La scala logaritmica

Obiettivi

- utilizzare coordinate logaritmiche e semilogaritmiche

1. Coordinate logaritmiche

Se un numero k è maggiore di 10, il suo logaritmo in base 10 è molto più piccolo del numero stesso:

$\log 20 = 1{,}30...$ $\quad \log 400 = 2{,}60...$ $\quad \log 5000 = 3{,}69...$ $\quad$ e così via.

Quando si devono rappresentare numeri che spaziano in un range molto grande di valori, come per esempio le distanze interstellari o le frequenze di udibilità del suono (da 20Hz a 20000Hz), si ricorre ad una scala logaritmica, vale a dire che, dato un numero reale positivo x (altrimenti il logaritmo non esiste), si valuta il suo logaritmo decimale.
Di conseguenza:

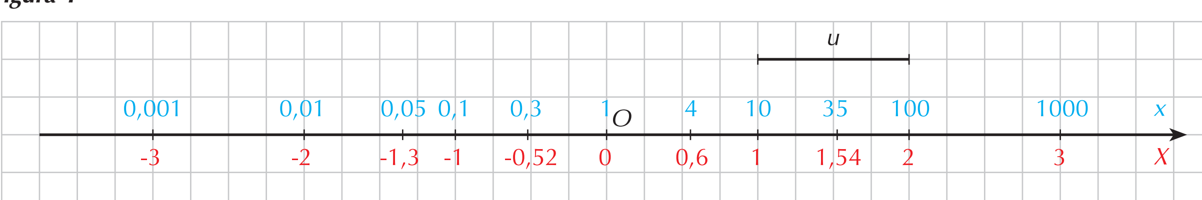
- se $0 < x < 1$ $\quad \rightarrow \quad$ $\log x < 0$
- se $1 \leq x < 10$ $\quad \rightarrow \quad$ $0 \leq \log x < 1$
- se $10 \leq x < 100$ $\quad \rightarrow \quad$ $1 \leq \log x < 2$
- se $100 \leq x < 1000$ $\quad \rightarrow \quad$ $2 \leq \log x < 3$

e così via.

Sulla retta dei numeri, la scala logaritmica viene rappresentata tenendo presenti le considerazioni precedenti. Fissata un'origine O e un'unità di misura u si procede in questo modo (segui la ***figura 1***).

Nella figura:
- *i numeri in blu sono i valori di x*
- *i numeri in rosso sono i valori X = log x*

Figura 1



- Poiché $\log 10^0 = \log 1 = 0$, al punto O facciamo corrispondere la potenza $10^0 = 1$

- Alla destra del punto O :
  - poiché $\log 10^1 = 1$, al punto che si trova a distanza 1 da O facciamo corrispondere la potenza $10^1 = 10$
  - poiché $\log 10^2 = 2$, al punto che si trova a distanza 2 da O facciamo corrispondere la potenza $10^2 = 100$

  e così via.
- Alla sinistra del punto O :
  - poiché $\log 10^{-1} = -1$, al punto che si trova a distanza -1 da O facciamo corrispondere la potenza $10^{-1} = 0{,}1$
  - poiché $\log 10^{-2} = -2$, al punto che si trova a distanza -2 da O facciamo corrispondere la potenza $10^{-2} = 0{,}01$

  e così via.

I valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva si collocano nel corrispondente valore di logaritmo; per esempio:

- il numero 4 che si trova tra 1 e 10 viene posto in corrispondenza di $\log 4 \approx 0{,}6$
- il numero 35 che si trova tra 10 e 100 viene posto in corrispondenza di $\log 35 \approx 1{,}54$
- il numero 0,3 che si trova tra 0,1 e 1 viene posto in corrispondenza di $\log 0{,}3 \approx -0{,}52$
- il numero 0,05 che si trova tra 0,01 e 0,1 viene posto in corrispondenza di $\log 0{,}05 \approx -1{,}3$.

In pratica, indicata con x l'ascissa di un punto P e con X la sua coordinata logaritmica, tra queste due variabili sussiste la relazione

$$X = \log x$$

In scala logaritmica si possono quindi rappresentare solo valori x positivi, mentre i valori di X dei corrispondenti logaritmi decimali sono positivi se $x > 1$, negativi se $0 < x < 1$; il valore 0 viene assunto in corrispondenza di $x = 1$.

Il sistema di coordinate logaritmiche

Quando in un piano si introduce un sistema di riferimento cartesiano, su ciascuno dei due assi si può fissare una scala logaritmica; si parla in questo caso di **coordinate logaritmiche**.
L'unità di misura scelta per i due assi può essere la stessa, ma si possono anche usare unità diverse (esattamente come nel piano cartesiano si può avere un sistema monometrico oppure dimetrico).
Se indichiamo con (X, Y) le coordinate logaritmiche di un punto P, e con (x, y) le sue coordinate cartesiane consuete, abbiamo che:

$$X = \log x \qquad \text{e} \qquad Y = \log y$$

Grazie alle proprietà dei logaritmi, l'uso di questo tipo di coordinate può semplificare la rappresentazione grafica di alcune curve; ricordiamo infatti che un prodotto tra due numeri si trasforma nella somma dei loro logaritmi, mentre una potenza si trasforma nel prodotto tra l'esponente e il logaritmo della base.
Supponiamo, per esempio, di dover rappresentare la curva di equazione

$$y = x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{con } x > 0$$

Se consideriamo i logaritmi decimali dei due membri abbiamo che

$$\log y = \log x^{\frac{3}{4}}$$

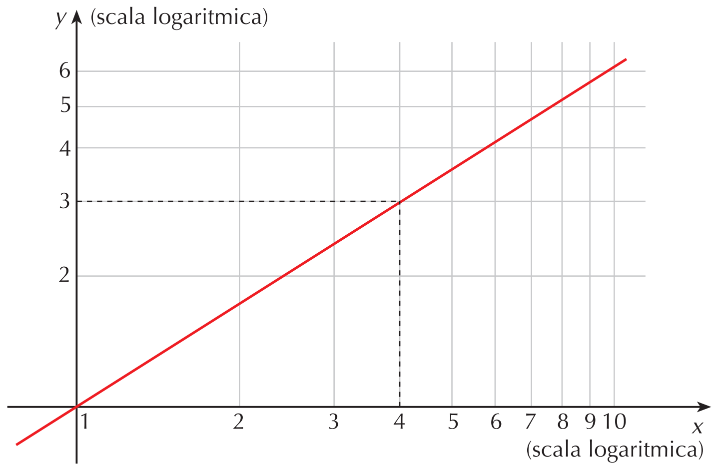
cioè $\log y = \dfrac{3}{4} \log x$

Ponendoci in una sistema di coordinate logaritmiche si ottiene:

$$Y = \frac{3}{4} X$$

che rappresenta una retta di coefficiente angolare $\dfrac{3}{4}$ che passa per l'origine (il grafico è in ***figura 2***).

Figura 2



Viceversa, data la retta che in coordinate logaritmiche ha equazione $Y = -X + 3$, ci chiediamo quale sia la relazione funzionale tra x e y.
Ponendo $\log x$ al posto di X e $\log y$ al posto di Y otteniamo:

$$\log y = -\log x + 3 \qquad \text{cioè} \qquad \log y = \log \frac{10^3}{x}$$

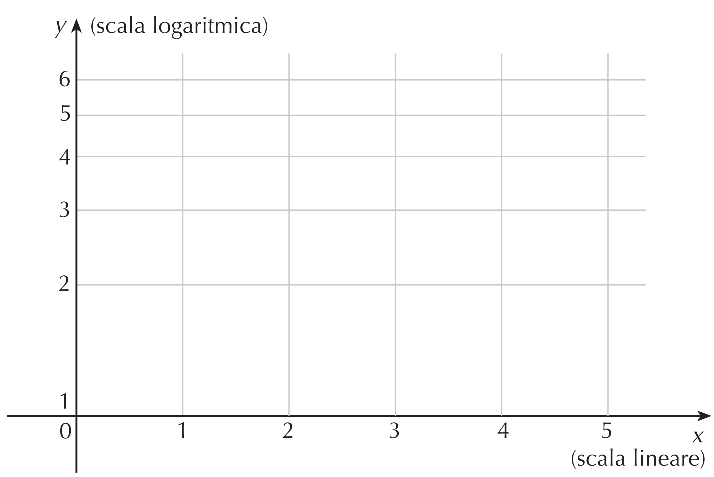
La relazione funzionale cercata ha quindi equazione $y = \dfrac{1000}{x}$ e rappresenta un'iperbole equilatera.

Il sistema di coordinate semilogaritmiche

Oltre ad un sistema di riferimento dove su entrambi gli assi cartesiani si è fissata una scala logaritmica, si può anche pensare ad uno nel quale questa scala sia fissata su uno solo dei due assi, per esempio l'asse y. Si parla in questo caso di **riferimento semilogaritmico**. In sostanza, sull'asse delle ascisse si mantiene una scala lineare e sull'asse y una scala logaritmica (***figura 3***):

$$X = x \qquad \text{e} \qquad Y = \log y$$

Figura 3



Per esempio:

- la funzione $y = 1000 \cdot 2^x$ diventa:
  $\log y = \log(1000 \cdot 2^x)$
  $\log y = \log 1000 + x\log 2$
  cioè $Y = 3 + x\log 2$
- viceversa, la funzione $Y = \log 2 + x \log 5$ diventa:
  $\log y = \log(2 \cdot 5^x)$ cioè $y = 2 \cdot 5^x$

La scala logaritmica

COORDINATE LOGARITMICHE

RICORDA

In una scala logaritmica i valori X rappresentati sono proporzionali ai logaritmi delle ascisse positive x:

$$X = \log x$$

Comprensione

1 In scala logaritmica:

a. si possono rappresentare solo numeri reali positivi. V F

b. i valori $X = \log x$ sono solo numeri positivi V F

c. valori interi (numeri come 2, 3, 4 ...) sono sempre equidistanziati V F

d. non esiste la possibilità di rappresentare lo zero V F

e. per rappresentare numeri compresi tra 1 e 10 si utilizza un segmento di uguale lunghezza rispetto a quello che si usa per rappresentare numeri compresi tra 10 e 100. V F

2 In un sistema di coordinate logaritmiche, ad ogni punto di coordinate (x, y) corrisponde un punto di coordinate (X, Y) dove:

a. $x = \log X$ e $y = \log Y$ **b.** $X = \log x$ e $Y = \log y$ **c.** $X = \log y$ e $Y = \log x$

Applicazione

3 Rappresenta i seguenti numeri in scala logaritmica:

0,04 0,8 2 25 95 128 4387.

4 In laboratorio si è controllata la concentrazione di un farmaco dopo un certo numero di ore dal suo assorbimento; i dati sono in tabella:

Tempo (in h)	0	5	10	15	20	25	30
Concentrazione (in mg)	1000	700	400	180	90	30	8

Rappresenta i dati in un riferimento cartesiano in scala semilogaritmica (scala logaritmica sull'asse y dove viene riportata la concentrazione).

5 La popolazione mondiale ha subito un notevole incremento a partire dal 1800 e i dati relativi alla sua numerosità sono riportati in tabella:

Anno	1800	1900	1960	2000	2010
Popolazione (in miliardi di individui)	1	1,5	3	6	7

Rappresenta i dati in un riferimento cartesiano in scala semilogaritmica (scala logaritmica sull'asse y dove viene riportata la popolazione).

6 In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = X\log 3 - \log 5$. Trova il legame funzionale tra x e y sapendo che $X = x$ e $Y = \log y$. $\left[y = \dfrac{3^x}{5}\right]$

7 E' data la funzione $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. In un grafico con scala semilogaritmica qual è il coefficiente angolare della retta che la rappresenta? $[-\log 4]$

8 La legge che rappresenta la crescita di una popolazione di batteri è data dalla formula $N = N_0 \cdot 2^{kt}$, dove N_0 è la numerosità della popolazione di batteri al tempo $t = 0$, N è la popolazione al tempo t e k è il numero di suddivisioni cellulari che avvengono in ogni unità di tempo. Trasforma la legge in scala semilogaritmica ponendo $Y = \log N$. $[Y = kt\log 2 + \log N_0]$

9 La legge di decadimento radioattivo delle sostanze segue la legge $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$ dove m_0 è la massa radioattiva presente al tempo $t = 0$, m è la massa radioattiva presente al tempo t e λ è la costante di decadimento radioattivo il cui valore è un numero caratteristico di ciascuna sostanza radioattiva e dà la misura della maggiore o minore rapidità con cui avviene il processo di trasformazione. Trasforma la legge in scala semilogaritmica ponendo $Y = \ln m$. $[y = \ln m_0 - \lambda t]$

10 La magnitudo M di un terremoto viene definita, secondo la scala Richter, dalla formula $M = \log\dfrac{A}{A_0}$ dove A rappresenta il massimo spostamento rispetto allo zero della traccia lasciata da un sismografo e A_0 indica il valore massimo dello stesso spostamento per un terremoto preso come campione.
Stabilisci, motivando adeguatamente le risposte, se le seguenti affermazioni sono corrette oppure no.

a. Un terremoto di magnitudo 6 è dieci volte più potente di un terremoto di magnitudo 5.

b. Un terremoto di magnitudo 7,2 ha una potenza doppia di uno di magnitudo 3,6.

[corretta la **a.**; errata la **b.**]

11 L'orecchio umano percepisce la pressione sonora in maniera logaritmica, anziché lineare, quindi risulta conveniente esprimere le grandezze legate all'ampiezza del suono in un'unità di misura logaritmica chiamata *decibel*. Se X è una generica grandezza e X_0 è un valore di riferimento per quella grandezza, si definisce decibel l'espressione $\text{dB} = 10\log\dfrac{X}{X_0}$.

a. Due suoni hanno rispettivamente intensità di 10^{-12}Watt/m^2 e 10^{-14}Watt/m^2; qual è il rapporto fra le loro intensità in decibel? [2]

b. Due suoni hanno intensità di 100dB e 70dB, qual è il rapporto fra le loro intensità espresse in Watt/m^2? [1000]

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V, **e.** V   **2** **b.**