L'equazione della parabola e la dimostrazione della formula

Consideriamo un punto F di coordinate $(p,\ q)$ e una retta d di equazione $y = k$, dove $k \neq q$ altrimenti F si troverebbe sulla direttrice; un punto $P(x,\ y)$ del piano è un punto della parabola se

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} \qquad \text{è uguale a} \qquad \text{distanza } (P,\ d) = |y-k|$$

quindi se $\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} = |y-k|$

Elevando al quadrato si ottiene $(x-p)^2+(y-q)^2 = |y-k|^2$

e sviluppando i calcoli:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = y^2 - 2ky + k^2 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{2(q-k)}x^2 + \frac{-p}{q-k}x + \frac{p^2+q^2-k^2}{2(q-k)}$$

Se adesso teniamo presente che $p,\ q,\ k$ sono numeri, anche le espressioni che rappresentano i coefficienti della variabile x e il termine noto sono numeri e quindi possiamo porre:

$$\frac{1}{2(q-k)} = a \qquad \frac{-p}{q-k} = b \qquad \frac{p^2+q^2-k^2}{2(q-k)} = c \qquad (\mathbf{A})$$

Con queste sostituzioni la precedente equazione ha la forma:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Questa è dunque la forma algebrica dell'equazione di una parabola che ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y.

Le precedenti formule relative al vertice e all'asse di simmetria si ricavano risolvendo rispetto a $p,\ q,\ k$ il sistema delle tre relazioni (**A**).