Matematica in laboratorio

1. Misuriamo gli angoli con GeoGebra

Nascondiamo gli assi cartesiani in modo da usare la finestra grafica come piano euclideo.
Disegniamo un punto C che rappresenti il centro di una circonferenza e creiamo il raggio mediante uno slider r variabile tra 0 e 5 con passo di incremento a tua scelta (va bene anche 0.1 proposto per default).
Con lo strumento 6 - *Circonferenza dati centro e raggio* costruiamo la circonferenza c indicando il punto C come centro e lo slider r come raggio; fissiamo poi due punti A e B su di essa (usa lo strumento 2 - *Punto su un oggetto*).

Tracciamo i raggi CA e CB (chiamiamoli $r1$ e $r2$) e disegniamo l'angolo $\widehat{ACB}$ con lo strumento 8 - Angolo; all'angolo viene attribuita l'etichetta α e viene subito indicata la sua misura in gradi decimali.
Eseguiamo adesso le seguenti operazioni.

- Individuiamo l'arco AB con lo strumento 6 - *Arco di circonferenza dati il centro e due punti* oppure scrivendo nella riga di inserimento il comando

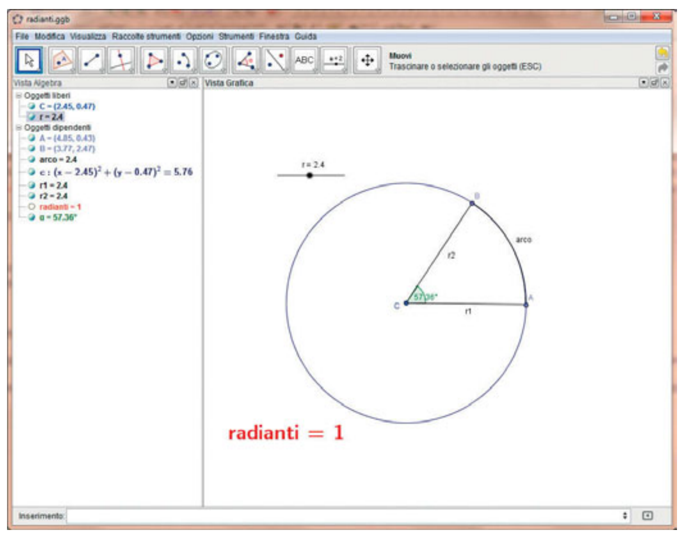
  arco [***c*, *A*, *B***]

  Nella finestra di algebra viene data la misura dell'arco.

- Nella riga di inserimento calcoliamo il rapporto tra la misura dell'arco e il raggio

  radianti = arco / r1

  Trasciniamo nella finestra grafica l'oggetto e ingrandiamo il carattere mediante il menu contestuale.



Lasciando fissi i due punti A e B (quindi l'angolo rimane fisso) e, agendo sullo slider, modifichiamo il raggio della circonferenza; ci accorgiamo che l'ampiezza dell'angolo non cambia. L'ampiezza di un angolo, misurata in radianti, non dipende dal raggio della circonferenza.
Muovendo adesso il punto B cambia anche l'ampiezza dell'angolo e si ottiene la misura di 1 radiante quando α è di 57,36°; questo è l'angolo per il quale l'arco rettificato AB ha la stessa lunghezza del raggio.

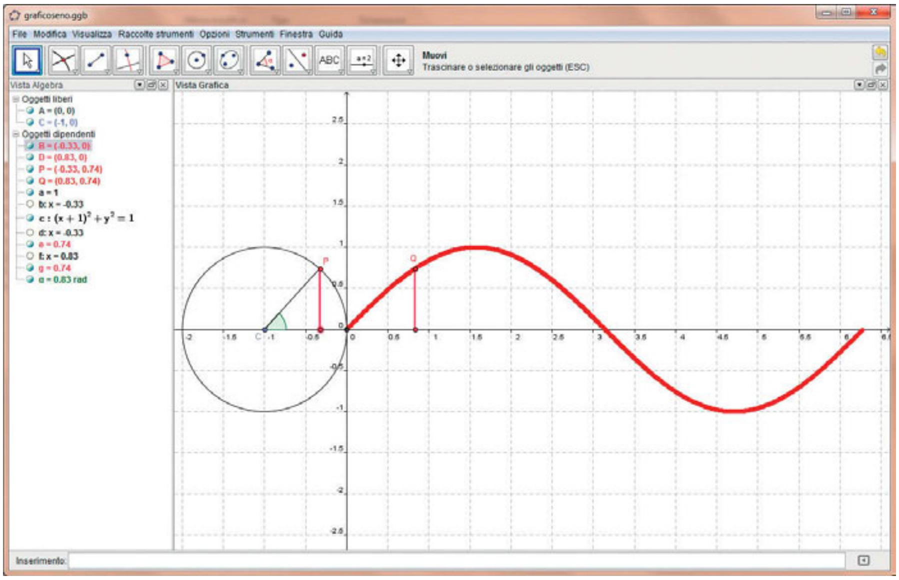
2. I grafici delle funzioni goniometriche con GeoGebra

Costruiamo passo passo il grafico della funzione seno utilizzando la circonferenza goniometrica; segui la procedura.

- Costruiamo la circonferenza che ha centro nel punto $C(-1, 0)$ e raggio 1 (usa lo strumento 6 - *Circonferenza dati centro e raggio*) e che utilizzeremo come circonferenza goniometrica.
- Fissiamo su di essa il punto O di intersezione con l'asse x (primo vertice dell'angolo) e poi un altro punto P (secondo vertice dell'angolo); definiamo quindi l'angolo $\alpha = \widehat{OCP}$.
- Un punto Q che appartiene alla funzione $y = \sin x$ ha come ascissa α e come ordinata l'ordinata del punto P; è quindi necessario esprimere l'ampiezza degli angoli in radianti.
  Apriamo quindi il menu **Opzioni** e scegliamo la voce **Impostazioni**; apriamo la scheda *Avanzate* e scorriamo fino a quando troviamo la voce *Unità angoli*: clicchiamo su *Radianti*.

- Definiamo il punto Q attribuendogli ascissa α e ordinata la y di P : $Q = \left(\alpha, y(P)\right)$
- Apriamo il menu contestuale del punto Q e clicchiamo sulla voce *Traccia attiva*.

Se adesso muoviamo il punto P sulla circonferenza, il punto Q descrive la sinusoide.
Puoi anche far eseguire in modo automatico il movimento del punto P agendo su di esso tramite il menu contestuale (tasto destro del mouse) e attivando la voce *Animazione*.



3. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE CON EXCEL

Il valore del seno, del coseno, della tangente di un angolo α si possono trovare usando Excel come una semplice calcolatrice. Vediamo le principali funzioni che operano sugli angoli; ricordiamo che una formula di Excel inizia sempre con il simbolo $=$.

- La costante π è definita dalla funzione **PI.GRECO( )**

  Per esempio: $=$ PI.GRECO( )/4 restituisce il valore numerico decimale corrispondente a $\frac{\pi}{4}$.

- Le funzioni goniometriche sono:

  SEN(argomento) **COS(argomento)** **TAN(argomento)**

  e restituiscono rispettivamente il seno, il coseno e la tangente dell'angolo il cui valore **in radianti** costituisce l'argomento della funzione. Se l'angolo è espresso in gradi, occorre prima fare la conversione in radianti. Per esempio:

  $=$ COS(2) restituisce il valore del coseno di 2 radianti, cioè $-0{,}416146...$

  $=$ SEN(60*PI.GRECO( )/180) restituisce il valore del seno di 60° dopo averlo convertito in radianti moltiplicandolo per il fattore di conversione $\frac{\pi}{180}$.

La conversione in radianti di un angolo la cui ampiezza è espressa in gradi può anche essere fatta con una funzione specifica:

- **RADIANTI(n)**

  Per esempio: $=$ TAN(RADIANTI(30)) restituisce il valore della tangente di 30° dopo aver convertito la misura dell'angolo in radianti.

- La conversione da radianti a gradi si può fare moltiplicando per il fattore di conversione $\frac{180}{\pi}$, oppure con la funzione

  GRADI(n)

  dove n è l'ampiezza dell'angolo in radianti.

Per esempio:

= GRADI(PI.GRECO( )/6) restituisce 30 che è l'ampiezza in gradi dell'angolo che in radianti misura $\frac{\pi}{6}$.

Vediamo adesso come sfruttare queste funzioni per risolvere il seguente problema:

noto il valore del seno di un angolo α, trovare i valori delle altre funzioni goniometriche.

Prepariamo il foglio di lavoro come illustrato dalla seguente descrizione.

- nelle celle da A4 a B7 abbiamo inserito una legenda per specificare la tipologia dell'angolo identificandola con un numero intero da 1 a 4
- nella cella B9 si deve inserire ogni volta il dato relativo alla tipologia usando i numeri da 1 a 4
- nella cella E4 si deve inserire il valore di sin α (nella figura è inserito il valore 0,6 con tipologia 2).

Le formule da inserire nelle celle della colonna E sono le seguenti:

E5: = SE(O(B9=1;B9=4);RADQ(1−E4^2);−RADQ(1−E4^2))

dove, a seconda della tipologia, viene applicata la formula $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ oppure $-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

E6: = E4/E5

dove viene applicata la formula $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; in questo caso non è necessario testare la tipologia dell'angolo in quanto già stabilita dal valore del seno e del coseno (anche nelle formula successive non è necessario fare un test sulla tipologia).

E7: = 1/E5 è stata applicata la formula $\frac{1}{\cos\alpha}$

E8: = 1/E4 è stata applicata la formula $\frac{1}{\sin\alpha}$

E9: = 1/E6 è stata applicata la formula $\frac{1}{\tan\alpha}$

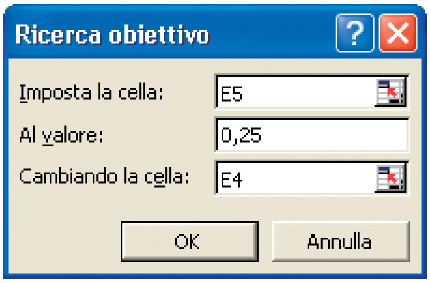
	A	B	C	D	E
1	**FUNZIONI GONIOMETRICHE**				
2					
3	**TIPOLOGIA DELL'ANGOLO**				
4	$0° < x < 90°$	1		seno	0,6
5	$90° < x < 180°$	2		coseno	−0,8
6	$180° < x < 270°$	3		tangente	−0,75
7	$270° < x < 360°$	4		secante	−1,25
8				cosecante	1,6666667
9	TIPOLOGIA	2		cotangente	−1,333333
10					

In questo modo, ogni volta che si attribuisce un valore al seno di un angolo e si indica la sua tipologia, vengono calcolati i valori di tutte le altre funzioni.

Lo strumento Ricerca obiettivo

Supponiamo adesso di conoscere come dato di ingresso il valore di cos α, per esempio cos $\alpha = 0{,}25$ e di sapere che α appartiene al primo quadrante; possiamo preparare un foglio analogo a questo sostituendo alcune formule, oppure possiamo usare lo strumento di Excel **Ricerca obiettivo** che si trova nel menu *Dati* alla voce *Analisi di simulazione*. Questo comando consente di risolvere i problemi inversi di quello impostato; nel nostro caso ci consentirà di usare lo stesso foglio appena preparato per trovare i valori delle altre funzioni goniometriche conoscendo una qualsiasi di esse. Dopo aver impostato a 1 la cella della tipologia dell'angolo, la procedura da seguire è la seguente:

- si attiva il comando *Ricerca obiettivo* che apre la finestra a lato
- nella casella **Imposta cella** si deve inserire il nome della casella nella quale si vuole inserire il dato del problema, nel nostro caso la cella E5 che rappresenta il valore del coseno (basta cliccare sulla cella, osserva il riferimento assoluto)
- nella casella **Al valore** si deve inserire il dato, nel nostro caso il valore 0,25 del coseno
- nella casella **Cambiando la cella** si deve inserire il nome della cella che contiene il dato da cambiare, cioè la cella E4 che nel problema iniziale aveva come dato di ingresso il valore di sin α.



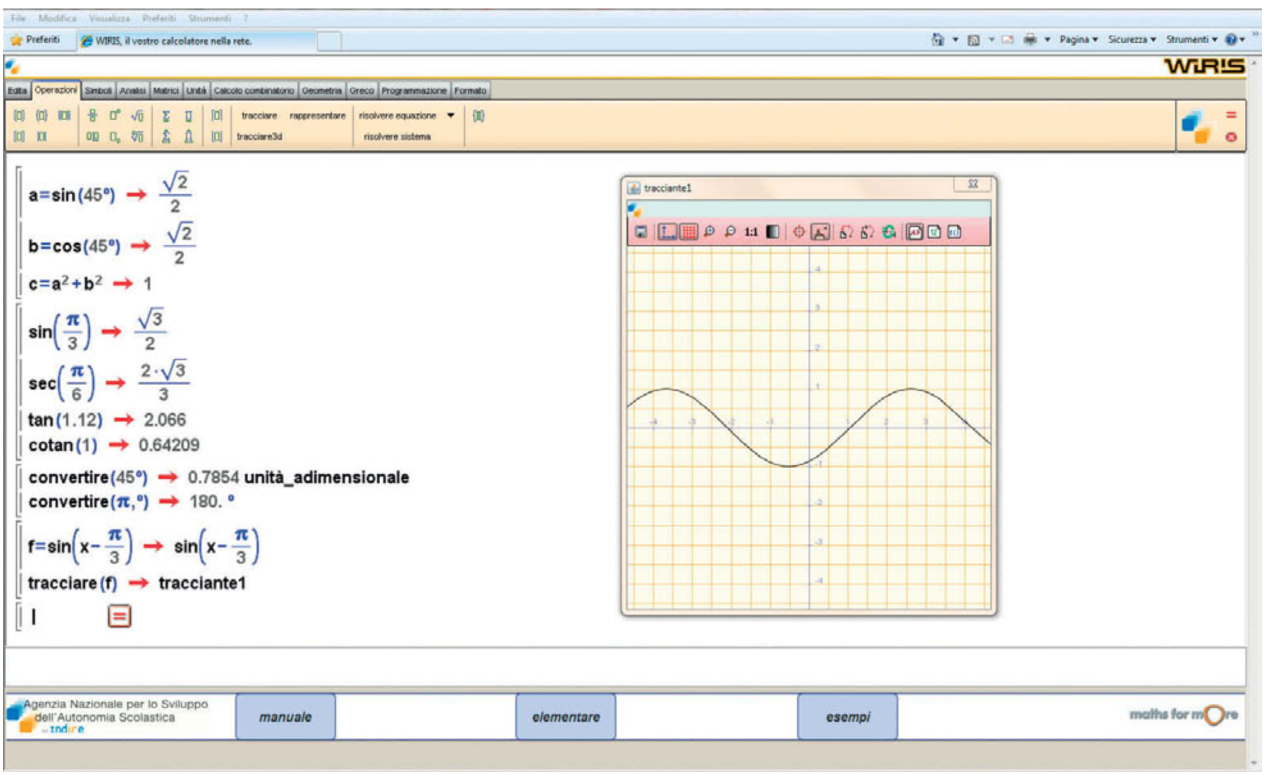
Confermando le scelte con il pulsante OK, Excel modifica il valore di quest'ultima cella finché trova quello che rende vera la formula specificata nella casella *Imposta cella*.
Puoi ripetere la procedura attribuendo un valore a tan α o a una delle altre funzioni.

4. I VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE CON WIRIS

Wiris riconosce le tre funzioni goniometriche fondamentali e anche le tre cofunzioni; esse si indicano proprio come siamo soliti scriverle:

sin (x) cos (x) tan (x) cosec(x) sec(x) cotan(x)

Si possono usare angoli espressi sia in gradi che in radianti e nella figura che segue puoi vedere alcuni esempi.
E' poi possibile convertire una misura da gradi a radianti e viceversa con il comando **convertire**.
Il tracciamento di un grafico avviene con i soliti comandi; nella figura è stato tracciato il grafico $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.



5. I GRAFICI DERIVATI CON GEOGEBRA

In questa esercitazione vogliamo renderci conto di quali trasformazioni ci dobbiamo servire per costruire il grafico delle funzioni goniometriche che derivano da quelle fondamentali.

Consideriamo per esempio la funzione di equazione $y = 2\sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - 1$.

A partire da quella fondamentale $y = \sin x$ dobbiamo applicare, nell'ordine:

- una prima traslazione di vettore $\vec{v}\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$
- una dilatazione di fattore 2 lungo l'asse y
- una seconda traslazione di vettore $\vec{s}(0, -1)$.

Abbiamo già visto la sintassi dei comandi di traslazione e dilatazione a proposito delle funzioni esponenziali e logaritmiche; ricordiamola qui brevemente:

Trasla [oggetto,vettore]	traslazione di vettore indicato
Dilata [oggetto,vettore]	dilatazione in direzione parallela al vettore indicato e di fattore uguale al modulo del vettore

Ricordiamo poi che per definire un vettore si deve usare il comando:

Vettore [punto] oppure **Vettore [punto_iniziale,punto_finale]**

Disegniamo dunque la funzione base $y = \sin x$ inserendo la sua equazione attraverso la riga di inserimento (in grigio tratteggiato nella figura); diamo poi i seguenti comandi:

Trasla $\left[f(x),\textit{vettore}\left[\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)\right]\right]$	viene generata la funzione $g(x)$ (in blu)
Dilata $[g(x),\textit{vettore}[(0,\ 2)]]$	viene generata la funzione h (in verde)
Trasla $[h,\textit{vettore}[(0,\ -1)]]$	viene generata la funzione k (in rosso)

Come controllo disegna adesso la funzione complessiva; il suo grafico si sovrappone all'ultimo disegnato.