Attività di recupero

Cap 1. Il piano cartesiano e la retta

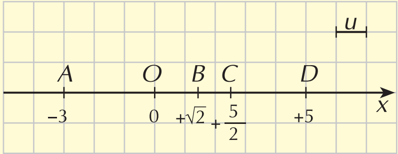
Rivedi la teoria

Il sistema di ascisse sulla retta e i segmenti

Fissato un punto O su una retta orientata a cui si fa corrispondere il numero zero, e fissato un segmento che si assume come unità di misura, ad ogni punto della retta che segue O corrisponde un numero reale positivo, ad ogni punto della retta che precede O corrisponde un numero reale negativo e viceversa.

Il numero che corrisponde a ciascun punto della retta rappresenta la sua **ascissa**; se a è l'ascissa di un punto P si scrive $P(a)$.

Nella figura a lato sono rappresentati i punti $A(-3)$, $B(+\sqrt{2})$, $C\left(+\frac{5}{2}\right)$, $D(+5)$.



I segmenti sulla retta

Un segmento AB su una retta orientata è individuato dai suoi estremi; se $A(x_A)$ e $B(x_B)$ allora:

- la misura del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ è data dalla differenza fra l'ascissa del secondo estremo e quella del primo:

  misura di $\overrightarrow{AB} = x_B - x_A$ misura di $\overrightarrow{BA} = x_A - x_B$

  Le misure di sue segmenti opposti sono quindi opposte.

- la misura del segmento AB (non orientato) è data dal modulo della stessa differenza, indipendentemente dall'ordine con cui vengono presi i punti:

  misura di AB $\overline{AB} = |x_B - x_A|$

Per esempio:

- dati i punti $A(-7)$ e $B(+3)$: misura di $\overrightarrow{AB} = +3 - (-7) = +10$

  misura di $\overrightarrow{BA} = -7 - (+3) = -10$

  misura di $AB = |-7 - 3| = 10$

Il punto medio di un segmento

L'ascissa x_M del punto medio M di un segmento AB di estremi $A(x_A)$ e $B(x_B)$ è la semisomma delle ascisse dei suoi estremi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Per esempio, il punto medio del segmento di estremi $A(-4)$ e $B(+5)$ ha ascissa $x_M = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$

Fai gli esercizi

1 Calcola la misura dei segmenti $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ e AB individuati dalle seguenti coppie di punti:
$A(-2)$ $B(-5)$ $A(+8)$ $B(-4)$ $A(+7)$ $B(-3)$

2 Fissato un sistema di ascisse su una retta orientata, rappresenta i punti $A\left(-\frac{3}{2}\right)$, $B(+5)$, $C\left(+\frac{7}{2}\right)$ e calcola poi la misura dei segmenti $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ e le ascisse dei loro punti medi.

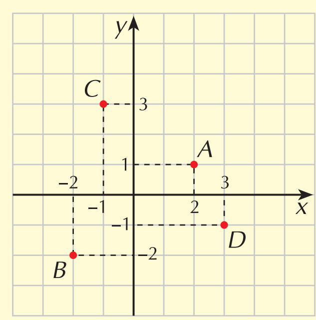
3 Dati i punti $A(-4)$, $B(-2)$ e $C(+6)$ calcola:
a. la misura del segmento non orientato MN, essendo M punto medio di AB e N quello di BC;
b. calcola le misure dei segmenti orientati $\overrightarrow{MR}$ e $\overrightarrow{NR}$, essendo R il punto medio di AC.

4 Di un segmento AB sono note l'ascissa $x_A = 3$ dell'estremo A e quella $x_M = -2$ del suo punto medio; calcola l'ascissa di B.

Rivedi la teoria

Il piano cartesiano

Per fissare un **sistema di riferimento** nel piano si considerano due rette orientate fra loro perpendicolari e si fissa su ognuna di esse un sistema di ascisse avente come origine il loro punto di intersezione; se l'unità di misura fissata è la stessa per le due rette il sistema si dice monometrico, altrimenti dimetrico.
Convenzionalmente un asse viene disegnato orizzontale e prende il nome di *asse delle ascisse* o asse x, l'altro si disegna verticale e prende il nome di *asse delle ordinate* o asse y.
In questo modo ad ogni punto del piano viene associata una coppia ordinata di numeri (x, y) e, viceversa, ad ogni coppia ordinata di numeri resta associato un solo punto. Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e le coppie ordinate (x, y) di numeri reali.
Per esempio, nella figura a lato sono rappresentati i punti $A(2, 1)$, $B(-2, -2)$, $C(-1, 3)$, $D(3, -1)$.



I segmenti nel piano

I segmenti che si considerano nel piano cartesiano sono tutti segmenti non orientati; se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:

- la misura del segmento AB è $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  Questa formula si semplifica se il segmento è parallelo a uno degli assi cartesiani:
  - se $y_A = y_B$ (segmento parallelo all'asse x): $\overline{AB} = |x_B - x_A|$
  - se $x_A = x_B$ (segmento parallelo all'asse y): $\overline{AB} = |y_B - y_A|$
- il punto medio del segmento AB ha coordinate $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Per esempio, dati i punti $A(2, \sqrt{2})$, $B(3, 3\sqrt{2})$, $C(3, \sqrt{2})$, calcoliamo le misure dei segmenti AB, AC, BC e le coordinate dei loro punti medi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (3\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{9} = 3$$

$\overline{AC} = |3 - 2| = 1$ perché i punti A e C, avendo la stessa ordinata, individuano un segmento parallelo all'asse x

$\overline{BC} = |\sqrt{2} - 3\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$ perché i punti B e C, avendo la stessa ascissa, individuano un segmento parallelo all'asse y

Punto medio M del segmento AB $M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}\right)$ cioè $M\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$

Punto medio N del segmento AC $N\left(\frac{2+3}{2}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)$ cioè $N\left(\frac{5}{2}, \sqrt{2}\right)$

Punto medio S del segmento BC $S\left(\frac{3+3}{2}, \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)$ cioè $S(3, 2\sqrt{2})$

Fai gli esercizi

5 Dopo aver rappresentato in un sistema di riferimento monometrico ciascuno dei punti indicati, completa la frase ad essi relativa:

a. $A(2, 0)$; tutti i punti che hanno ordinata nulla, appartengono ....
b. $B(0, -4)$; tutti i punti che hanno ascissa nulla, appartengono ....
c. $C(+3, +4)$; tutti i punti che hanno entrambe le coordinate positive appartengono ....
d. $D(-4, -3)$; tutti i punti che hanno entrambe le coordinate negative appartengono ....
e. $E(-2, +5)$; tutti i punti che hanno ascissa negativa e ordinata positiva appartengono ....
f. $F(+3, -4)$; tutti i punti che hanno ascissa positiva e ordinata negativa appartengono ....

6 I punti $A(-2, 3)$, $B(3, -1)$, $C(3, 5)$ individuano un triangolo; calcola:

a. il suo perimetro
b. le coordinate dei punti medi dei suoi lati
c. la lunghezza delle mediane del triangolo.

7 Del triangolo isoscele ABC di base BC si sa che $B(-4, 3)$, $C(0, -1)$; si sa inoltre che il punto medio M del lato AB ha coordinate $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Trova le coordinate del vertice A e la misura del perimetro del triangolo.

8 Verifica che i punti $A(3, 4)$, $B(5, 6)$, $C(3, 3)$ e $D(1, 1)$ formano un parallelogramma e che le diagonali hanno lo stesso punto medio.

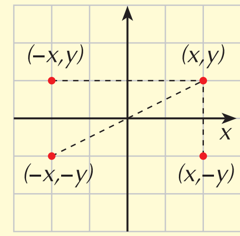
9 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(6, 3)$, verifica che è isoscele e determinane il perimetro e l'area. Indicato poi con D il punto medio del segmento BC e con E il punto medio del segmento AC, calcola il perimetro del quadrilatero $ABDE$.

Rivedi la teoria

Particolari simmetrie nel piano cartesiano

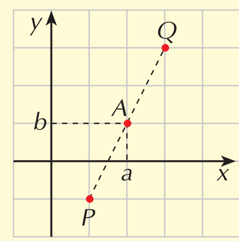
Osservando la figura di pagina seguente si deduce che:

- due punti sono **simmetrici rispetto all'asse x** se hanno la stessa ascissa e ordinate opposte:
  $(x, y) \quad \to \quad (x, -y)$
- due punti sono **simmetrici rispetto all'asse y** se hanno la stessa ordinata e ascisse opposte:
  $(x, y) \quad \to \quad (-x, y)$
- due punti sono **simmetrici rispetto all'origine O** se hanno ascisse e ordinate opposte:
  $(x, y) \quad \to \quad (-x, -y)$



Per esempio, dato il punto $P(-1, 3)$:
- il suo simmetrico rispetto all'asse x ha coordinate $(-1, -3)$
- il suo simmetrico rispetto all'asse y ha coordinate $(1, 3)$
- il suo simmetrico rispetto all'origine ha coordinate $(1, -3)$

Se il centro della simmetria è il punto $A(a, b)$ allora il corrispondente di un punto $P(x, y)$ è il punto $Q(x', y')$ tale che A sia il punto medio del segmento PQ. Fra le coordinate dei due punti sussistono allora le seguenti relazioni:



- nella **simmetria di centro** $A(a, b)$: $\quad x' = 2a - x \qquad y' = 2b - y$

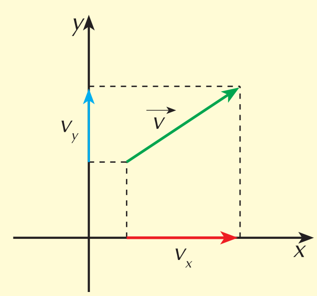
Per esempio, se $A(2, 1)$ e $P(1, -1)$, allora:

$$x' = 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{2} - \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} = 3 \qquad y' = 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{1} - \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{(-1)} = 3 \quad \to \quad Q(3, 3)$$

La traslazione

Una traslazione è individuata da un vettore del quale sono date le componenti cartesiane, cioè la lunghezza dei segmenti orientati che si ottengono proiettando il vettore sugli assi (***figura a lato***); per indicare un vettore e le sue componenti si scrive $\vec{v}(v_x, v_y)$.
Un punto $P(x, y)$ ha come corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}$ il punto $P'(x', y')$ le cui coordinate sono:

$$x' = x + v_x \qquad\qquad y' = y + v_y$$



Per esempio:
- il corrispondente del punto $P(2, -5)$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1, 2)$ è il punto le cui coordinate sono:
  $x' = 2 + 1 = 3 \qquad y' = -5 + 2 = -3 \qquad \to \qquad P'(3, -3)$

Fai gli esercizi

10 Dato il segmento AB di estremi $A(2, -1)$ e $B(-3, 3)$, calcola le coordinate dei segmenti che gli corrispondono:
a. nella simmetria avente per asse l'asse x;
b. nella simmetria avente per asse l'asse y;
c. nella simmetria rispetto all'origine;
d. nella simmetria rispetto al punto $P(0, 3)$.

11 Un rettangolo ha centro nell'origine e i lati paralleli agli assi cartesiani; trova le coordinate dei suoi vertici, il perimetro e l'area sapendo che uno dei suoi vertici ha coordinate $\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}\right)$.

12 Un triangolo ha un vertice nell'origine e gli altri due nei punti di coordinate $(-2, 3)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; calcola le coordinate dei vertici del suo corrispondente nella simmetria di centro $C(1, 2)$.

13 Dato il segmento AB di estremi $A(2, -1)$ e $B(-3, 3)$, considera:
- il suo simmetrico $A'B'$ rispetto all'asse y,
- il simmetrico di $A'B'$ rispetto all'asse x e indicalo con $A''B''$.

Verifica che il punto medio M di AB corrisponde al punto medio M'' di $A''B''$ nella simmetria con centro nell'origine.

14 Trova il corrispondente del segmento di estremi $A(-3, 1)$ e $B(2, 3)$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1, -4)$ e verifica che i due segmenti hanno la stessa lunghezza.

15 Sia $\overrightarrow{AB}$ il vettore di estremi $A(4, -1)$ e $B(-2, 3)$; dopo aver trovato le sue componenti cartesiane, applica la traslazione al triangolo di vertici $P(1, -1)$, $Q(-3, 2)$, $R(0, 2)$ e trova le coordinate dei vertici del triangolo ottenuto.

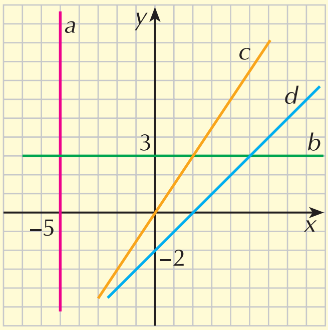
Rivedi la teoria

L'equazione della retta

Nel piano cartesiano, una retta è sempre rappresentata da un'equazione di primo grado nelle variabili x e y; in particolare:

- un'equazione del tipo $x = h$ rappresenta una retta parallela all'asse y
- un'equazione del tipo $y = k$ rappresenta una retta parallela all'asse x
- un'equazione del tipo $y = mx$ rappresenta una retta passante per l'origine del sistema di riferimento
- un'equazione del tipo $y = mx + q$ rappresenta una retta generica non parallela all'asse y

Per esempio (***figura a lato***):



- l'equazione $a: x = -5$
  rappresenta una retta parallela all'asse y
- l'equazione $b: y = 3$
  rappresenta una retta parallela all'asse x
- l'equazione $c: y = \frac{3}{2}x$
  rappresenta una retta per l'origine
- l'equazione $d: y = x - 2$
  rappresenta una retta non passante per l'origine e non parallela agli assi cartesiani

Quando l'equazione di una retta è data nella forma $ax + by + c = 0$, si dice che è espressa in **forma implicita**; quando è data nella forma $y = mx + q$ si dice che è espressa in **forma esplicita**; si può passare da una forma all'altra mediante semplici calcoli. Per esempio:

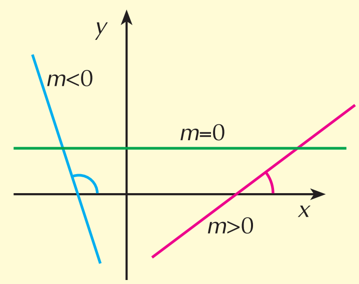
- equazione in forma implicita $\quad 3x - 4y + 1 = 0$
  l'equazione in forma esplicita corrispondente si ottiene ricavando l'espressione di y: $\quad y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$
- equazione in forma esplicita $\quad y = 3x - \frac{1}{2}$
  l'equazione in forma implicita corrispondente si ottiene trasportando tutti i termini al primo membro e calcolando eventualmente il *m.c.m.* fra i denominatori: $\quad 6x - 2y - 1 = 0$.

Il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine

Quando l'equazione di una retta è data in forma esplicita $y = mx + q$, il coefficiente m è il **coefficiente angolare**; esso rappresenta la pendenza della retta rispetto alla direzione positiva dell'asse x.

Se la retta è data in forma implicita $ax + by + c = 0$ ed è $b \neq 0$, si ha che $m = -\frac{a}{b}$ (per trovare questa formula basta esplicitare l'equazione rispetto a y).
Di una retta parallela all'asse y non è definito il coefficiente angolare (è il caso in cui $b = 0$).

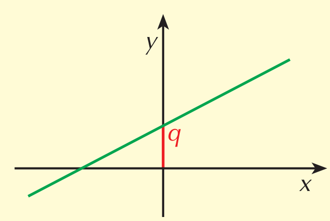
Si presentano i seguenti casi (***figura a lato***):



- se m è negativo, la retta forma un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse delle ascisse
- se $m = 0$, la retta è parallela all'asse x
- se m è positivo, la retta forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

In particolare:

- la bisettrice del primo e terzo quadrante ha coefficiente angolare 1 ed ha quindi equazione $y = x$
- la bisettrice del secondo e quarto quadrante ha coefficiente angolare -1 ed ha quindi equazione $y = -x$.

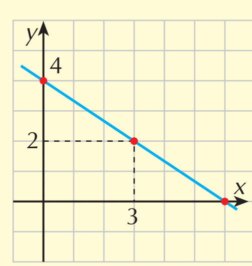


Il parametro q (o anche $-\frac{c}{b}$ se la retta è in forma implicita con $b \neq 0$) rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y e per questo prende il nome di **ordinata all'origine (*figura a lato*)**.

Il grafico di una retta

Per costruire il grafico di una retta sono necessari e sufficienti due punti che si possono trovare attribuendo due particolari valori alla variabile x e calcolando i corrispondenti valori delle ordinate.
Se la retta è scritta in forma implicita conviene dapprima riscriverla in forma esplicita.
Per esempio, per disegnare la retta di equazione $2x + 3y - 12 = 0$:

- scriviamo l'equazione in forma esplicita: $y = -\frac{2}{3}x + 4$
- attribuiamo a x il valore 0 e troviamo che $y = 4 \quad \rightarrow \quad$ la retta passa per il punto $(0, 4)$
- attribuiamo a x il valore 3 e troviamo che $y = 2 \quad \rightarrow \quad$ la retta passa per il punto $(3, 2)$



Disegnati questi due punti nel piano cartesiano, possiamo poi tracciare la retta come nella figura a lato.

Fai gli esercizi

16 Individua la tipologia delle rette che hanno le seguenti equazioni; trova, quando esistono, il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine e traccia il loro grafico:

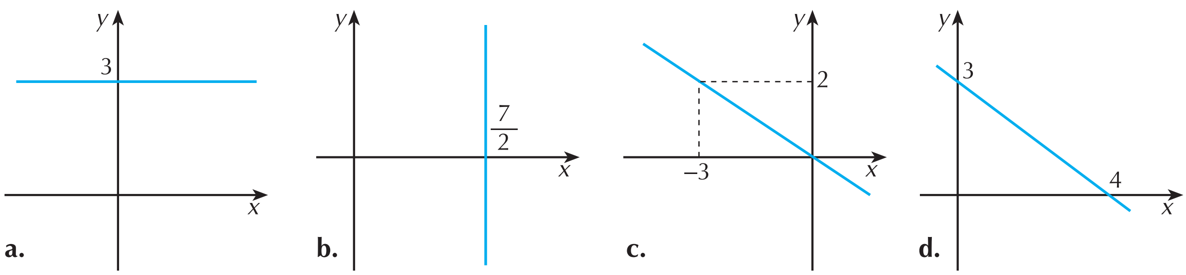
a. $3x - 1 = 0$ **b.** $y + 2 = 0$ **c.** $y = -\frac{3}{4}x$ **d.** $-2x + 3y - 5 = 0$ **e.** $3y = 0$ **f.** $y = x - 1$

17 Sono assegnate le rette che hanno ciascuna le seguenti caratteristiche:
① è parallela all'asse y e taglia l'asse delle ascisse nel punto di coordinate $(-3, 0)$
② è parallela all'asse x e taglia l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $(0, 5)$
③ passa per l'origine e per il punto $P(6, 18)$
④ passa per l'origine ed ha coefficiente angolare -4.

Associa alle caratteristiche descritte, una delle seguenti equazioni:

a. $y = 3x$ **b.** $y = 5$ **c.** $y = -4x$ **d.** $x = -3$

18 Osserva i grafici in figura e scrivi l'equazione delle rette corrispondenti:



19 Delle seguenti equazioni riscrivi in forma esplicita quelle date in forma implicita e viceversa, quindi traccia il grafico delle rette corrispondenti usando la forma di equazione più conveniente.

a. $y = \frac{1}{2}x + 3$ **b.** $5 = 3y - 3x$ **c.** $4y = 5x$ **d.** $x = \frac{1}{3}y + 2$

Rivedi la teoria

Per trovare il coefficiente angolare

Se di una retta sono note le coordinate di due punti, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, il coefficiente angolare m della retta passante per P_1 e P_2 è dato dalla seguente relazione:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Per esempio, il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(3, 2)$ e $(5, -1)$ è: $m = \frac{-1-2}{5-3} = -\frac{3}{2}$

Per trovare l'equazione di una retta

Una retta è individuata in modo unico se si conoscono:

- le coordinate di un punto $P(x_0, y_0)$ e il coefficiente angolare m; in questo caso, per trovarne l'equazione si usa la formula

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Per esempio, se $P(2, -5)$ e $m = \frac{1}{2}$ allora la retta ha equazione $y + 5 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 6$

- le coordinate di due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$; in questo caso, **se la retta non è parallela agli assi cartesiani**, cioè se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, per trovarne l'equazione si usa la formula

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Per esempio, se $A(-1, 3)$ e $B(2, -2)$, la retta ha equazione: $\dfrac{y-3}{-2-3} = \dfrac{x+1}{2+1} \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 4 = 0$

Si ottiene ovviamente la stessa equazione se si scambiano i due punti:

$$\frac{y+2}{3+2} = \frac{x-2}{-1-2} \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 4 = 0$$

Rette perpendicolari e rette parallele

Due rette di coefficienti angolari m e m' sono:

- parallele se $m' = m$
- perpendicolari se $m' = -\dfrac{1}{m}$

Per esempio:

- sono parallele le rette di equazioni $3x - 4y + 1 = 0$ e $3x - 4y + 5 = 0$ perché per entrambe $m = \dfrac{3}{4}$
- sono perpendicolari le rette di equazioni $x + 2y - 1 = 0$ e $2x - y + 3 = 0$ perché i rispettivi coefficienti angolari sono $-\dfrac{1}{2}$ e 2.

Fai gli esercizi

20 Trova il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $A(0, 1)$ e $B(-2, 2)$ e verifica che è uguale a quello della retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$. Che cosa si può dire delle due rette?

21 **ESERCIZIO GUIDA**

Scrivi l'equazione delle rette che sono i lati del triangolo di vertici $A(3, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(-2, -3)$.

I punti A e B hanno la stessa ordinata quindi la retta AB è parallela all'asse x; essa ha quindi equazione ....

I punti B e C hanno la stessa ascissa quindi la retta BC è parallela all'asse y; essa ha quindi equazione ....

In questi due casi non sarebbe stato possibile usare la formula della retta per due punti.

La retta AC non è parallela agli assi, quindi si può trovare la sua equazione in due modi:

- determinando il coefficiente angolare e usando poi la formula $y - y_0 = m(x - x_0)$ scegliendo come punto (x_0, y_0) uno dei due punti A o C
- applicando la formula $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Completa trovando l'equazione di AC.

22 Scrivi l'equazione della retta che soddisfa le seguenti condizioni:

a. passa per $P(-2, -1)$ e ha coefficiente angolare $m = 3$;

b. passa per l'origine e ha coefficiente angolare uguale a quello della retta che passa per i punti di coordinate $(0,\ 4)$ e $(3,\ 0)$;

c. passa per i punti di coordinate $(-2,\ 4)$ e $(-2,\ 0)$.

23 Indica quali fra le seguenti coppie di rette sono parallele oppure perpendicolari:

a. $r: 3x - 6y = 2$ $\quad s: x - 2y + 1 = 0$ $\qquad$ **b.** $r: x - 3y = 1$ $\quad s: 3x + y - 2 = 0$

c. $r: 2x + y = 4$ $\quad s: 2x - y - 3 = 0$ $\qquad$ **d.** $r: -x + y + 1 = 0$ $\quad s: y + x - 3 = 0$

e. $r: 3x - 3y = 2$ $\quad s: 3x - 3y = 1$ $\qquad$ **f.** $r: x + 3 = 0$ $\quad s: y - 2 = 0$

24 Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(0,\ 3)$ ed è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

25 Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $A(1,\ -4)$ ed è perpendicolare alla retta $x + 2y = 0$.

26 Scrivi l'equazione delle rette che passano per il punto $A(-3,\ -2)$ e che sono rispettivamente parallela e perpendicolare a quella di equazione $3x - y + 1 = 0$.

27 Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $A(0,\ -3)$ ed è perpendicolare alla retta passante per i punti $P(1,\ -2)$ e $Q(3,\ 5)$.

28 Scrivi l'equazione delle due rette che passano per l'origine degli assi e che sono rispettivamente parallela e perpendicolare a quella che passa per i punti $A(1,\ 0)$ e $B(3,\ -2)$. Ottieni delle rette particolari, quali?

Rivedi la teoria

L'intersezione di due rette

Il punto d'intersezione di due rette, se esiste, si determina risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni. In particolare:

- se il sistema è determinato le rette sono incidenti e la sua soluzione rappresenta le coordinate del punto intersezione
- se il sistema è indeterminato le rette sono coincidenti
- se il sistema è impossibile le rette sono parallele e distinte.

La distanza di un punto da una retta

Per calcolare la distanza del punto $P(x_0,\ y_0)$ dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$ si applica la formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Per applicare correttamente questa formula **l'equazione della retta deve essere scritta in forma implicita**.

Per esempio:

- la distanza del punto $P(3,\ -4)$ dalla retta di equazione $2x - 5y + 1 = 0$ è

  $$d = \frac{|2 \cdot 3 - 5 \cdot (-4) + 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{27}{\sqrt{29}}$$

- per calcolare la distanza del punto $Q(-2,\ 1)$ dalla retta di equazione $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ bisogna prima scrivere l'equazione della retta in forma implicita: $3x - 4y - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad d = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$

Fai gli esercizi

29 Trova, se esiste il punto di intersezione delle seguenti coppie di rette:

a. $r: x + 2y - 7 = 0$ $\quad s: 3x + 2y + 1 = 0$

b. $r: x - 3y - 5 = 0$ $\quad s: -2x + 6y + 1 = 0$

c. $r: 5y - 1 = 0$ $\quad s: 2x + 3 = 0$

30 Trova le coordinate dei vertici del triangolo i cui lati appartengono alle rette di equazioni $3x - y - 1 = 0$, $5x + 4y + 4 = 0$, $x - 6y + 28 = 0$.

31 Calcola la distanza del punto $P(-3, -2)$ dalla retta di equazione $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$.

32 Le rette di equazioni $r: y = 2x - 1$, $s: y = -2x + 7$, $t: y = 5$, $v: y = 2x - 5$ intersecandosi individuano un quadrilatero. Verifica che si tratta di un trapezio e calcolane il perimetro e l'area.

33 Calcola l'area del triangolo di vertici $A(0, 3)$, $B(-1, -2)$, $C(5, 2)$.
(Suggerimento: scelta la base, per esempio, il lato BC, devi determinare l'altezza ad essa relativa, quindi devi calcolare la distanza del vertice A dalla retta BC).

34 I lati di un triangolo ABC appartengono alle rette di equazioni

$x - y + 3 = 0$ $\quad y + 2 = 0$ $\quad 2x + y - 6 = 0$

Dopo aver trovato le coordinate dei suoi vertici e indicato con A quello che appartiene al primo quadrante:

a. scrivi le equazioni della mediana e dell'altezza che escono dal vertice A;

b. trova l'area del triangolo formato dalle due rette precedenti e dalla retta del lato BC.

Risultati di alcuni esercizi

2 $\overline{AB} = \frac{13}{2}$; $\overline{AC} = 5$; $\overline{BC} = -\frac{3}{2}$; $M\left(+\frac{7}{4}\right)$; $N(+1)$; $P\left(+\frac{17}{4}\right)$

3 **a.** $\overline{MN} = 5$; **b.** $\overrightarrow{MR} = 4$, $\overrightarrow{NR} = -1$

4 $x_B = -7$

6 $\sqrt{41} + \sqrt{29} + 6$; **b.** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $(3, 2)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$; **c.** $\sqrt{26}$, $\frac{\sqrt{89}}{2}$, $\frac{5}{2}\sqrt{5}$

7 $A(3, 6)$; $2p = 2\sqrt{58} + 4\sqrt{2}$

9 $2p(\widehat{ABC}) = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$; area$(\widehat{ABC}) = 15$; $2p(ABDC) = 3\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$

11 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{3}\right)$; $2p = \frac{58}{3}$; area $= \frac{70}{3}$

12 $(4, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)$, $(2, 4)$

15 $P'(-5, 3)$; $Q'(-9, 6)$; $R'(-6, 6)$

17 ① → d; ② → b; ③ → a; ④ → c

18 **a.** $y = 3$; **b.** $x = \frac{7}{2}$; **c.** $y = -\frac{2}{3}x$; **d.** $y = -\frac{3}{4}x + 3$

21 $y = 2$, $x = -2$, $y = x - 1$

22 **a.** $y = 3x + 5$; **b.** $4x + 3y = 0$; **c.** $x = -2$

23 sono parallele: **a.**, **e.**; sono perpendicolari: **b.**, **d.**, **f.**

24 $y = x + 3$

25 $y = 2x - 6$

26 $y = 3x + 7$; $y = -\frac{1}{3}x - 3$

27 $7y + 2x + 21 = 0$

28 $y = \pm x$

29 **a.** $\left(-4, \frac{11}{2}\right)$; **b.** parallele; **c.** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{5}\right)$

30 $(2, 5)$; $(-4, 4)$; $(0, -1)$

31 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

32 $2p = 2 + 4\sqrt{5}$; area $= 6$

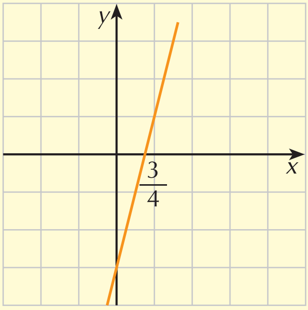
33 13

34 $A(1, 4)$, $B(4, -2)$, $C(-5, -2)$; **a.** $y = 4x$; $x = 1$; **b.** area $= \frac{9}{2}$

Rivedi la teoria

L'interpretazione grafica di equazioni e disequazioni lineari

Ad ogni equazione lineare della forma $ax + b = 0$ si può associare la retta di equazione $y = ax + b$ e interpretare in questo modo la soluzione dell'equazione come l'ascissa del punto di intersezione della retta con l'asse x. L'ascissa di questo punto prende il nome di **zero** della funzione.

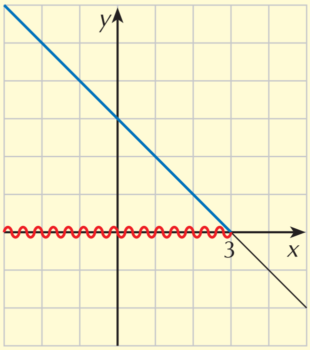


Per esempio, all'equazione

$4x - 3 = 0$ si può associare la funzione $y = 4x - 3$

che interseca l'asse delle ascisse in $x = \frac{3}{4}$; il numero $\frac{3}{4}$ è lo zero della funzione $y = 4x - 3$.

Allo stesso modo possiamo interpretare graficamente le soluzioni di una disequazione lineare data nella forma $ax + b \gtrless 0$.



Per esempio, considerata la disequazione $3 - x > 0$:

- associamo ad essa la retta $y = 3 - x$
- individuiamo il suo zero, che è il punto di ascissa 3
- consideriamo la semiretta i cui punti hanno ordinata positiva (il verso della disequazione è ">")
- troviamo i punti dell'asse x che corrispondono a tale semiretta.

Nel nostro caso individuiamo la semiretta degli x tali che sia $x < 3$.

Fai gli esercizi

Risolvi graficamente le seguenti equazioni lineari.

1 $1 - 4x = 0$ $\quad$ $2 + x = 0$ $\quad$ $\frac{1}{2}x - 1 = 0$

2 $6 - 2x = 0$ $\quad$ $\frac{3}{4}x + 1 = 0$ $\quad$ $\frac{5}{2} - 2x = 0$

3 $\frac{5}{3}x - 10 = 0$ $\quad$ $\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} = 0$ $\quad$ $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}x = 0$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni lineari.

4 $2x - 4 > 0$ $\quad$ $3x + 1 < 0$ $\quad$ $6 - 5x < 0$

5 $8x + 3 > 0$ $\quad$ $1 - 6x > 0$ $\quad$ $5x + 2 > 0$

6 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} < 0$ $\quad$ $\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x > 0$ $\quad$ $2 - \frac{5}{3}x > 0$

Rivedi la teoria

Grafici di funzioni con i moduli

Per costruire il grafico di una funzione che contiene un modulo si deve analizzare il segno dell'argomento del modulo in modo da poterlo togliere.
In pratica ci si comporta in modo diverso a seconda dei casi.

I caso: **la funzione è interamente contenuta nel modulo** $y = |f(x)|$

- si disegna il grafico della funzione $f(x)$
- si lasciano le parti positive del grafico (sono disegnate al di sopra dell'asse x)
- si disegnano le simmetriche rispetto all'asse x delle parti negative (quelle disegnate al di sotto dell'asse x).

Per esempio, disegniamo il grafico di $y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$:

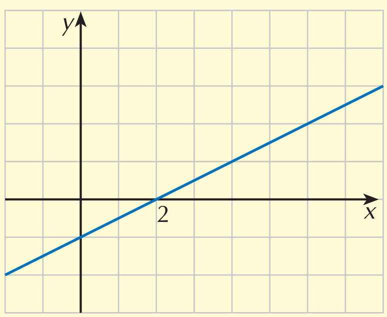


grafico della retta $y = \frac{1}{2}x - 1$

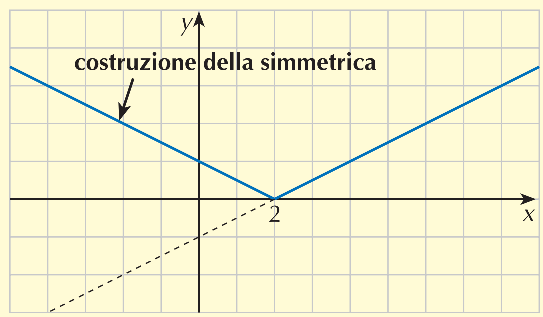
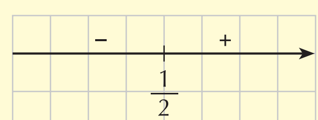


grafico della retta $y = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

II caso: **l'espressione della funzione ha altri termini non in modulo**

Si devono scrivere le diverse espressioni di $f(x)$ studiando il segno dell'argomento del modulo.
Per esempio, disegniamo il grafico della funzione $y = |2x - 1| + x$

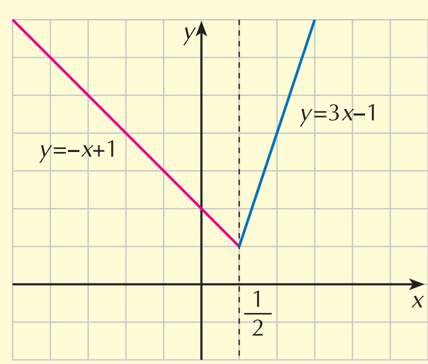
Studiamo il segno del modulo: $2x - 1 \geq 0$ se $x \geq \frac{1}{2}$



La funzione ha dunque espressione diversa a seconda del valore assunto da x :

- se $x \geq \frac{1}{2}$ $\quad y = 2x - 1 + x$ $\quad$ cioè $\quad y = 3x - 1$
- se $x < \frac{1}{2}$ $\quad y = -2x + 1 + x$ $\quad$ cioè $\quad y = -x + 1$

Dobbiamo quindi disegnare due rette distinte a sinistra e a destra di $x = \frac{1}{2}$.

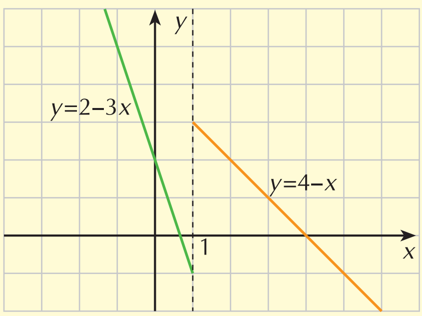


Grafici di funzioni lineari a tratti

Una funzione può essere descritta da due o più espressioni distinte in intervalli diversi; per esempio:

$$y = \begin{cases} 2-3x & \text{se } x \le 1 \\ 4-x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Poiché ciascuna espressione rappresenta comunque una retta, si parla di funzioni lineari a tratti.
Per disegnare queste funzioni si traccia il grafico di ciascuna retta solo nell'insieme in cui è definita; nel nostro caso disegniamo la retta $y = 2 - 3x$ solo a sinistra di $x = 1$, la retta $y = 4 - x$ solo a destra di $x = 1$.



Fai gli esercizi

Traccia i grafici delle seguenti funzioni con i moduli.

7 $y = |1 - x|$ $\quad y = \left|\frac{1}{2}x + 3\right|$ $\quad y = \left|1 - \frac{4}{3}x\right|$

8 $y = |2x + 2| - 1$ $\quad y = |x + 1| - 3$ $\quad y = \left|\frac{1}{3}x - 2\right| + 4$

9 $y = |2 + x| - x$ $\quad y = \left|\frac{3}{2}x + 2\right| + \frac{1}{2}x$ $\quad y = \left|\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}$

10 $y = x + |x - 3|$ $\quad y = 2 - |2x + 3|$ $\quad y = \frac{3}{2} - |4 - x|$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni lineari a tratti.

11 $y = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 2 - x & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$ $\quad y = \begin{cases} x & \text{se } x \le 2 \\ 3 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

12 $y = \begin{cases} -2 & \text{se } x \le 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\quad y = \begin{cases} 3 & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ 2x & \text{se } x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

13 $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{se } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\quad y = \begin{cases} -4x + 2 & \text{se } x \le 2 \\ -x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Cap 3. FUNZIONI NON LINEARI

Rivedi la teoria

Luoghi di punti

Un luogo di punti è l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una stessa proprietà P.

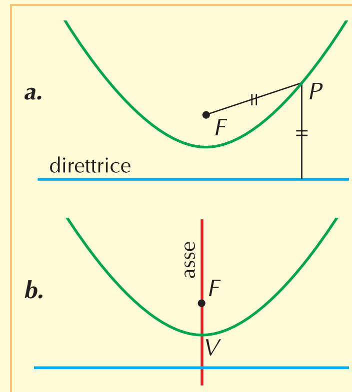
Nel piano cartesiano, un luogo di punti è individuato da una relazione algebrica fra le coordinate x e y dei punti che gli appartengono.
Fra i luoghi che sono rappresentati da una retta individuiamo:

- l'**asse di un segmento**: è il luogo dei punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento
- la **bisettrice di un angolo**: è il luogo dei punti che sono equidistanti dai lati dell'angolo.

La parabola

La parabola è il luogo dei punti che hanno uguale distanza da un punto fisso F detto **fuoco** e da una retta fissa d detta **direttrice**; la rappresentazione grafica di questo luogo è in ***figura a***. Le caratteristiche geometriche di una parabola sono riassunte nelle seguenti considerazioni (***figura b.***):

- è una curva simmetrica rispetto alla retta che passa per il fuoco ed è perpendicolare alla direttrice; tale retta si dice **asse** della parabola
- il punto V di intersezione dell'asse con la parabola si chiama **vertice**.



L'equazione della parabola

In un sistema di riferimento cartesiano che ha l'asse x parallelo alla direttrice e l'asse y parallelo all'asse di simmetria, l'equazione di una parabola ha la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, le coordinate del vertice della parabola e l'equazione dell'asse di simmetria si trovano con le formule:

$$\text{vertice: } V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad \text{asse: } x = -\frac{b}{2a}$$

L'ordinata del vertice, che è un punto della parabola, si può anche trovare sostituendo nella sua equazione il valore calcolato dell'ascissa.
Per esempio, data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 1$ nella quale $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ si ha che:

- $x_V = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \qquad y_V = -\dfrac{4 + 4 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -2 \qquad \rightarrow \qquad V(1, -2)$
- equazione dell'asse $\quad x = 1$

Per calcolare l'ordinata del vertice, una volta trovata la sua ascissa, si può anche procedere per sostituzione: $\quad y_V = 1 - 2 \cdot 1 - 1 = -2$.

Si può inoltre dire che se $a > 0$ la parabola è concava verso l'alto, se $a < 0$ è concava verso il basso.

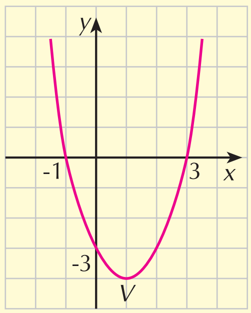
Il grafico della parabola

Per tracciare il grafico di una parabola si devono sempre determinare le coordinate del vertice e quelle di qualche altro punto a nostra scelta. Nella ricerca di questi punti occorre tenere presente che l'asse di simmetria della parabola è parallelo all'asse y e passa per il vertice, quindi altri punti, oltre a quelli calcolati, si possono trovare per simmetria. Spesso poi è conveniente attribuire il valore 0 alla x trovando in questo modo il punto di intersezione con l'asse y.

Per esempio, la parabola di equazione $\quad y = x^2 - 2x - 3$

ha vertice $V(1, -4)$, passa per i punti individuati nella seguente tabella e per i loro simmetrici rispetto all'asse della parabola; il suo grafico è nella ***figura a lato***.

x	0	-1
y	-3	0



Le ascisse dei punti in cui la parabola interseca l'asse x sono gli zeri della funzione e sono la rappresentazione grafica delle soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Fai gli esercizi

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati i punti $A(-3, 1)$ e $B(3, 3)$, troviamo l'equazione dell'asse del segmento AB.

Si può risolvere il problema in due modi.

- Trovando l'equazione della retta perpendicolare ad AB e passante per il punto medio M di AB:

$$x_M = \frac{-3+3}{2} = 0 \quad \text{e} \quad y_M = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad M(0, 2) \qquad m_{AB} = \frac{3-1}{3+3} = \frac{1}{3} \qquad m' = -3$$

equazione dell'asse: $y - 2 = -3(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = -3x + 2$

- Applicando il concetto di luogo: se $P(x, y)$ è un punto del luogo, deve essere $\overline{PA} = \overline{PB}$, cioè:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

Svolgendo i calcoli si trova la stessa equazione calcolata col precedente metodo.

2 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette di equazioni $x + y = 0$ e $2x - y + 1 = 0$.

Un punto $P(x, y)$ appartiene alla bisettrice se sono uguali le distanze dalle due rette:

- distanza di P dalla prima retta: $\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$
- distanza di P dalla seconda retta: $\dfrac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}$

Uguagliando le due distanze troviamo: $\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{5} \cdot |x+y| = \sqrt{2} \cdot |2x-y+1|$

Questa relazione equivale alle due equazioni:

$$\sqrt{5} \cdot (x+y) = \sqrt{2} \cdot (2x-y+1) \qquad \vee \qquad \sqrt{5} \cdot (x+y) = -\sqrt{2} \cdot (2x-y+1)$$

che rappresentano le equazioni delle due bisettrici:

$$(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x + (\sqrt{2} + \sqrt{5})y - \sqrt{2} = 0 \qquad \vee \qquad (2\sqrt{2} + \sqrt{5})x + (\sqrt{5} - \sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$$

3 Trova l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(-2, -2)$ e $B(0, 4)$.

4 Trova le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette di equazioni $y = 2$ e $x = 1$.

5 Trova le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette di equazioni $3x - 4y + 1 = 0$ e $x = -2$ e verifica che sono perpendicolari.

Trova le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse delle seguenti parabole e costruiscine poi il grafico.

6 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

7 $y = x^2 + 4x$

8 $y = x^2 + 3x$

9 $y = -x^2 + x - 2$

10 $y = 2x^2 + 1$

11 $y = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$

12 Indicando con x il numero di oggetti prodotti da una certa azienda, il costo C, espresso in Euro, è dato dall'equazione $C = \frac{1}{4}x^2 - 50x + 4000$. Per quale valore di x si ha il minimo costo se la capacità produttiva non può superare le 150 unità?

13 Il guadagno G, espresso in migliaia di euro, che un venditore porta a porta riesce a realizzare è dato dall'espressione $G = 4x - x^2$ dove x rappresenta il numero di contratti che egli riesce a concludere. Rispondi alle domande.
a. E' possibile che riesca a realizzare un guadagno di € 4500?
b. Qual è il massimo guadagno che il venditore può realizzare?

Trova gli zeri delle seguenti funzioni riconoscendo il tipo di curva da esse rappresentato.

14 **a.** $y = 3x + 5$ **b.** $y = 8x^2 + 20x - 12$

15 **a.** $y = 9x^2 + 9x - 4$ **b.** $y = -x^2 + 8x - 15$

16 **a.** $y = 4x + \frac{1}{2}$ **b.** $y = \frac{1}{3}x^2 + 7x$

Rivedi la teoria

La proporzionalità

Due insiemi di grandezze sono **direttamente proporzionali** se sono in corrispondenza biunivoca e se il rapporto fra due qualsiasi grandezze del primo insieme è uguale al rapporto fra le corrispondenti due del secondo insieme.

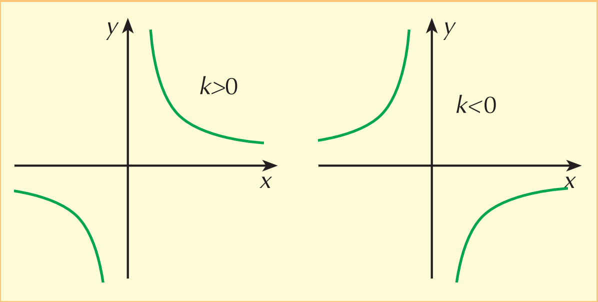
Quando due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali si verifica che il rapporto fra le misure di grandezze corrispondenti è costante; se si indicano con x le misure degli elementi del primo insieme, con y quelle corrispondenti del secondo e con m la costante, la relazione di proporzionalità si esprime con l'equazione

$$y = mx$$

che rappresenta una retta per l'origine.

Due insiemi di grandezze sono **inversamente proporzionali** se sono in corrispondenza biunivoca e se il rapporto fra due qualsiasi grandezze del primo insieme è uguale al rapporto inverso fra le corrispondenti due del secondo insieme.
Quando due insiemi di grandezze sono inversamente proporzionali si verifica che il prodotto fra le misure delle grandezze corrispondenti è costante; se si indicano con x le misure degli elementi del primo insieme, con y quelle corrispondenti del secondo e con k la costante, la relazione di proporzionalità si esprime con l'equazione

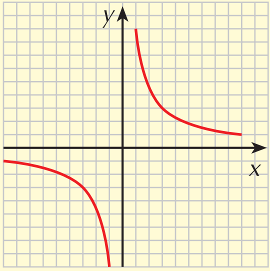
$$xy = k \qquad \text{o anche, se } x \neq 0 \qquad y = \frac{k}{x}$$



che rappresenta un'iperbole equilatera il cui grafico ha la forma indicata nella figura a lato a seconda che sia $k > 0$ oppure $k < 0$.

Per tracciare il grafico di un'iperbole equilatera, per esempio quello di $y = \frac{9}{x}$, si trovano le coordinate di alcuni punti in uno dei quadranti e si costruisce poi anche il ramo simmetrico rispetto all'origine della curva ottenuta:

x	1	3	6	9
y	9	3	$\frac{3}{2}$	1



Fai gli esercizi

17 Costruisci i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità riconoscendone il tipo:

a. $y = -\frac{1}{2}x$ **b.** $y = -\frac{4}{x}$ **c.** $y = \frac{6}{5x}$ **d.** $y = \frac{3}{5}x$

18 Un certo bene viene venduto a € 3 al pezzo; indicando con x il numero di pezzi venduti e con y i corrispondenti ricavi, scrivi la relazione che lega le due variabili, riconoscine il tipo e rappresentala graficamente.

19 Un triangolo ha l'area di 12cm^2; se la misura della base è x e quella dell'altezza è y, scrivi la relazione che lega le due variabili, riconoscine il tipo e rappresentala graficamente.

Risultati di alcuni esercizi.

3 $x + 3y - 2 = 0$
4 $x - y + 1 = 0,\ x + y - 3 = 0$
5 $2x + 4y + 9 = 0;\ 8x - 4y + 11 = 0$
6 $V(0,\ 1),\ x = 0$
7 $V(-2,\ -4),\ x = -2$
8 $V\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right);\ x = -\frac{3}{2}$
9 $V\left(\frac{1}{2},\ -\frac{7}{4}\right);\ x = \frac{1}{2}$
10 $V(0,\ 1);\ x = 0$
11 $V\left(-1,\ \frac{5}{2}\right);\ x = -1$
12 $x = 100,\ C = 1500(€)$
13 **a.** no; **b.** € 4000
14 **a.** $x = -\frac{5}{3}$; **b.** $x = -3 \ \vee\ x = \frac{1}{2}$
15 **a.** $-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}$; **b.** 3, 5
16 **a.** $-\frac{1}{8}$; **b.** 0, – 21
18 $y = 3x$, proporzionalità diretta
19 $xy = 24$, proporzionalità inversa

Verifica del recupero

1 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(2, 4)$, $B(4, 0)$, $C(-2, 2)$ è isoscele e calcolane:
a. il perimetro
b. la lunghezza delle mediane
c. l'area.

2 punti

2 Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(3, -1)$ e che:
a. è parallela all'asse x oppure all'asse y
b. passa per l'origine del sistema di riferimento
c. ha ordinata all'origine uguale a 4
d. è parallela alla retta di equazione $-3y + x + 5 = 0$
e. è perpendicolare alla retta che passa per i punti $(2, 3)$ e $(5, 0)$.

2,5 punti

3 Un parallelogramma ha il centro di simmetria nell'origine del sistema di riferimento e due lati consecutivi appartengono alle rette di equazioni $y = 2x + 4$ e $x - 4y = 5$. Trova le coordinate dei suoi vertici.

1,5 punti

4 Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

a. $y = 1 + |2x - 4|$ **b.** $y = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & x > 0 \end{cases}$

1,5 punti

5 Costruisci il grafico delle seguenti proporzionalità:

a. $y = \frac{7}{3}x$ **b.** $xy = \frac{1}{2}$

1 punto

6 Delle seguenti parabole trova le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse; costruiscine poi il grafico:

a. $y = x^2 - 4x + 2$ **b.** $y = -3x^2 + 6x - 4$ **c.** $y = x^2 - 4$

0,75 punti

7 Trova gli zeri delle seguenti funzioni:

a. $y = x^2 - 2x - 8$ **b.** $y = 4x^2 + 20x + 25$ **c.** $y = -2x^2 + x - 1$

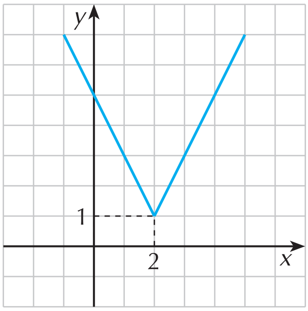
0,75 punti

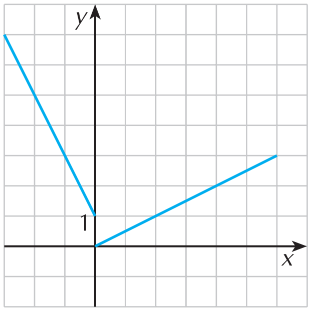
Soluzioni

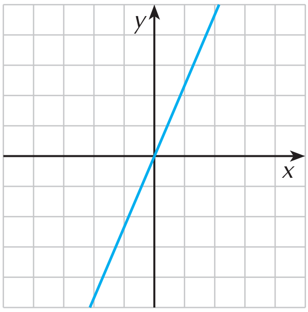
1 **a.** $4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$; **b.** $5,\ 5, \sqrt{10}$; **c.** 10

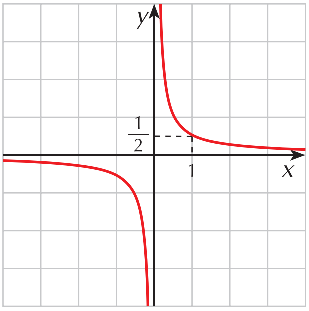
2 **a.** $x=3,\ y=-1$; **b.** $x+3y=0$; **c.** $5x+3y-12=0$; **d.** $x-3y-6=0$; **e.** $x-y-4=0$

3 $(-3,\ -2)$; $(3,\ 2)$; $\left(-\frac{11}{7},\ \frac{6}{7}\right)$; $\left(\frac{11}{7},\ -\frac{6}{7}\right)$

4 **a.** 

; **b.** 

5 **a.** 

; **b.** 

6 **a.** $V(2,\ -2),\ x=2$; **b.** $V(1,\ -1),\ x=1$; **c.** $V(0,\ -4),\ x=0$

7 **a.** $x=-2 \vee x=4$; **b.** $-\frac{5}{2}$; **c.** non esistono zeri

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	
Punteggio								

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

to choose	scegliere	**line**	retta
graph	grafico	**point**	punto
intercept	intercetta, intersezione con l'asse (x o y)	**slope**	coefficiente angolare
to lie	giacere	**vertex (pl. vertices)**	vertice

1 Determine the intercepts of the graph of the equation $3x - 2y = 6$:

a. x-intercept: $(0, 2)$ y-intercept: $(3, 0)$
b. x-intercept: $(0, -3)$ y-intercept: $(2, 0)$
c. x-intercept: $(-3, 0)$ y-intercept: $(0, 2)$
d. x-intercept: $(2, 0)$ y-intercept: $(0, -3)$
e. x-intercept: $(3, 0)$ y-intercept: $(0, -2)$

2 Which of the following points lies on the graph of equation $-3x + 2y = 6$?

a. $(1, 3)$ **b.** $(2, 0)$ **c.** $(0, -3)$ **d.** $(2, 2)$ **e.** $(-6, -6)$

3 If $f(x) = 5x - 6$, what is $f(-4)$?

a. -26 **b.** 24 **c.** 20 **d.** -10 **e.** 14

4 Determine the slope of the line containing the points $(-2, 5)$ and $(8, -3)$.

a. $-\frac{5}{4}$ **b.** $\frac{5}{4}$ **c.** $-\frac{4}{5}$ **d.** $\frac{4}{5}$ **e.** none of these

5 Find the equation of the line which contains the points $(2, 3)$ and $(-3, -2)$.

a. $y = -x - 1$ **b.** $y = -x + 1$ **c.** $y = x + 1$ **d.** $y = x - 1$ **e.** none of these

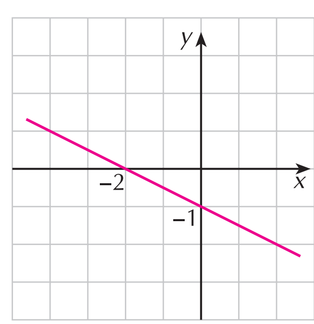
6 Determine the slope of the line that is **a)** parallel to and **b)** perpendicular to the line $2x - y = 6$.

a. parallel: 2 perpendicular: -2 **b.** parallel: -2 perpendicular: $-\frac{1}{2}$

c. parallel: -2 perpendicular: $\frac{1}{2}$ **d.** parallel: 2 perpendicular: $-\frac{1}{2}$ **e.** none of these

7 Calculate the slope from the graph:

a. 2 **b.** -2 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}$ **e.** none of these



8 Find the equation of the line which passes through point $(1, 1)$ and is parallel to line $x - 4y + 2 = 0$.

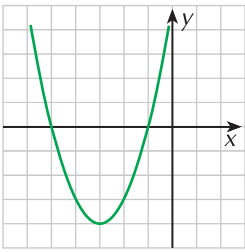
9 Find the equation of the line passing through point $(-4, -1)$ and perpendicular to line $2x + 5y - 6 = 0$.

10 Determine whether points $(0, -1)$, $(4, 11)$, $(-2, -7)$ are collinear (lie on the same line) and in this case find the equation of the line.

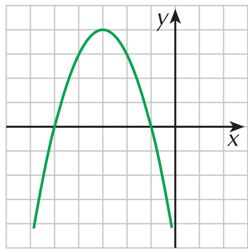
11 Determine the vertex and the x-intercepts for the graph of $y = x^2 - 6x + 8$:

a. vertex $(-3, 35)$ $\quad$ x-intercepts at: $(2, 0)$ $\quad$ $(4, 0)$
b. vertex $(3, -1)$ $\quad$ x-intercepts at: $(2, 0)$ $\quad$ $(4, 0)$
c. vertex $(-3, 35)$ $\quad$ x-intercepts at: $(-2, 0)$ $\quad$ $(-4, 0)$
d. vertex $(3, -1)$ $\quad$ x-intercepts at: $(-2, 0)$ $\quad$ $(-4, 0)$
e. none of these

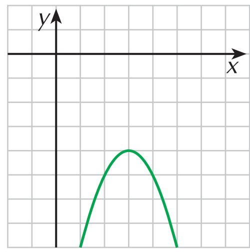
12 Choose the correct graph of the equation $\quad y = (x-3)^2 - 4$



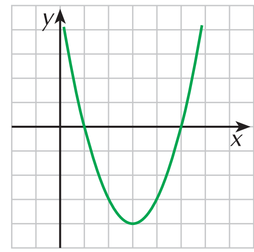
a.



b.



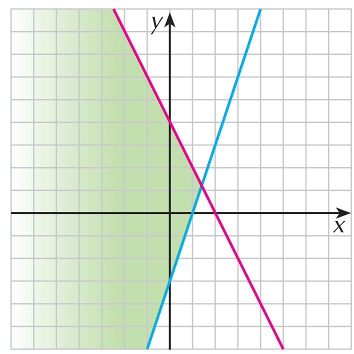
c.



d.

e. none of these.

13 The graph given represents which system of inequalities?



a. $\begin{cases} 2x + y \le 4 \\ 3x - y < 3 \end{cases}$ $\quad$ **b.** $\begin{cases} 2x + y \ge 4 \\ 3x - y > 3 \end{cases}$ $\quad$ **c.** $\begin{cases} 2x - y \le 4 \\ 3x + y > 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - y \ge 4 \\ 3x + y < 3 \end{cases}$ $\quad$ **e.** none of these

1 d. $\quad$ **2** e. $\quad$ **3** a. $\quad$ **4** c. $\quad$ **5** c. $\quad$ **6** d.
7 d. $\quad$ **8** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $\quad$ **9** $y = \frac{5}{2}x + 9$ $\quad$ **10** $y = 3x - 1$ $\quad$ **11** b. $\quad$ **12** d.
13 a.