

Le frazioni algebriche

1 ESERCIZIO SVOLTO

Per **semplificare una frazione algebrica** si deve innanzi tutto scomporre sia il numeratore che il denominatore della frazione se questi sono dei polinomi; individuato poi il loro *M.C.D.*, basta applicare la proprietà invariantiva e dividere numeratore e denominatore per tale *M.C.D.*.

Nella pratica poi, una volta scomposti i polinomi, si individuano i fattori comuni e si semplifica per essi. Ad esempio

$$\text{a. } \frac{25x^4y^3}{15x^3y^5} = \frac{\cancel{25}x^{\cancel{4}}y^{\cancel{3}}}{\cancel{15}x^{\cancel{3}}y^{\cancel{5}}} = \frac{5x}{3y^2}$$

Abbiamo diviso numeratore e denominatore per 5, per x^3 e per y^3 .

$$\text{b. } \frac{30y^2 - 20y}{3xy - 2x}$$

Dobbiamo innanzi tutto scomporre in fattori: $\frac{10y \cancel{(3y-2)}}{x \cancel{(3y-2)}} = \frac{10y}{x}$

Attenzione: non si può semplificare un addendo di un polinomio al numeratore con uno al denominatore; ad esempio

$$\frac{x^2 - \cancel{x}}{\cancel{x}} = x^2$$

è sbagliato

$$\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = x-1$$

è corretto

2 Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

$$\text{a. } \frac{ay^2}{2a^2y}$$

$$\frac{10a^3b^4}{35ab^2}$$

$$\frac{6a^3y^2}{2a^2y^4}$$

$$\text{b. } \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{8 - 4y}{4 - y^2}$$

$$\text{c. } \frac{y^6 - 1}{y^3 + 1}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$$

$$\text{d. } \frac{a^2 - 3a}{a^2 - 6a + 9}$$

$$\frac{ax^3 - a}{ax^2 + ax + a}$$

3 ESERCIZIO SVOLTO

Eseguiamo le seguenti **somme e sottrazioni di frazioni algebriche**:

$$\text{a. } \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} =$$

il *m.c.m.* fra i denominatori è $(x+1)(x-1)$

$$= \frac{3(x-1) - 2(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$

svolgiamo i calcoli al numeratore

$$= \frac{3x - 3 - 2x - 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-5}{(x+1)(x-1)}$$

b. $\frac{a+2b}{3a} + \frac{2b-a}{9b} =$

il *m.c.m.* fra i denominatori è $9ab$

$$= \frac{3b(a+2b) + a(2b-a)}{9ab} =$$

svolgiamo i calcoli al numeratore

$$= \frac{3ab + 6b^2 + 2ab - a^2}{9ab} = \frac{6b^2 + 5ab - a^2}{9ab}$$

4 Calcola le seguenti somme di frazioni algebriche:

a. $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x+1}$

b. $\frac{x-1}{x^2-25} + \frac{2}{3x+15}$

c. $\frac{5}{a-2} + \frac{3}{6-3a} = \frac{5}{a-2} + \frac{3}{-3(a-2)} = \frac{5}{a-2} - \frac{3}{3(a-2)} = \dots\dots\dots$

d. $\frac{x-2}{x-1} + \frac{5-x}{2x^2-2} + \frac{6}{3x+3}$

(attenzione, puoi semplificare l'ultima frazione)

e. $\frac{x-1}{3x+1} - \frac{2}{9x^2+6x+1} - \frac{2x-1}{9x+3}$

f. $\frac{x}{x^2-4} - \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} \right)$

5 ESERCIZIO SVOLTO

Eseguiamo i seguenti **prodotti e quozienti di frazioni algebriche**:

a. $\frac{3x^2y}{5a} \cdot \frac{2a^2-3ax}{6x^3y}$

Scomponiamo il polinomio al numeratore della seconda frazione

$$\frac{3x^2y}{5a} \cdot \frac{a(2a-3x)}{6x^3y}$$

Semplifichiamo un fattore al numeratore con uno al denominatore

$$\frac{\cancel{3x^2y}}{5a} \cdot \frac{a(2a-3x)}{\cancel{6x^3y}} = \frac{a(2a-3x)}{2a}$$

Otteniamo

$$\frac{2a-3x}{10x}$$

Attenzione ora a non semplificare la x !

$$\text{b. } \frac{3xy + y^2}{x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2 - y^2}$$

Scomponiamo $\frac{y(3x + y)}{x^2} \cdot \frac{2x}{(3x - y)(3x + y)}$

Semplifichiamo $\frac{\cancel{y(3x + y)}}{\cancel{x}^2} \cdot \frac{2\cancel{x}}{(3x - y)\cancel{(3x + y)}}$

Otteniamo $\frac{2y}{x(3x - y)}$

$$\text{c. } \frac{4y}{x - y} : \frac{12y^2}{3x^2 - 3y^2}$$

Trasformiamo la divisione in moltiplicazione, scomponiamo e semplifichiamo

$$\frac{\cancel{4y}}{\cancel{x - y}} \cdot \frac{\cancel{3}(x - y)(x + y)}{\cancel{12y}^2} = \frac{x + y}{y}$$

6 Semplifica le seguenti espressioni:

$$\text{a. } \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{3x - 6}{x - y}$$

$$\text{b. } \frac{3x^2 - 48}{6x} \cdot \frac{x + 1}{2x - 8} \cdot \frac{4}{x + 4}$$

$$\text{c. } \frac{a - 3b}{25a^2} : \frac{4a - 12b}{5ab}$$

$$\text{d. } \frac{x^2 - 25y^2}{x + 6y} : \frac{x - 5y}{3x + 18y}$$

$$\text{e. } \left(\frac{3}{y} - \frac{y}{3}\right) : \frac{9 - y^2}{9y^2}$$

$$\text{f. } \left(\frac{2a - b}{a} - \frac{a + 2b}{b}\right) : \left(\frac{a^2}{b} + b\right)$$

7 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\text{a. } \left(1 + \frac{6}{x - 1}\right) : \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{2}{x - 1}\right)$$

$$\text{b. } \left(\frac{1}{3x - 1} + \frac{2}{x - 1}\right) \left(3 - \frac{18x - 8}{7x - 3}\right)$$

$$\text{c. } \left(\frac{a}{a - 3} + \frac{1}{a + 2}\right) \left(\frac{a - 2}{a} + a + 1\right) \cdot \frac{a^2 - a - 6}{a^2 + 2a - 2}$$

$$\text{d. } \left(\frac{a + 1}{3} - \frac{a - 2}{a} + \frac{a - 8}{3a}\right) : \frac{a - 2}{3a^2}$$

$$\text{e. } \left[\left(\frac{x}{2y} - \frac{2y}{x}\right) \left(\frac{2xy}{x + 2y}\right)^2\right] \cdot \frac{x + 2y}{2xy}$$

Risultati di alcuni esercizi.

$$2. \text{ a. } \frac{y}{2a}; \frac{2}{7}a^2b^2; \frac{3a}{y^2}; \text{ b. } \frac{a + b}{a - b}; \frac{4}{2 + y}; \text{ c. } y^3 - 1; \frac{x + 4}{x + 1}; \text{ d. } \frac{a}{a - 3}; x - 1.$$

$$4. \text{ a. } \frac{x^2 + 3}{(x + 1)(x - 3)}; \text{ b. } \frac{5x - 13}{3(x^2 - 25)}; \text{ c. } \frac{4}{a - 2}; \text{ d. } \frac{2x + 3}{2(x + 1)}; \text{ e. } \frac{3x^2 - 5x - 8}{3(3x + 1)^2}; \text{ f. } \frac{9x}{x^2 - 4}.$$

$$6. \text{ a. } \frac{3(x + y)}{x - 3}; \text{ b. } \frac{x + 1}{x}; \text{ c. } \frac{b}{20a}; \text{ d. } 3(x + 5y); \text{ e. } 3y; \text{ f. } -\frac{1}{a}.$$

$$7. \text{ a. } -x - 2; \text{ b. } \frac{1}{x - 1}; \text{ c. } \frac{a^2 + 3a - 3}{a}; \text{ d. } a(a + 1); \text{ e. } x - 2y.$$