Matematica in laboratorio

1. FUNZIONI NEL PIANO CARTESIANO, LA RETTA CON GEOGEBRA

Geogebra è un software di matematica dinamica scaricabile gratuitamente dal sito **www.GeoGebra.org/cms/**; puoi trovare le informazioni di base relative a questo software nel volume di geometria.

1.1 Il sistema di riferimento cartesiano

Definire gli oggetti dalla Barra di Inserimento

La **definizione di un punto** nel piano cartesiano ha la seguente sintassi:

etichetta = (<Ascissa>, <Ordinata>)

L'etichetta rappresenta il nome del punto e deve essere una lettera maiuscola dell'alfabeto (sono comunque accettati nomi più lunghi con il primo carattere in maiuscolo); eventualmente si possono usare indici numerici separati dalla lettera da un tratto di sottolineatura. Se l'etichetta non viene assegnata e si scrivono solo le coordinate del punto, ne viene attribuita una in ordine alfabetico. Per i numeri decimali si usa la notazione anglosassone con il punto decimale al posto della virgola. Per esempio:

$A = (4, -2)$ $\qquad$ $B\_1 = (-5.4, 0.3)$

La **definizione di un segmento** viene data tramite i suoi punti estremi con il comando:

Segmento [<Punto1>, <Punto2>]

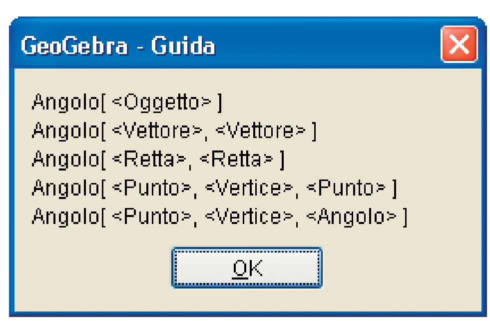
dove <Punto1> e <Punto2> sono le etichette dei due estremi del segmento; si possono anche inserire direttamente le coordinate se i punti non sono ancora stati definiti. Per esempio:

- il comando per definire il segmento avente per estremi i punti A e B precedenti è *Segmento*[A, B]
- il comando per definire il segmento avente per estremi i punti di coordinate $(2, 3)$ e $(-1, 4)$ è *Segmento*[$(2, 3)$, $(-1, 4)$]

In questo secondo caso non vengono però segnati i punti estremi.

Durante la digitazione di un comando, GeoGebra suggerisce come completamento quello dell'elenco dei comandi che inizia con le prime due lettere digitate; si può accettare il suggerimento completando solo la parte che riguarda i parametri, oppure continuare la digitazione.
L'elenco completo dei comandi può essere visualizzato nella casella a discesa **Comando** che si trova sulla destra della Barra di Inserimento; per selezionarne uno basta cliccare su di esso e inserire i parametri necessari.
Con il tasto funzione **F1** applicato a un comando è poi possibile accedere a una sintetica guida in linea che suggerisce quali sono i parametri da inserire e con quale modalità.

Per esempio, la guida relativa al comando **Angolo[ ]** è quella a lato:



Si possono quindi definire:

- gli angoli di un oggetto grafico, per esempio di un triangolo
- l'angolo fra due vettori
- l'angolo fra due rette
- l'angolo definito da tre punti dei quali quello centrale è il vertice
- l'angolo definito da un punto che appartiene al primo lato, dal vertice e che ha ampiezza uguale a quella di un altro angolo.

Infine, usando i tasti freccia su e freccia giù è possibile rivedere tutti i comandi inseriti a partire dall'ultimo.

Esercitazione 1. Definizione di punti, segmenti, angoli e poligoni

Attraverso la Barra di Inserimento vogliamo definire:

1 i punti $A(2, -1)$, $B(-3, 0)$, $C(1, 2)$ e $D(0, -4)$;

2 il segmento AB;

3 l'angolo $\widehat{CAB}$;

4 il poligono $ACBD$.

1 Digitiamo nell'ordine premendo ogni volta INVIO:

$A = (2, -1)$

$B = (-3, 0)$

$C = (1, 2)$

$D = (0, -4)$

Per modificare le coordinate qualora si fosse commesso un errore di digitazione o si volessero cambiare i punti, basta un doppio clic sul punto (sia dalla finestra di Algebra che da quella Grafica).
Nella finestra di Algebra questi punti sono classificati come oggetti liberi.

2 Il comando è

Segmento $[A, B]$

Al segmento, che è un oggetto dipendente in quanto definito tramite i punti A e B, viene attribuita l'etichetta a e, nella finestra di Algebra, ad a viene associata per default la sua lunghezza.

3 Il comando è

Angolo $[C, A, B]$

All'angolo, che è anch'esso un oggetto dipendente, viene attribuita l'etichetta α e, nella finestra di Algebra, ad α viene associata la sua ampiezza.

4 Dall'elenco dei comandi selezioniamo *Poligono* e apriamo la guida; un poligono si può definire:

- mediante i suoi vertici
- mediante due punti e il numero di vertici se si tratta di un poligono regolare; in questo caso il segmento definito dai primi due punti rappresenta il lato del poligono.

Nel nostro caso digitiamo:

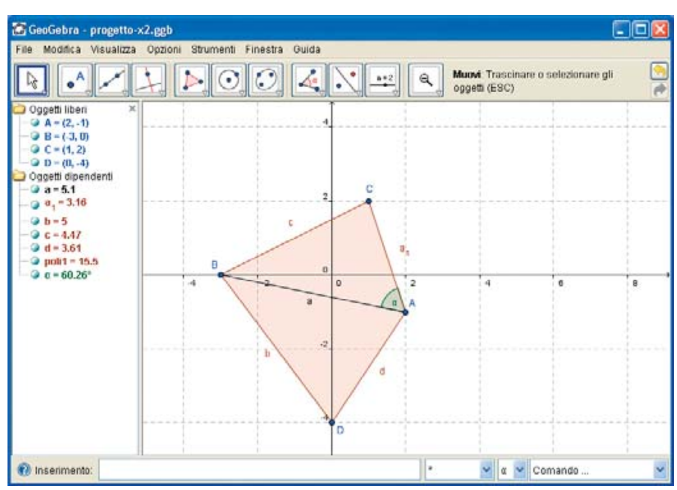
Poligono $[A, C, B, D]$

Nella finestra di Algebra, fra gli oggetti dipendenti, al poligono viene attribuita l'etichetta *poli1* alla quale viene associato il numero che ne rappresenta l'area, a ciascuno dei suoi lati viene attribuito un nome, $a1$, b, c, d, al quale viene associata la lunghezza del segmento.

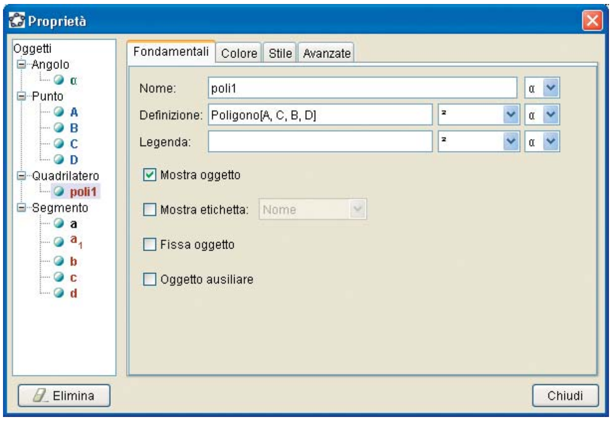
In sostanza:

- ad ogni segmento viene associata la sua lunghezza
- ad ogni angolo la sua ampiezza
- ad ogni poligono la sua area.

Quello che si ottiene è visibile nella figura a lato.



Aprendo il menu contestuale (clicca con il tasto destro del mouse sul poligono) e scegliendo la voce *Proprietà* possiamo modificare le caratteristiche grafiche del poligono, per esempio cambiare il colore attraverso la scheda *Colore*, aumentare o diminuire lo spessore della linea che costituisce il contorno del poligono e intensificare il colore attraverso la scheda *Stile*. Nella scheda *Fondamentali* si può modificare la struttura stessa del poligono ridefinendolo in altro modo (per esempio cambiando i suoi vertici), mostrare o nascondere la sua immagine o la sua etichetta, fissarlo nel piano in modo che sia impossibile spostarlo.



1.2 L'equazione di una retta e le sue caratteristiche

Nel programma GeoGebra l'equazione di una retta può essere visualizzata nella *Vista Algebra* sia in forma esplicita che in forma implicita; in questo secondo caso, però, essa viene data nella forma:

$$ax + by = c$$

Per inserire l'equazione di una retta basta digitarla nella Barra di Inserimento in forma qualsiasi; se si vuole attribuire un'etichetta si deve usare il simbolo " : ".
Per esempio:

$$r : y = 2 * x + 1$$

(il simbolo per la moltiplicazione è l'asterisco; nella scrittura di un'equazione l'asterisco si può omettere).
L'equazione della retta compare nella *Vista Algebra* fra gli oggetti indipendenti, mentre nella *Vista Grafica* ne viene disegnato il grafico; l'etichetta attribuita è r.
Cliccando con il tasto destro del mouse sull'equazione della retta si può modificarne la forma riscrivendola in quella implicita oppure esplicita a seconda dei casi (in questa sede non consideriamo la forma parametrica).
Non è necessario definire le rette degli assi cartesiani; essi vengono identificati in qualunque comando con i nomi

asseX e *asseY*

Il coefficiente angolare di una retta viene calcolato mediante il comando

Pendenza [<retta>]

Ad esso può essere attribuita un'etichetta con analoga sintassi (si può usare indifferentemente il simbolo « = » oppure « : ». Nel nostro caso, digitando

$$m = Pendenza[r]$$

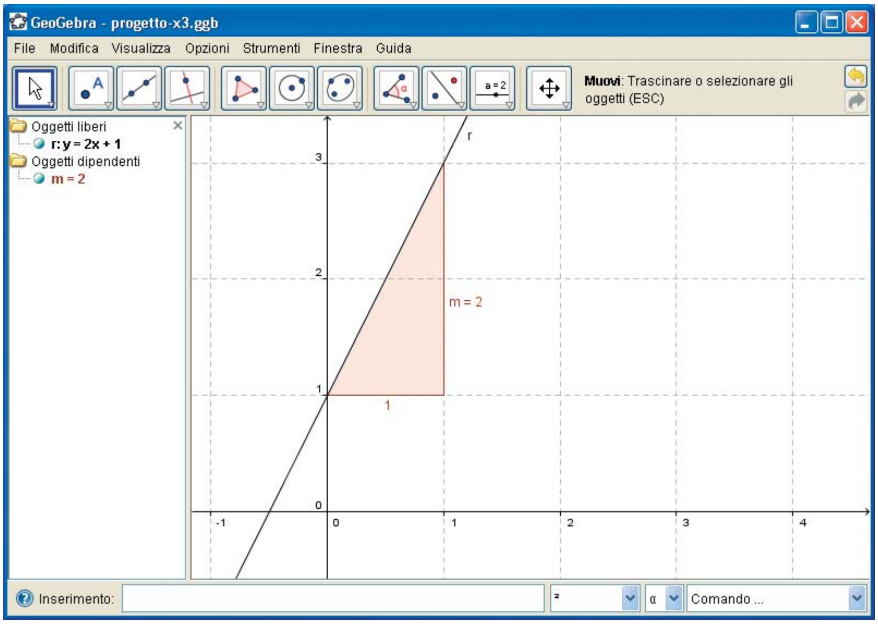
nella finestra di Algebra viene creata la variabile m che assume il valore 2 del coefficiente angolare della retta r che abbiamo appena costruito; in quella Grafica viene disegnato il triangolo che rappresenta la pendenza della retta.
Il parametro m è, infatti, il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti della retta. Il triangolo disegnato nella *Vista Grafica* considera due punti della retta, il primo di ascissa 0 e il secondo di ascissa 1, e valuta il corrispondente incremento delle ordinate.

L'**equazione di una retta che passa per due punti** si può definire con il comando

Retta [<Punto1>, <Punto2>]

che può essere preceduto dall'etichetta seguita dal simbolo " : ".

Nella *Vista Algebra* viene scritta l'equazione e nella *Vista Grafica* viene costruito il grafico.



Esercitazione 2. Un problema sui triangoli

Disegnato il triangolo di vertici $A(-4, 0)$, $B(1, 4)$, $C(3, -2)$, troviamo:

1 le equazioni dei suoi lati;

2 le equazioni delle sue altezze e verifichiamo che passano per uno stesso punto (ortocentro);

3 il perimetro e l'area del triangolo avente per vertici l'ortocentro e i punti A e B.

Per disegnare il triangolo inseriamo prima i tre punti e poi usiamo il comando *Poligono*.

1 Dall'elenco dei comandi selezioniamo *Retta* e indichiamo come parametri i due punti per i quali la retta deve passare; digitiamo dunque:

Retta [*A*, *B*]

Retta [*A*, *C*]

Retta [*B*, *C*]

Alle tre rette vengono attribuite le etichette *d*, *e*, *f*.

2 Da ciascuno dei vertici dobbiamo tracciare le perpendicolari ai lati opposti; apriamo l'elenco dei comandi e scorriamolo per trovare quello che ci interessa. Troviamo il comando

Perpendicolare

e, aprendo la finestra di aiuto con il tasto F1, vediamo che i parametri di questo comando sono, nell'ordine, il punto e la retta; vogliamo contemporaneamente attribuire le etichette *h*1, *h*2, *h*3 alle tre rette.
I comandi sono i seguenti (il primo è dato per intero, completa gli altri due):

h_1 = *Perpendicolare* [*A*, *f*]

h_2 = *Perpendicolare* [....., ...]

h_3 = *Perpendicolare* [....., ...]

Coloriamo in rosso le rette per evidenziarle meglio (usa la voce *Proprietà* del Menu contestuale) e distinguerle da quelle dei lati del triangolo (anche nella *Vista Algebra* le equazioni delle rette sono in rosso).

Per trovare le coordinate dell'ortocentro, che chiameremo *O*, intersechiamo le rette *h*1 e *h*2 (comando *Intersezione*) e verifichiamo che il punto ottenuto appartiene anche a *h*3 (comando *Relazione*) :

O = *Intersezione* (*h*_1, *h*_2)

Relazione[*O*, *h*_3]

Nella finestra di Algebra, del punto *O* vengono date anche le coordinate.
All'esecuzione dell'ultimo comando si apre una finestra che dichiara che il punto *O* giace sulla retta *h*3.

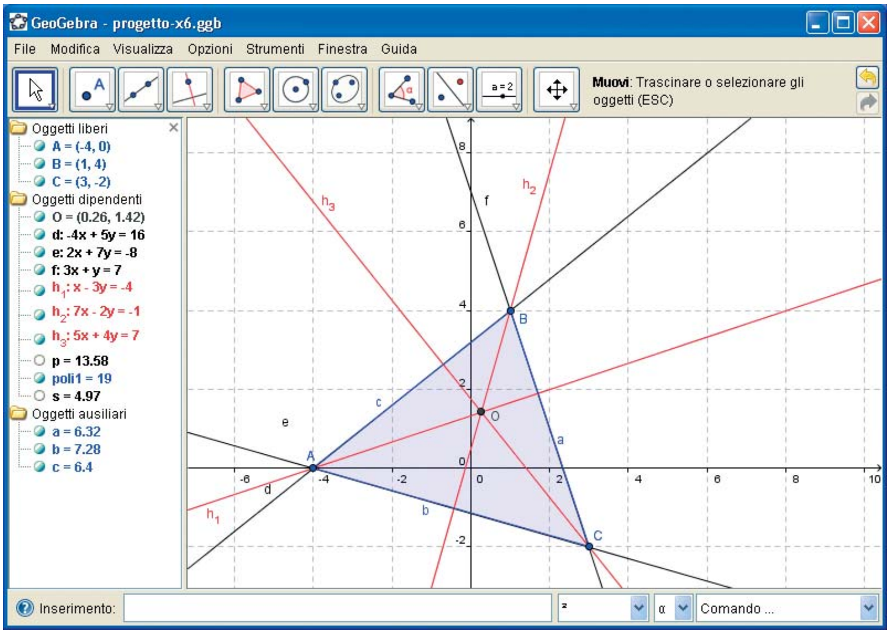
3 Il perimetro e l'area di un triangolo si calcolano con i corrispondenti comandi.
Visto che il triangolo *OAB* non è stato definito come poligono, il parametro del comando *Perimetro* dovrà essere la definizione del poligono; i parametri del comando *Area* sono i vertici del poligono:

p = *Perimetro* [*Poligono*[*O*, *A*, *B*]]

s = *Area* [*O*, *A*, *B*]

Osserviamo che nella *Vista Algebra* si sono accumulati diversi oggetti. Quando una costruzione geometrica comporta l'utilizzo e la definizione di molti oggetti grafici, la *Vista Algebra* risulta affollata e non è facile individuarne uno particolare.

E' possibile radunare gli oggetti che sono serviti a una costruzione, ma che non sono gli oggetti principali, in una cartella degli **Oggetti ausiliari**.
Per aprire questa cartella si passa attraverso il comando **Visualizza/Oggetti ausiliari**; lo spostamento avviene mettendo un segno di spunta sulla corrispondente voce del Menu contestuale relativo a quell'oggetto.
Spostiamo allora fra gli Oggetti ausiliari i tre lati *a*, *b*, *c* del triangolo.



1.3 L'utilizzo degli slider

Uno slider è un numero, oppure un angolo, il cui valore può variare in un fissato intervallo [*a*, *b*] assumendo valori che, a partire da *a*, vengono incrementati di un passo costante fino a *b*.
Per esempio, se si fissa come intervallo [1, 4] e il passo di incremento è 0,5, i valori che lo slider assume sono

1 1,5 2 2,5 3 3,5 4

Uno slider viene usato quando si vuole far dipendere una costruzione da un parametro variabile.
L'attivazione di questo strumento può avvenire con due procedure diverse.

Prima procedura

Dalla barra degli Strumenti di disegno (la riga con le icone) si usa il comando *10-Slider* che fa aprire una finestra di dialogo come quella in figura.
In essa si deve:

- specificare se il parametro variabile è un numero oppure un angolo
- dare un nome al parametro
- completare la scheda *Intervallo* indicando il valore minimo e il valore massimo dell'intervallo e il passo di incremento.

L'aspetto grafico di uno slider è un segmento con un punto mobile in evidenza.

Seconda procedura

Attraverso la Barra di Inserimento si dichiara una variabile con un valore iniziale, per esempio:

$k = 1$

Nella *Vista Algebra* questa variabile è contraddistinta da un cerchietto di colore bianco.
Si devono adesso affrontare i seguenti passi:

- cliccare sulla dichiarazione di k con il tasto destro del mouse
- spuntare la voce *Mostra oggetto*

oppure:

- cliccare sul cerchietto bianco.

In questo modo k diventa uno slider e il cerchietto cambia colore.
Per fissare l'intervallo di variabilità basta adesso cliccare con il tasto destro del mouse sulla sua dichiarazione nella *Vista Algebra* oppure sul segmento che lo rappresenta nella *Vista Grafica* e impostare le caratteristiche dalle schede della voce *Proprietà*, scheda *Slider*.
L'aspetto grafico può essere modificato da orizzontale a verticale attraverso la scheda *Slider* che si trova appena sotto di quella *Intervallo*.
La scheda *Animazione*, quando è attivata, consente di fissare le modalità di variazione automatica del parametro in modo che sia *Oscillante* (da a a b e viceversa), *Crescente* (sempre da a verso b), *Decrescente* (sempre da b verso a). Facendo scorrere, mediante trascinamento in avanti e indietro, il punto mobile, si ottengono le variazioni programmate del parametro.

Esercitazione 3. La retta

Studiamo il comportamento:

1 della retta di equazione $y = mx$ al variare di m in R

2 della retta di equazione $y = x + q$ al variare di q in R.

1 Per vedere come si comporta la retta al variare del suo coefficiente angolare, distingueremo il caso in cui m è positivo da quello in cui è negativo.
Definiamo allora una variabile m_1 mediante uno **slider**:

- attraverso la Barra di Inserimento, attribuiamo a m_1 un valore iniziale qualsiasi, per esempio 0:

$m\_1 = 0$

- clicchiamo sulla dichiarazione di m_1 con il tasto destro del mouse e spuntiamo la voce *Mostra oggetto* oppure sul cerchietto bianco.

In questo modo m_1 diventa uno slider che viene rappresentato nel modo indicato nella finestra Grafica.
Dalla scheda delle *Proprietà*, modifichiamo adesso il suo intervallo di variazione fra 0 e 6 e impostiamo il passo a 0.5.
Nella Barra di Inserimento digitiamo

$y = m\_1 * x$

Nella *Vista Algebra* alla retta viene attribuita l'etichetta a e la sua equazione è $y = 0$ (lo slider m_1 è impostato a zero); nella *Vista Grafica* viene disegnato l'asse x. Modifichiamo il colore della retta in modo da vederla meglio (nella figura abbiamo scelto il rosso sia per la retta che per il corrispondente slider).
Prima di muovere il punto mobile per vedere come si modifica la retta, sempre dalla scheda delle *Proprietà* (pagina *Fondamentali*) mettiamo:

- il segno di spunta su *Mostra traccia*
- apriamo il menu a discesa della voce *Mostra etichetta* e scegliamo *Nome e valore*.

In questo modo, oltre a rimanere la traccia delle rette via via disegnate, vedremo anche la loro equazione.

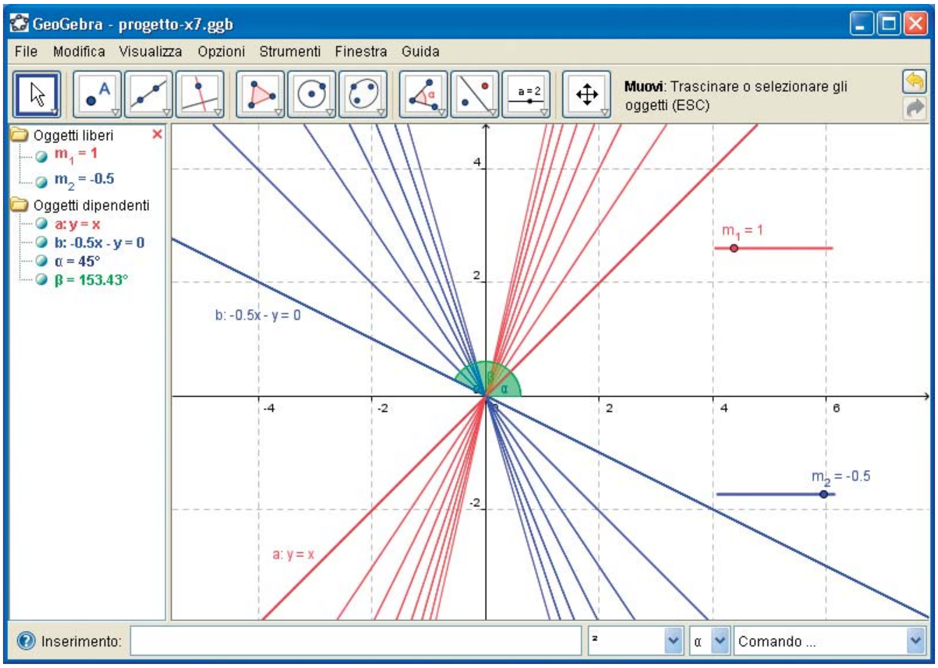
Definiamo anche l'angolo che la retta forma con l'asse x con il comando

Angolo [*asseX*, *a*]

Nella Vista Algebra all'angolo viene attribuita l'etichetta α (la trovi negli oggetti dipendenti).
Muovendo adesso il punto mobile dello slider verso destra, vediamo che la retta forma un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x, la cui ampiezza aumenta ad ogni incremento di m_1 (la retta diventa più ripida).
Con la stessa procedura costruiamo adesso un secondo slider che chiamiamo m_2 e che facciamo variare fra -6 e 0. Dalla Barra di Inserimento digitiamo l'equazione

$y = m\_2 * x$

mostriamo la traccia lasciata da questa seconda retta, impostiamo a *Nome e valore* la sua etichetta e modifichiamo il colore (nella figura abbiamo scelto il blu). L'etichetta attribuita alla retta è b.



Per definire l'angolo formato dalla retta con l'asse x dobbiamo prima modificare il modo con cui la retta è stata scritta nella finestra di Algebra.
Con un doppio clic sull'equazione di b, ridefiniamo l'equazione della retta in questa forma

$m\_2 * x - y = 0$

Definiamo poi l'angolo con il comando

Angolo[*asseX*, *b*]

La retta forma ora un angolo ottuso (indicato con β negli oggetti dipendenti) con la direzione positiva dell'asse x la cui ampiezza diminuisce al decrescere di *m*_2 (la retta di coefficiente angolare -3 è più ripida e forma un angolo minore della retta di coefficiente angolare -2).

Il comportamento di questa retta è simmetrico rispetto all'asse y di quella corrispondente con coefficiente angolare positivo.

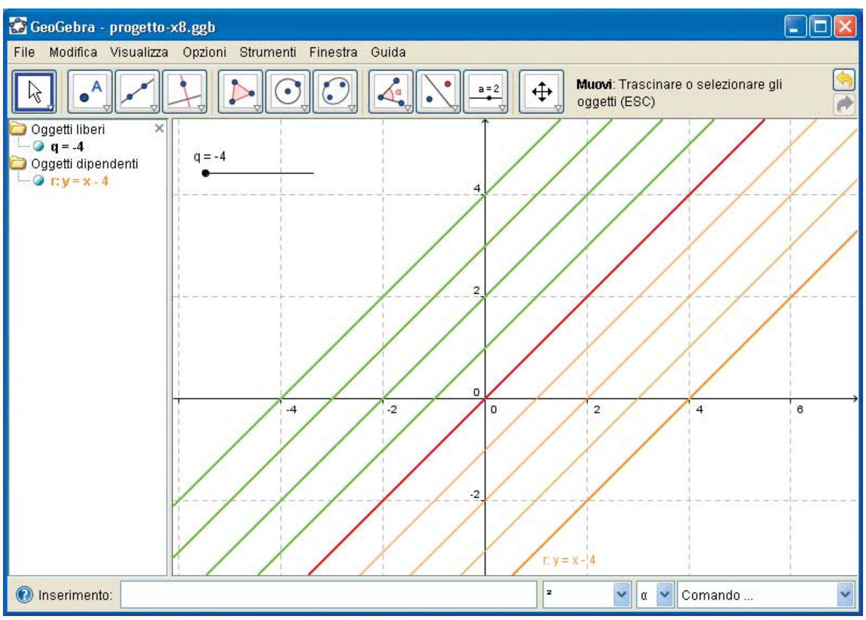
Dunque, l'angolo formato da una retta con l'asse x è:

- acuto quando $m > 0$;
- ottuso quando $m < 0$.

2 Ripetiamo la stessa procedura per studiare il comportamento della retta $y = x + q$, che ha un coefficiente angolare fisso e uguale a 1, al variare di q in R; questa volta useremo un solo slider per q fissando il suo campo di variazione fra -4 e 4 con passo uguale a 1.

Scriviamo l'equazione della retta indicandola con l'etichetta r, mostriamo la traccia, facciamo in modo che venga visualizzata l'equazione anche nella *Vista Grafica*.
Muovendo il punto mobile prima verso destra e poi verso sinistra notiamo che la retta:

- interseca il semiasse positivo delle y quando $q > 0$ (rette in colore verde),
- quello negativo quando $q < 0$ (rette in colore giallo),
- passa per l'origine quando $q = 0$ (retta in colore rosso).



1.4 Problemi sulla retta con GeoGebra

Molti dei problemi di geometria analitica possono essere risolti usando gli appropriati comandi e strumenti di GeoGebra. Nelle esercitazioni che seguono ne proponiamo alcuni; della risoluzione diamo solo le indicazioni per i passaggi principali; ricorda che la guida in linea può offrire un valido aiuto per risolvere le incertezze.

Esercitazione 4.

Vogliamo trovare:

1 l'equazione della retta r che passa per i punti $A(-1, 2)$ e $B(4, 6)$ e l'ampiezza dell'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse;

2 l'equazione della retta s perpendicolare a r passante per B;

3 il punto C di s che ha ascissa 8.

Definiamo poi il triangolo *ABC*, determiniamo l'ampiezza dei suoi angoli e individuiamo il tipo di triangolo.

1 I passi da affrontare sono i seguenti:
- definire dapprima i due punti *A* e *B*
- trovare l'equazione della retta *AB*
- definire l'angolo tra l'asse *x* e la retta.

2 Per tracciare la retta *s* usiamo il comando **Perpendicolare** indicando come parametri il punto *B* e la retta *r*.

3 Per determinare le coordinate del punto *C*, di cui è nota solo l'ascissa, la cosa più semplice è considerare la retta *t* di equazione $x = 8$ e intersecarla con la retta *s* usando il comando **Intersezione**. Si trova in questo modo che il punto *C* ha coordinate (8, 1).
Conviene adesso nascondere la retta *t* che ci è servita per la determinazione del punto *C* e spostarla fra gli oggetti ausiliari.
Osserviamo che, ogni volta che si nasconde un oggetto grafico, il cerchietto che si trova sulla sinistra della definizione dell'oggetto nella *Vista Algebra* diventa bianco.

Un oggetto individuato da un cerchio bianco non è visibile nella *Vista Grafica*.

Per nascondere o mostrare un oggetto, oltre che servirsi del Menu contestuale, basta quindi cambiare il colore del cerchietto semplicemente cliccando su di esso.

Per completare le richieste dobbiamo adesso disegnare il triangolo *ABC* con il comando **Poligono**.

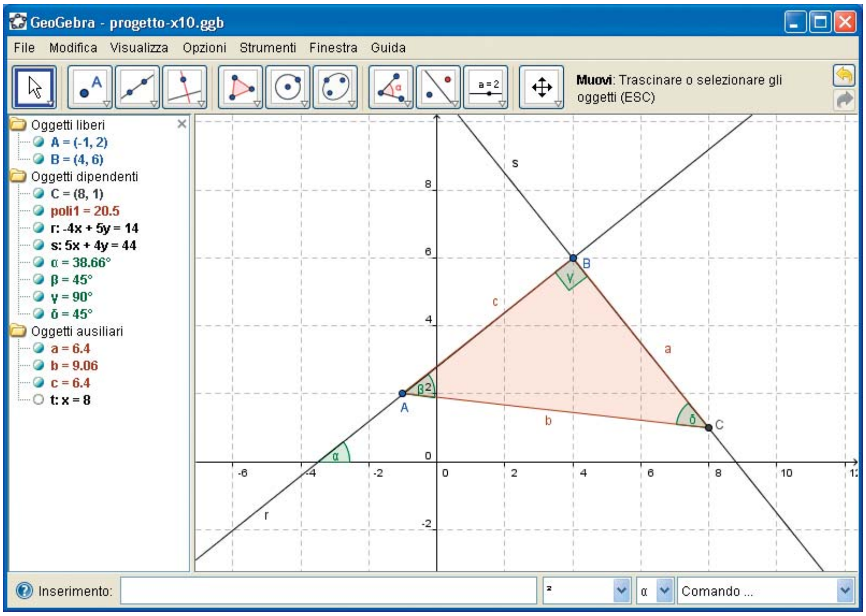
Spostiamo poi i lati *a*, *b*, *c* del triangolo nella cartella degli Oggetti ausiliari.

Per definire i suoi angoli possiamo:
- usare il comando **Angolo[<Punto>, <Vertice>, <Punto>]** facendo assumere ai parametri ogni volta le lettere dell'angolo da evidenziare;
- usare il comando **Angolo[<Oggetto>]** mettendo come parametro il triangolo.

In questo secondo caso, se le lettere che definiscono il poligono sono state inserite in senso antiorario, vengono definiti gli angoli interni, in caso contrario quelli esterni.
Dalle misure ottenute si deduce immediatamente che si tratta di un triangolo rettangolo (e questo era prevedibile visto che la retta *s* è stata tracciata in modo perpendicolare a *r*) e isoscele.
Lo possiamo verificare anche usando il comando

Relazione [*a*, *c*]

che conferma l'uguaglianza dei due lati.



Esercitazione 5.

Sia r la retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante che passa per il punto $P(2, -1)$ e siano A e B le sue intersezioni con gli assi cartesiani. Vogliamo trovare le coordinate del punto C che, insieme con A e B, forma un triangolo isoscele di base AB che abbia area uguale a $\frac{27}{2}$.

Costruiamo dapprima la retta a bisettrice del primo e terzo quadrante (equazione $y = x$) e definiamo il punto P.
Per definire la retta r passante per P e parallela ad a usiamo il comando *Retta* e indichiamo come parametri P e a (usa il tasto di aiuto F1).
Nascondiamo poi la retta a e trasferiamola nella cartella degli Oggetti ausiliari. Definiamo adesso A e B con i comandi:

> *Intersezione*[*asseX*, *r*]
>
> *Intersezione*[*asseY*, *r*]

Il punto C, terzo vertice del triangolo, si trova sull'asse s del segmento AB che possiamo definire in due modi:

- trovando il punto medio M del segmento AB e poi da esso la perpendicolare a r;
- direttamente con il comando **AsseSegmento** e indicando come parametri i punti A e B.

In ogni caso, per la costruzione che dovremo fare in seguito, è necessario trovare il punto M.

Per trovare C possiamo procedere in questo modo:

- determiniamo la misura l del segmento AB:

  > $l = Distanza\ [A, B]$

- troviamo la misura h dell'altezza (due volte l'area diviso la base) digitando l'espressione:

  > $h = (2 * 27/2)/l$

Osserviamo che della parte numerica di questa espressione non rimane traccia nella finestra di Algebra e compare solo il risultato. Tutte le espressioni numeriche vengono semplificate e non è più possibile risalire al testo iniziale.

- tracciamo la circonferenza d di centro M e raggio h usando lo strumento grafico *6-Circonferenza dati centro e raggio*;
- determiniamo i punti di intersezione fra la circonferenza d e la retta s.

I punti trovati sono due e vengono etichettati come C e D. Esistono quindi due triangoli che soddisfano alle richieste. Disegniamo adesso i due triangoli con il comando **Poligono** e spostiamo gli oggetti meno importanti nella cartella degli Oggetti ausiliari.