Concetti chiave e regole

Le figure equivalenti

- Due figure A e B si dicono **equivalenti** se hanno la stessa estensione. La caratteristica comune a tutte le figure equivalenti si chiama **area**.
- Date due figure A e B aventi in comune solo una parte del contorno, si definisce loro **somma** la figura F ottenuta dalla loro unione; viceversa se $A + B \doteq F$, la figura A è la **differenza** fra le figure F e B, la figura B è la differenza fra F e A.
  Si verifica che somme o differenze di figure congruenti oppure equivalenti sono equivalenti.

I criteri di equivalenza dei poligoni

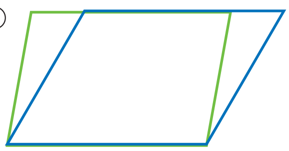
Due figure che sono somme di figure congruenti si dicono **equicomposte**; due figure equicomposte sono anche equivalenti.
L'equiscomponibilità permette di enunciare i seguenti criteri di equivalenza fra poligoni particolari:

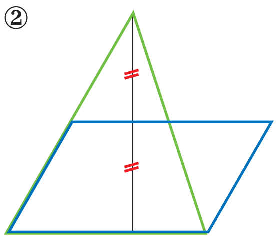
① due parallelogrammi sono equivalenti se hanno basi e altezze ordinatamente congruenti

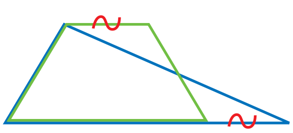
② un parallelogramma e un triangolo sono equivalenti se hanno basi congruenti e se l'altezza del triangolo è doppia di quella del parallelogramma (oppure se hanno altezze congruenti e se la base del triangolo è doppia di quella del parallelogramma)

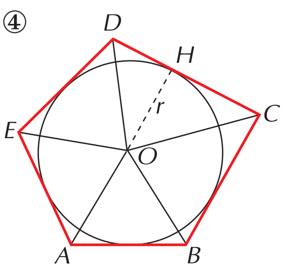
③ un trapezio è equivalente a un triangolo che ha per base la somma delle basi del trapezio e l'altezza congruente a quella del trapezio

④ un poligono circoscritto a una circonferenza è equivalente a un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.

①


②


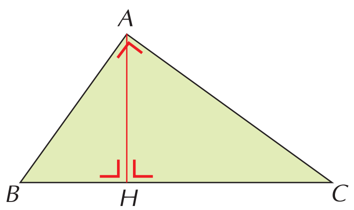
③


④


I teoremi di Pitagora e di Euclide

In un triangolo rettangolo valgono i seguenti teoremi:

- **teorema di Pitagora:** il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti: $q(BC) \doteq q(AB) + q(AC)$
- **primo teorema di Euclide:** il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa: $q(AB) \doteq r(BC, BH)$ e $q(AC) \doteq r(BC, HC)$
- **secondo teorema di Euclide:** il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: $q(AH) \doteq r(BH, HC)$.



Grandezze omogenee

Un insieme G di elementi costituisce una **classe di grandezze omogenee** se:

- due qualsiasi elementi di G sono sempre confrontabili
- esiste in G un'operazione di addizione commutativa, associativa e dotata di elemento neutro.

Due grandezze di una stessa classe si dicono **commensurabili** se hanno un sottomultiplo comune, **incommensurabili** in caso contrario. Fissata un'unità di misura omogenea con le grandezze di quella classe, a ciascun elemento si può associare una **misura** che è sempre espressa da un numero reale che è:

- razionale se le due grandezze sono commensurabili
- irrazionale se le due grandezze sono incommensurabili.

Rapporti e proporzioni

Rapporto fra due grandezze omogenee A e B è la misura di A quando B è assunta come unità di misura; si verifica poi che il rapporto $\frac{A}{B}$ è anche uguale al quoziente fra le misure delle due grandezze rispetto ad una unità di misura comune.
Se il rapporto fra due grandezze è uguale al rapporto fra altre due (omogenee fra loro le prime e omogenee fra loro le seconde), si dice che le quattro grandezze sono **in proporzione**.
La proporzionalità fra grandezze gode delle seguenti proprietà:

- quattro grandezze sono in proporzione se e solo se lo sono le loro misure
- esiste sempre ed è unica una grandezza quarta proporzionale dopo altre tre.

Alla proporzione $a : b = c : d$ individuata dalle misure di quattro grandezze proporzionali si possono applicare le seguenti proprietà:

- **fondamentale**: $bc = ad$
- **invertire**: $b : a = d : c$
- **permutare**: $a : c = b : d$ oppure $d : b = c : a$
- **comporre e scomporre**: $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$ oppure $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$

Proporzionalità diretta e inversa

Due insiemi di grandezze in corrispondenza biunivoca sono:

- **direttamente proporzionali** se il rapporto fra due grandezze del primo insieme è uguale al rapporto fra le corrispondenti due del secondo per ogni coppia di elementi considerati
- **inversamente proporzionali** se il rapporto fra due grandezze del primo insieme è uguale al rapporto inverso fra le corrispondenti due del secondo per ogni coppia di elementi considerati.

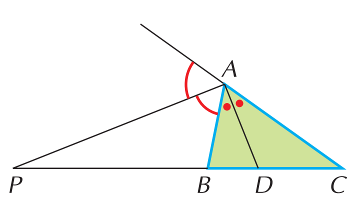
Oltre che applicando la definizione, si può stabilire se due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali mediante un **criterio generale di proporzionalità**; A e B sono insiemi di grandezze proporzionali se e solo se:

- ad elementi uguali in A corrispondono elementi uguali in B e
- alla somma di due elementi in A corrisponde la somma dei corrispondenti elementi in B.

Il teorema di Talete e le sue conseguenze

Le proprietà della proporzionalità diretta relativamente alle figure geometriche sono evidenziate da alcuni teoremi:

- **teorema di Talete**: un fascio di rette parallele intercetta su due trasversali segmenti direttamente proporzionali
- **teorema della bisettrice dell'angolo interno**: la bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati: $BD : AB = DC : AC$
- **teorema della bisettrice dell'angolo esterno:** se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra la retta del lato opposto in un punto P, il segmento PC ed il segmento PB stanno nello stesso rapporto degli altri due lati del triangolo: $PC : AC = PB : AB$.



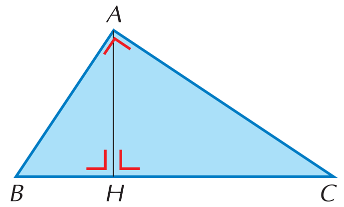
Le aree dei poligoni

Dai teoremi di equivalenza si deducono le principali formule per il calcolo delle aree:

• rettangolo di dimensioni b e h	$b \cdot h$
• quadrato di lato ℓ	ℓ^2
• parallelogramma di base b e altezza h	$b \cdot h$
• triangolo di base b e altezza h oppure	$\frac{1}{2} b \cdot h$ $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p semiperimetro e a, b, c lati
• trapezio di basi b e B e altezza h	$\frac{1}{2}(B+b) \cdot h$
• rombo di diagonali d_1 e d_2	$\frac{1}{2}\ d_1 \cdot d_2$
• poligono di semiperimetro p circoscritto a circonferenza di raggio r	$p \cdot r$

Anche i teoremi di Pitagora e di Euclide si possono esprimere in funzione delle misure degli elementi del triangolo rettangolo a cui si riferiscono. In particolare:

- teorema di Pitagora: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
- primo teorema di Euclide: $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \ \wedge\ \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC}$
- secondo teorema di Euclide: $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$



La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

La lunghezza di una linea curva può essere definita mediante una poligonale approssimante con un numero infinito di lati. In particolare la lunghezza di una circonferenza è definita mediante i poligoni in essa inscritti e ad essa circoscritti.

Le formule per il calcolo della lunghezza C della circonferenza rettificata e dell'area S del cerchio sono:

- $C = 2\pi r$
- $S = \pi r^2$

Dalla proporzionalità fra angoli al centro α (in gradi) e archi ℓ e fra angoli al centro e settori circolari T si deducono poi le seguenti relazioni:

- $\ell = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360}$
- $T = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$