Le disequazioni letterali

Quando una disequazione dipende da un parametro, è necessario valutare il segno del coefficiente di x in modo da sapere quando si divide per un numero positivo e quando per un numero negativo.
Per esempio, se dopo aver svolto gli opportuni calcoli una disequazione si presenta nella forma

$$(a+2)x > 4$$

occorre valutare il segno dell'espressione $(a+2)$:

- se $a+2>0$, cioè $a>-2$, per trovare l'intervallo delle soluzioni dividiamo per un numero positivo e quindi possiamo scrivere $\quad x > \dfrac{4}{a+2}$
- se $a+2<0$, cioè $a<-2$, per trovare l'intervallo delle soluzioni dividiamo per un numero negativo e quindi dobbiamo scrivere $\quad x < \dfrac{4}{a+2}$
- se $a+2=0$, cioè $a=-2$, la disequazione assume la forma $0 \cdot x > 4$, cioè $0>4$, che è una relazione falsa per ogni valore di x e quindi per $a=-2$ la disequazione non è mai verificata.

Vediamo qualche altro esempio.

■ Risolviamo la disequazione $\quad b-2x<(1-b)x+4$
Sviluppiamo innanzi tutto i calcoli in modo da arrivare ad avere i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo:

$$b-2x<x-bx+4 \quad \rightarrow \quad bx-3x<4-b \quad \rightarrow \quad x(b-3)<4-b$$

Per determinare l'intervallo delle soluzioni dobbiamo dividere entrambi i membri per $b-3$ e dobbiamo quindi analizzare il segno di questo binomio:

- se $b-3>0$, cioè $b>3$, il coefficiente di x è un numero positivo e quindi possiamo scrivere $x<\dfrac{4-b}{b-3}$
- se $b-3<0$, cioè $b<3$, il coefficiente di x è un numero negativo, dobbiamo allora cambiare verso alla disequazione e scrivere $\quad x>\dfrac{4-b}{b-3}$
- se $b-3=0$, cioè $b=3$, la disequazione assume la forma $0 \cdot x<4-3$, cioè $0<1$, che è una relazione vera per ogni valore di x; quindi per $b=3$ la disequazione ha per soluzione R.

■ Risolviamo la disequazione $\quad (a-2)(x-1)-a>\dfrac{1}{2}x(a-3)$
Sviluppiamo i calcoli:

$$2(a-2)(x-1)-2a>x(a-3) \quad \rightarrow \quad 2ax-4x-4a+4>ax-3x$$

$$ax-x>4a-4 \quad \rightarrow \quad x(a-1)>4(a-1)$$

Poiché dobbiamo dividere per $a-1$, analizziamo il segno di questo binomio:

- se $a-1>0$, cioè $a>1$, il coefficiente di x è un numero positivo e quindi possiamo scrivere

$$x>\frac{4(a-1)}{a-1} \quad \rightarrow \quad x>4$$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

- se $a - 1 < 0$, cioè $a < 1$, il coefficiente di x è un numero negativo e quindi dobbiamo scrivere

  $x < \frac{4(a-1)}{a-1} \quad \rightarrow \quad x < 4$

- se $a - 1 = 0$, cioè $a = 1$, la disequazione assume la forma $0 \cdot x > 4 \cdot 0$, cioè $0 > 0$, che è una relazione falsa e quindi per $a = 1$ la disequazione non è mai verificata.

ESERCIZI

Applicazione

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3x - a(x+2) > (a+2)(x-1)$

Sviluppiamo i calcoli e riscriviamo la disequazione nella forma solita:

$3x - ax - 2a > ax + 2x - a - 2 \quad \rightarrow \quad x - 2ax > a - 2 \quad \rightarrow \quad (1-2a)x > a - 2$

Discutiamo il segno del binomio $1 - 2a$:

- se $1 - 2a > 0$, cioè $a < \frac{1}{2}$: la disequazione ha soluzione $x > \frac{a-2}{1-2a}$
- se $1 - 2a < 0$, cioè $a > \frac{1}{2}$: la disequazione ha soluzione $x < \frac{a-2}{1-2a}$
- se $1 - 2a = 0$, cioè $a = \frac{1}{2}$: la disequazione diventa $0 \cdot x > \frac{1}{2} - 2 \quad \rightarrow \quad 0 > -\frac{3}{2}$

Avendo ottenuto una disuguaglianza vera per qualsiasi valore di x, se $a = \frac{1}{2}$ la disequazione ha per soluzione R.

2 $(a-2)x > 3ax - 1$ $\left[a < -1 : x > \frac{1}{2(a+1)};\ a = -1 : S = R;\ a > -1 : x < \frac{1}{2(a+1)}\right]$

3 $\frac{1}{4}x + (x-2)(a+1) \le \frac{1}{2}(x+a)$ $\left[a < -\frac{3}{4} : x \ge \frac{2(5a+4)}{4a+3};\ a > -\frac{3}{4} : x \le \frac{2(5a+4)}{4a+3};\ a = -\frac{3}{4} : S = R\right]$

4 $\frac{a+x}{2} - \frac{2a-x}{3} > a + \frac{x}{3}$ $\left[\forall a : x > \frac{7}{3}a\right]$

5 $2b - x < x(1-b) + b$ $\left[b < 2 : x > \frac{b}{2-b};\ b = 2 : S = \varnothing;\ b > 2 : x < \frac{b}{2-b}\right]$

6 $(2b-1)x + (b+1)(x-1) < \frac{2}{3}bx + 3$ $\left[b < 0 : x > \frac{3(b+4)}{7b};\ b > 0 : x < \frac{3(b+4)}{7b};\ b = 0 : S = R\right]$

7 $\frac{x+b}{3} - \frac{x-b}{2} \le x + \frac{1}{6}b$ $\left[\forall b : x \ge \frac{4}{7}b\right]$

8 $a(4x-1) - (2a+1)x \ge 1 - a$ $\left[a < \frac{1}{2} : x \le \frac{1}{2a-1};\ a = \frac{1}{2} : S = \varnothing;\ a > \frac{1}{2} : x \ge \frac{1}{2a-1}\right]$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

9 $\dfrac{x(2b+1)}{2}+\dfrac{5x-b}{4}\geq 1-\dfrac{1}{2}b$ $\left[b<-\dfrac{7}{4}: x\leq\dfrac{4-b}{4b+7}; b>-\dfrac{7}{4}: x\geq\dfrac{4-b}{4b+7}; b=-\dfrac{7}{4}: S=\varnothing\right]$

10 $2\left(\dfrac{x+a}{2}-\dfrac{ax-1}{3}\right)-1>\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{2x-a}{2}\right)$ $\left[a<\dfrac{1}{2}: x>\dfrac{3(3a-1)}{2(2a-1)}; a>\dfrac{1}{2}: x<\dfrac{3(3a-1)}{2(2a-1)}; a=\dfrac{1}{2}: S=R\right]$

11 $2x+\dfrac{2}{3}a(x-2)>\dfrac{3a(x-2)}{6}$ $\left[a<-12: x<\dfrac{2a}{a+12}; a>-12: x>\dfrac{2a}{a+12}; a=-12: S=R\right]$

12 $\dfrac{b+x}{2}\left(\dfrac{2b+x}{3}-b\right)-\dfrac{1}{6}x^2<(b-1)x+\dfrac{2x-b^2}{6}$ $\left[b<\dfrac{2}{3}: x<0; b=\dfrac{2}{3}: S=\varnothing; b>\dfrac{2}{3}: x>0\right]$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas