Vettori: dipendenza e indipendenza lineare

OBIETTIVI

- comprendere il concetto di combinazione lineare
- stabilire la dipendenza o indipendenza lineare tra vettori

1 DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 4

Consideriamo i vettori $\vec{a}(-1, 5)$ e $\vec{b}(2, 4)$, i numeri reali $h = \frac{1}{2}$ e $k = 3$ e costruiamo il vettore $\vec{v} = h\vec{a} + k\vec{b}$:

$$v_x = \frac{1}{2} \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = \frac{11}{2} \qquad v_y = \frac{1}{2} \cdot 5 + 3 \cdot 4 = \frac{29}{2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v}\left(\frac{11}{2}, \frac{29}{2}\right)$$

Diciamo che il vettore $\vec{v}$ che abbiamo ottenuto eseguendo queste operazioni è *combinazione lineare* dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Un vettore $\vec{v}$ è **combinazione lineare** di altri vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ... se esistono dei numeri reali h, k, p, ... tali che:

$$\vec{v} = h\vec{a} + k\vec{b} + p\vec{c} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

I numeri reali h, k, p .... sono i coefficienti della combinazione lineare.

Consideriamo adesso i vettori $\vec{a}(2, 3)$, $\vec{b}(1, 0)$ e $\vec{c}(8, 9)$ e costruiamo una loro combinazione lineare usando i coefficienti $h = 3$, $k = 2$ e $p = -1$:

$$3\vec{a} + 2\vec{b} - 1\vec{c} = \begin{cases} \text{componente } x: & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 8 = 0 \\ \text{componente } y: & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 9 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo trovato il vettore nullo.
Quando si riesce a trovare una combinazione lineare di due o più vettori che dà come risultato il vettore nullo, si dice che quei vettori sono *linearmente dipendenti*.

Di n vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ si dice che sono **linearmente dipendenti** se esistono n numeri reali non tutti nulli $h_1, h_2, \ldots., h_n$ tali che

$$h_1\vec{v}_1 + h_2\vec{v}_2 + \ldots.. + h_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

In caso contrario essi si dicono **linearmente indipendenti**.

In altre parole n vettori sono linearmente indipendenti se non si riesce a trovare una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Ma nella pratica come si può stabilire la dipendenza o indipendenza lineare di due o più vettori? Consideriamo per semplicità solo vettori del piano, ma le stesse considerazioni possono essere estese a vettori dello spazio.
Sicuramente possiamo dire che se due vettori hanno le componenti proporzionali allora sono dipendenti; per esempio:

$$\vec{a}(1,\ 2) \qquad \text{e} \qquad \vec{b}(3,\ 6)$$

dove $\vec{b} = 3\vec{a}$, sono dipendenti; basta infatti sommare il primo con il secondo moltiplicato per $-\dfrac{1}{3}$ per avere il vettore nullo:

$$\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \begin{cases} \text{componente } x: & 1 - \dfrac{1}{3}\cdot 3 = 0 \\ \text{componente } y: & 2 - \dfrac{1}{3}\cdot 6 = 0 \end{cases}$$

Vettori che hanno le componenti proporzionali sono linearmente dipendenti.

In altri casi occorre applicare la definizione e vedere se esiste una combinazione lineare con numeri non tutti nulli che dia il vettore zero.
Per esempio, consideriamo i vettori $\vec{a}(3,\ -1)$ $\vec{b}(2,\ 4)$ e vediamo se esistono due numeri h e k non nulli (usiamo due lettere diverse per evitare la scrittura con indici che è più pesante) tali che: $h\vec{a} + k\vec{b} = \vec{0}$.
Esplicitiamo la relazione rispetto alle componenti dei due vettori:

$$\begin{cases} 3h + 2k = 0 \\ -h + 4k = 0 \end{cases}$$

Ovviamente questo sistema è verificato se $h = 0$ e $k = 0$, ma noi stiamo cercando due numeri che non siano contemporaneamente nulli.
Ricordiamo allora che un sistema lineare ha più di una soluzione solo se è indeterminato, quindi se la matrice dei coefficienti del sistema ha un determinante nullo. Nel nostro caso:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$

In base al metodo di Cramer, se A è la matrice dei coefficienti di un sistema lineare, allora:
- *se* $\det A \neq 0$ *il sistema ha una sola soluzione*
- *se* $\det A = 0$ *il sistema è indeterminato oppure impossibile.*

Il sistema non ha quindi altre soluzioni oltre a quella nulla e possiamo concludere che i vettori dati sono linearmente indipendenti.
Se osserviamo che le colonne della matrice A sono le componenti dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, possiamo riassumere in una regola quanto visto in questi esempi.

LA REGOLA

Per stabilire la dipendenza o indipendenza lineare di due vettori del piano si deve considerare la matrice A che ha come colonne le componenti dei vettori dati:
- se $\det A \neq 0$ i vettori sono linearmente indipendenti
- se $\det A = 0$ i vettori sono dipendenti.

Questa regola vale se consideriamo due vettori; ma che cosa accade se il vettori sono più di due? Consideriamo per esempio i vettori:

$$\vec{a}(1,\ 2) \qquad \vec{b}(3,\ 1) \qquad \vec{c}(-3,\ 4)$$

e costruiamo una loro combinazione lineare con i numeri h, k e r:

$$\begin{cases} h + 3k - 3r = 0 \\ 2h + k + 4r = 0 \end{cases}$$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Un sistema di questo tipo è sempre indeterminato; risolvendolo per esempio rispetto alle variabili h e k otteniamo:

$$\begin{cases} h = -3r \\ k = 2r \end{cases}$$

La soluzione trovata ci dice che otteniamo il vettore nullo in infiniti modi diversi: basta attribuire a r un numero reale qualsiasi e determinare di conseguenza i valori di h e k:

- per $r = 1 \quad \rightarrow \quad h = -3 \quad \text{e} \quad k = 2$
- per $r = -3 \quad \rightarrow \quad h = 9 \quad \text{e} \quad k = -6$

e così via.

Dunque questi tre vettori sono linearmente dipendenti.
Quello che abbiamo trovato in questo esempio ha validità generale:

Tre o più vettori del piano sono sempre linearmente dipendenti.

ESEMPI

1. Stabiliamo se i vettori $\vec{a} = (3, 2)$ e $\vec{b} = (5, -3)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Procedendo come negli esempi precedenti, dobbiamo vedere se il sistema

$$\begin{cases} 3h + 5k = 0 \\ 2h - 3k = 0 \end{cases}$$

ammette altre soluzioni oltre quella nulla. Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -19$$

Avendo ottenuto un determinante non nullo, l'unica soluzione è $h = 0$ e $k = 0$; possiamo concludere che i vettori dati sono linearmente indipendenti.

2. Stabiliamo se i vettori $\vec{a} = (-1, 2)$ e $\vec{b} = (3, -6)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Osserviamo che le componenti del secondo vettore si ottengono da quelle del primo moltiplicandole per il fattore -3; si ha cioè che $\vec{b} = -3\vec{a}$, o anche $3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.
I due vettori sono quindi linearmente dipendenti.

3. Stabiliamo se sono linearmente dipendenti i vettori $\vec{a}(1, 0)$ $\vec{b}\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ $\vec{c}\left(\frac{3}{4}, -1\right)$.

Non è necessario svolgere calcoli: tre vettori del piano sono sempre linearmente dipendenti.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas