]

Determina i massimi ed i minimi assoluti delle seguenti funzioni lineari, soggette a vincoli lineari applicando il metodo delle linee di livello.

88 $f(x, y) = 3x - 5y + 2$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ y \ge 0 \\ y - x \le 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } (0, 5); f(0, 5) = -23 \\ \text{massimo assoluto in } (5, 0); f(5, 0) = 17 \end{array}\right]$

89 $f(x, y) = -6x + y - 1$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ -3 \le y \le 2 \\ x - 2y \ge 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } (4, -3); f(4, -3) = -28 \\ \text{massimo assoluto in } (0, 0); f(0, 0) = -1 \end{array}\right]$

90 $f(x, y) = 2x - y + 6$

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ -2x + 3y - 5 \le 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } \left(0, \frac{5}{3}\right); f\left(0, \frac{5}{3}\right) = \frac{13}{3} \\ \text{massimo assoluto in } (0, 0); f(0, 0) = 6 \end{array}\right]$

91 $f(x, y) = -3x - y + 30$

$$\begin{cases} -3x + y + 12 \ge 0 \\ -3x - y + 3 \le 0 \\ 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 6 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } (5, 6); f(5, 6) = 9 \\ \text{massimo assoluto nei punti del segmento di estremi } (1, 0) \text{ e } (0, 3): f = 27 \end{array}\right]$

92 $f(x, y) = x + 2y - 16$

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ -x + 4 \ge 0 \\ -x - y + 6 \ge 0 \\ 2x - y \ge 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } (0, 0); f(0, 0) = -16 \\ \text{massimo assoluto in } (2, 4); f(2, 4) = -6 \end{array}\right]$

93 $f(x, y) = 3 - 3x - 3y$

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ 0 \le x \le 4 \\ -3x - 4y + 28 \ge 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } (4, 4); f(4, 4) = -21 \\ \text{massimo assoluto in } (0, 0); f(0, 0) = 3 \end{array}\right]$

94 $f(x, y) = -x + y - 5$

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ -x + 3 \ge 0 \\ -x - 2y + 9 \ge 0 \\ 4x - y \ge 0 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{minimo assoluto in } (3, 0); f(3, 0) = -8 \\ \text{massimo assoluto in } (1, 4); f(1, 4) = -2 \end{array}\right]$

Risolvi i seguenti problemi di PL in due variabili.

95 **ESERCIZIO GUIDA**

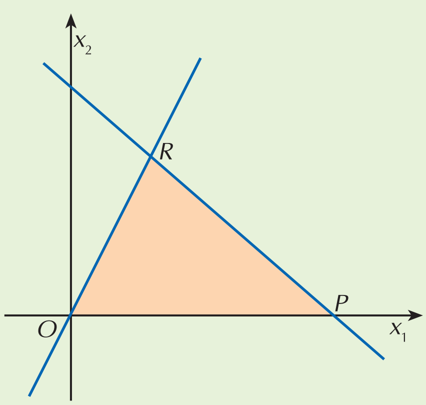
Un parrucchiere, nell'ambito delle proprie attività, acquista e rivende due tipi di shampoo, che indicheremo con A e B; il costo di ogni confezione di tipo A è di € 6,50 e viene rivenduta a € 10, il costo di ogni confezione di tipo B è di € 7,20 e viene rivenduta a € 12. Quante confezioni conviene ordinare per avere il massimo guadagno, se il parrucchiere ritiene utile non investire più di € 2000 nell'acquisto degli shampoo e se, da precedenti esperienze, sa che le richieste per lo shampoo B sono meno del doppio di quelle per lo shampoo A?

Indichiamo con x_1 la quantità di shampoo di tipo A e con x_2 quella di tipo B da acquistare (deve essere $x_1, x_2 \in N$). Tenendo conto del prezzo di acquisto e di quello di vendita, la funzione guadagno, da massimizzare, è data da

$$G = (10 - 6{,}50)x_1 + (12 - 7{,}20)x_2 = 3{,}50x_1 + 4{,}80x_2$$

Il sistema dei vincoli è il seguente $\begin{cases} 6{,}50x_1 + 7{,}20x_2 \leq 2000 \\ x_2 < 2x_1 \\ x_1, x_2 \in N \end{cases}$

e la regione ammissibile da esso individuata è costituita dai punti a coordinate intere del triangolo di vertici $O(0, 0)$, $P\left(\frac{4000}{13}, 0\right)$, $R\left(\frac{20000}{209}, \frac{40000}{209}\right)$.



Calcoliamo il valore assunto dalla funzione guadagno nei vertici di tale triangolo:

$$G(O) = 0 \qquad G(P) = 1076{,}92 \qquad G(R) = 1253{,}59$$

Il punto di massimo si trova quindi in R. Tuttavia, poiché R non ha coordinate intere, dobbiamo trovare il punto a coordinate intere appartenente alla regione dei vincoli più vicino a R le cui coordinate approssimate sono $(95{,}69; 191{,}39)$; consideriamo allora i punti

$$R'(95, 191) \qquad R''(96, 191) \qquad R'''(95, 192) \qquad R^{IV}(96, 192)$$

Di essi R' e R'' non verificano il secondo vincolo, R''' non verifica il primo, solo R^{IV} li verifica entrambi. Il guadagno massimo si ha quindi acquistando e rivendendo 96 confezioni di shampoo di tipo A e 192 di tipo B ed è $G(R^{IV}) = 1257{,}60$.

96 Un negoziante acquista e rivende due tipi di kit di supporto per PC portatili, prevedendo una spesa massima di € 30000. Un kit del primo tipo costa € 500 ed il negoziante lo rivende a € 950, uno del secondo tipo costa € 450 e viene rivenduto a € 870. Da precedenti esperienze il negoziante sa inoltre che il rap-

porto di vendita dei due kit è di almeno 5 a 4 a favore del primo. Determina la situazione di acquisto ottimale per avere il massimo guadagno.
(Suggerimento: osserva che, indicate con x_1 e x_2 le quantità di kit venduti del primo e del secondo tipo, il vincolo che esprime l'esperienza del negoziante è esprimibile tramite la relazione $4x_1 \geq 5x_2$; inoltre, poiché la soluzione trovata non è intera, devi procedere ad un arrotondamento che rispetti i vincoli)

[$x_1 = 35$; $x_2 = 27$; $G = 27\,090\,(€)$]

97 Per la produzione di due tipi di stampi, che indicheremo con *A* e *B*, un'impresa artigianale può disporre settimanalmente di 1200kg di resina e di 900 ore di lavoro. I dati tecnici relativi alla produzione settimanale sono i seguenti:
- ogni stampo di tipo *A* richiede 5kg di resina e 5 ore di lavorazione;
- ogni stampo di tipo *B* richiede 12kg di resina e 2 ore di lavorazione.

I prezzi a cui gli stampi vengono rivenduti sono rispettivamente € 800 e € 500. Determina il numero di stampi dei due tipi che è opportuno produrre per avere il massimo ricavo possibile.

[168 del tipo *A* e 30 del tipo *B*, ricavo massimo € 149 400]

98 Ad una pelletteria vengono forniti mensilmente non più di 80m^2 di pelle e non più di 100m^2 di tessuto plastificato per produrre borse e zaini. Per confezionare una borsa occorrono 0,4m^2 di pelle e 0,05m^2 di tessuto per gli inserti. Per produrre uno zaino occorrono 0,8m^2 di tessuto e 0,2m^2 di pelle. Per fare una borsa, inoltre, occorrono 3 ore di lavorazione, mentre per fare uno zaino ne occorrono 4 ed il monte ore mensili per questa produzione non può essere superiore a 800 ore. Sapendo che su ogni borsa si ha un guadagno di € 30 e su uno zaino un guadagno di € 20, determina come deve essere organizzata la produzione per avere il massimo guadagno. [160 borse e 80 zaini]

99 Una casa editrice produce cassette audiovisive per la scuola di due differenti tipi. Le cassette passano attraverso due fasi di lavorazione, che indichiamo con *A* e *B*. Le ore necessarie per ogni fase e per ogni cassetta, e quelle totali disponibili settimanalmente sono riportate in tabella.

	Fase *A*	Fase *B*
Cassetta 1	1	2,5
Cassetta 2	1,6	1,6
Totale ore	200	400

Il guadagno netto è di € 6 per il primo tipo di cassetta e di € 8 per il secondo. Determina come deve essere organizzata la produzione per avere il massimo guadagno tenendo presente che le richieste superano la produzione. [133 del primo tipo e 41 del secondo; $G = 1126\,(€)$]

100 Un'azienda deve fare approvvigionamento di due tipi di merce, *A* e *B*, disponendo di non più di € 16 000; lo spazio disponibile in magazzino per queste merci è al massimo di 300m^3. La merce di tipo *A* costa € 40 al quintale e quella di tipo *B* costa € 20 al quintale; ogni quintale di merce di tipo *A* occupa 400dm^3 di spazio e ogni quintale di merce di tipo *B* occupa 500dm^3. Se i costi giornalieri di magazzino sono di € 0,60 al quintale per la merce del primo tipo e di € 0,45 al quintale per la merce del secondo tipo, determina il costo minimo e quello massimo giornaliero che l'azienda deve sostenere per la gestione del magazzino. [costo minimo € 240 in (400, 0); costo massimo € 310 in (166,7; 466,7)]

101 Un agricoltore vuole realizzare un concime particolare per i propri terreni miscelandone due già esistenti, che indichiamo con *A* e *B*. Ogni kg di fertilizzante di tipo *A* contiene il 18% di una particolare sostanza S_1 ed il 15% di una seconda sostanza S_2; ogni kg di fertilizzante di tipo *B* contiene il 20% di S_1 ed il 10% di S_2. Il concime pensato dall'agricoltore deve contenere non meno di 6kg di S_1 e non meno di 4kg di S_2. Come devono essere dosati i due fertilizzanti *A* e *B* per minimizzare il costo del nuovo concime se il primo costa € 1,50 ed il secondo € 1,60 al kg?

[costo minimo € 49 al kg utilizzando ≈ 16,7kg di *A* e ≈ 15kg di *B*]

Applicazione

Costruisci il reticolo associato alle seguenti tabelle delle attività.

102

Attività	Precedenze	Tempi (in mesi)
A	-	2
B	*A*	2
C	*A*	1
D	*A*	1
E	*B-C*	2-3
F	*D*	4
G	*E-F*	1-2

103

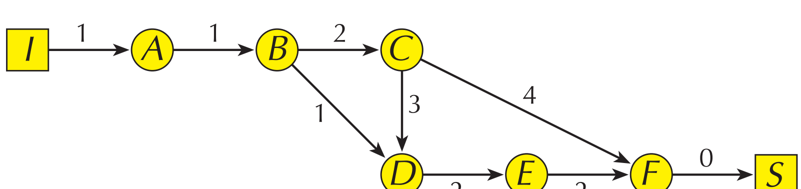
Attività	Precedenze	Tempi (in giorni)
A	-	12
B	*A*	15
C	*B-D*	32-24
D	*A*	28
E	*C*	40
F	*E*	16

104

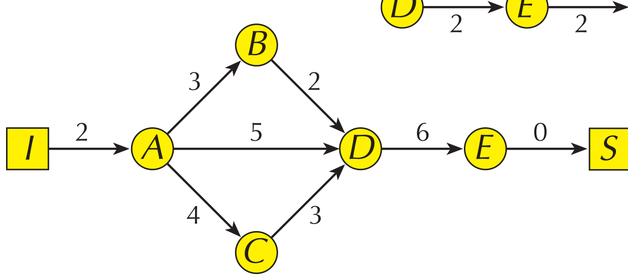
Attività	Precedenze	Tempi (in settimane)
A	-	1
B	*A*	1
C	*A*	2
D	*C*	3
E	*B*	2
F	*E-D*	4

Determina i tempi al più presto e al più tardi ed i percorsi critici dei seguenti reticoli di progetto (i tempi sono misurati in settimane).

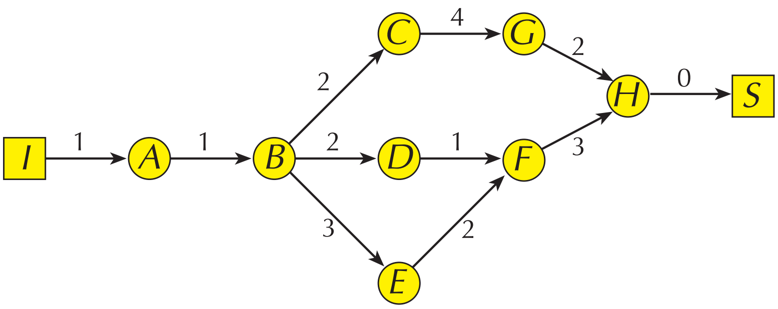
105



106

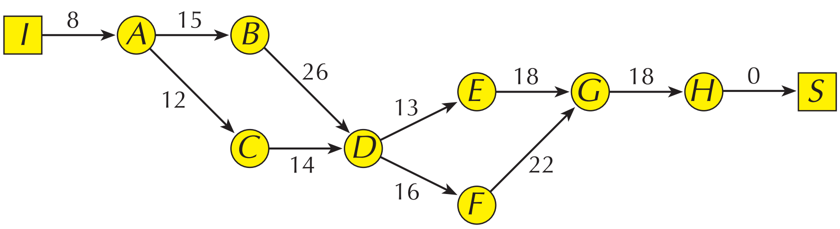


107

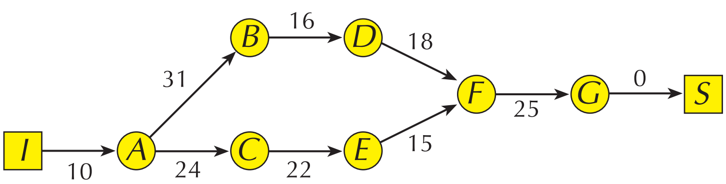


Calcola i termpi al più presto e al più tardi dei seguenti reticoli di progetto, determina poi i tempi di slittamento e imargini liberi e totali, costruendo le relative tabelle (i tempi sono misurati in giorni).

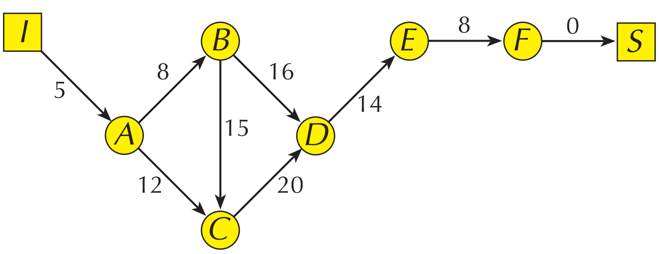
108



109



110



Per la verifica delle competenze

1 Un grossista importa settimanalmente della merce sostenendo i seguenti costi: un costo fisso di € 500 più il costo della merce che è di € 4 al kg. Il prezzo p di vendita al kg è dato dalla relazione $p = 150 - 0,1x$ dove x indica la quantità di merce richiesta. Determina la quantità che si dovrebbe comprare e rivendire settimanalmente per avere:

a. il massimo guadagno [730kg]

b. un guadagno non inferiore a € 40000. [$372,37 < x < 1087,63$]

2 Un agente di commercio, per la vendita di un prodotto a peso, ha le seguenti provvigioni:
- € 1 per ogni kg venduto fino a 100;
- € 1,10 per ogni kg venduto oltre 100 e fino a 170;
- € 1,20 per ogni kg venduto oltre 170.

Per la sua attività sostiene una spesa fissa settimanale di € 330 ed inoltre una spesa variabile pari, in euro, allo 0,1‰ del quadrato del numero di kg venduti. Determina, dopo aver rappresentato graficamente la funzione profitto e supponendo che non vi siano limiti di vendita, la quantità ottimale da vendere settimanalmente per avere il massimo profitto e l'importo di tale profitto. [6000kg; € 3270]

3 Per lo smaltimento di una particolare sostanza, un'azienda stipula un contratto che prevede i seguenti costi:

A. per quantità minori o uguali a 5000kg, un costo base di € 6000 diminuito, in euro, di $(2{,}4 - 4{,}8 \cdot 10^{-4}x)$ per ogni kg da smaltire

B. per quantità superiori a 5000kg, un costo base di € 1000 aumentato, in euro, di $(2{,}4 + 4{,}8 \cdot 10^{-4}x)$ per ogni kg da smaltire

essendo x la quantità, in kg, che deve essere smaltita. Calcola:

a. la quantità da smaltire per avere il minimo costo [2500kg]

b. la spesa da sostenere per lo smaltimento di 5700kg di sostanza. [€ 30275,20]

4 La produzione giornaliera di un certo articolo può essere effettuata seguendo due diversi procedimenti con costi diversi:

1° procedimento: ogni pezzo costa al produttore € 0,20 e si devono sostenere costi fissi di € 1500 al giorno;

2° procedimento: il costo complessivo è dato, in euro, dall'espressione $\frac{x^2}{40000}$ dove x indica il numero dei pezzi prodotti.

Calcola il costo di produzione ottimale in base al numero dei pezzi prodotti.

[$0 < x < 12718$: 2° procedimento; $x \geq 12718$: 1° procedimento]

5 Un'industria produce due tipi di pezzi lavorati P_1 e P_2 costituiti dalla stessa quantità e qualità di materia, ma con diversi processi di lavorazione che impiegano tre macchine *A*, *B*, *C*. Lo schema del lavoro è

	P_1	P_2
Ore macchina *A*	2	1
Ore macchina *B*	3	2
Ore macchina *C*	1	3

Le ore di lavoro macchina disponibili giornalmente sono 8 per *A*, 24 per *B*, 18 per *C*. Il guadagno unitario è di 4£ per i pezzi del primo tipo e di 3£ per i pezzi del secondo tipo. Si vuole programmare la quantità dei pezzi dei due tipi che occorre produrre giornalmente per ottenere il massimo guadagno. (Suggerimento: vi è un vincolo superfluo e la soluzione ottimale non è a coordinate intere, devi allora approssimare in modo che il punto appartenga alla regione ammissibile).

(Maturità tecnico-commerciale, sessione ordinaria 1988)

[massimo guadagno 19£ per 1 pezzo del primo tipo e 5 del secondo]

6 In una dieta non si devono superare le 1500 calorie ed i 100g di proteine al giorno. La carne fornisce un apporto calorico di 350 calorie e di 20g di proteine ogni 100g di prodotto. Il formaggio fornisce un apporto calorico di 300 calorie e di 25g proteine ogni 100 grammi di prodotto. Inoltre, poiché la dieta deve essere equilibrata, la quantità di formaggio non deve superare quella della carne. Il costo dei due alimenti è di € 28 al kg per la carne e di € 23 al kg per il formaggio. Determina come deve essere impostata la dieta per avere il minimo costo, con la massima quantità di alimenti.

[circa 2,22hg di carne e 2,22hg di formaggio; costo minimo € 11,33]

Soluzioni di alcuni esercizi

1 **a.** $x < x_1 \vee x > x_5$; **b.** $x = x_4$; **c.** $x = x_1 \vee x = x_5$; **d.** $x_1 < x < x_2 \vee x_3 < x < x_4$

2 **a.** $x_1 < x < x_2 \vee x_3 < x < x_4$; **b.** $x = x_4$; **c.** $x = x_1$; **d.** $x = x_2$, $x = x_3$

70. $\begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y \leq x + 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$

71. $\begin{cases} y \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2} \\ y \geq \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \\ 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$

72. $\begin{cases} y \leq \dfrac{1}{4}x + 4 \\ y \leq -x + 9 \\ y \geq x - 5 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$

73. $\begin{cases} y \leq -\dfrac{1}{3}x + 7 \\ y \leq -2x + 17 \\ y \geq 3x - 18 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$

74. **b.**

75 **a.** V, **b.** V, **c.** V

Test finale di autovalutazione

1 Un'agenzia per la consegna rapida di pacchi sostiene spese fisse mensili di € 30000. Qual è la quantità minima che deve consegnare mensilmente sapendo che, per ogni kg trasportato, riceve € 2, ma deve pagare € 1 per carburante e personale e € 0,40 per l'assicurazione della merce? Se in un mese può spingere la consegna a 80000kg, quale utile avrà?

10 punti

2 Il sig. Rossi per il gasolio da riscaldamento della sua casa in montagna può scegliere tra le seguenti due forniture:
A: € 0,97 al litro più le spese di trasporto di € 20;
B: € 1 al litro più le spese di trasporto di € 5.
Scrivi per ciascuna fornitura la funzione che rappresenta il costo e determina quale delle due risulta più conveniente.

15 punti

3 Un negozio che ha un profitto mensile di € 15000, per incrementare le vendite decide di effettuare una campagna pubblicitaria. L'agenzia a cui si rivolge propone due alternative *A* e *B*; la stima dei nuovi profitti (in migliaia di euro) in dipendenza dal verificarsi di tre possibili eventi è data dalla seguente tabella:

		ALTERNATIVE		
		A	*B*	Probabilità
EVENTI	E_1	20	22	0,35
	E_2	25	32	0,25
	E_3	30	20	0,40
	M			

a. Completa la tabella e determina la campagna più conveniente in base al criterio del valor medio.

b. Se il proprietario del negozio è disposto a sopportare un rischio massimo pari a $\frac{1}{5}$ del valor medio, qual è la scelta migliore?

15 punti

4 Individua graficamente l'insieme definito dal seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x - 3y - 15 \leq 0 \\ y + 2x \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

10 punti

5 Trova il massimo ed il minimo assunti dalla funzione $z = 25x_1 - 23x_2$ le cui variabili sono soggette al seguente sistema di vincoli

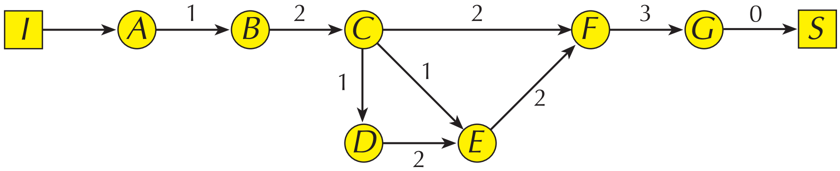
$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \leq 500 \\ 3x_1 - x_2 \leq -20 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

15 punti

6 Un'azienda produce armadi di due differenti modelli. Il costo di costruzione di un armadio dipende dal costo del materiale con cui è prodotto e dal costo di realizzazione. I costi per un armadio del primo tipo sono di € 2000 per i materiali e di € 1000 per l'assemblaggio. I costi per la realizzazione di un armadio del secondo tipo sono di € 1200 per i materiali e di € 400 per la costruzione. L'azienda constata che la massima spesa giornaliera per i materiali è di € 16000, mentre per la realizzazione è di € 6000. Il guadagno su un armadio del primo tipo è di € 700 mentre su un armadio del secondo tipo è di € 400. Determina quanti armadi dei due tipi devono essere prodotti giornalmente per massimizzare il guadagno.

15 punti

7 Calcola i tempi al più presto e al più tardi dei seguenti reticoli di progetto, determina poi i tempi di slittamento e i margini liberi e totali, costruendo le relative tabelle (i tempi sono misurati in settimane).



10 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	Totale
Punteggio								

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

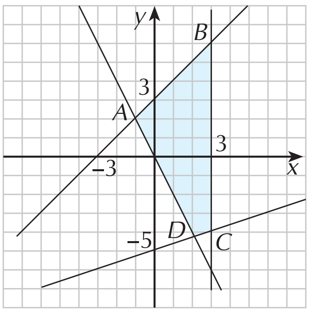
Soluzioni

1 50 000 kg; € 18 000

2 $0 < x \leq 500 : B$; $x \geq 500 : A$

3 **a.** $M(A) = 25{,}25$; $M(B) = 23{,}7$; **b.** A

4



5 $z(0,\ 100) = -2300$; $z(0,\ 20) = -460$

6 2 del primo tipo, 10 del secondo tipo; $G = 5400\,(€)$

7