APPROFONDIMENTO

Le equazioni omogenee

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **omogenea** se si presenta nella forma

$$\boldsymbol{y' = \frac{A(x,\, y)}{B(x,\, y)}}$$

essendo $A(x, y)$ e $B(x, y)$ funzioni omogenee dello stesso grado n definite nello stesso insieme D.

È per esempio omogenea l'equazione $y' = \dfrac{xy - 2y^2}{x^2}$ perché sia il numeratore che il denominatore sono omogenei di grado 2.

Una qualunque equazione omogenea del primo ordine si può sempre scrivere nella forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

La precedente equazione, separando i termini, diventa $\quad y' = \dfrac{y}{x} - 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2.$

Per risolvere questo tipo di equazioni operiamo la sostituzione $\quad t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

Con questa posizione si ha che: $\quad y = x \cdot t \quad \to \quad y' = xt' + t$

e quindi l'equazione di partenza $\quad y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

diventa $\quad xt' + t = f(t) \quad$ cioè $\quad xt' = f(t) - t \quad$ che è un'equazione a variabili separabili.

Applicando questa sostituzione alla precedente equazione otteniamo:

$$xt' = (t - 2t^2) - t \qquad \text{cioè} \qquad xt' = -2t^2$$

Separiamo le variabili: $\quad \dfrac{t'}{t^2} = -\dfrac{2}{x} \qquad \to \qquad \dfrac{1}{t^2} \cdot \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{2}{x}$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{t^2}\, dt = -\int \frac{2}{x}\, dx \qquad \to \qquad -\frac{1}{t} = -2\ln|x| + c \qquad \to \qquad \ln|x| = \frac{1}{2t} + \frac{c}{2}$$

Operando la sostituzione inversa otteniamo: $\quad \ln|x| = \dfrac{x}{2y} + c_1 \quad$ dove abbiamo posto $\quad c_1 = \dfrac{c}{2}$

da cui infine: $\quad y = \dfrac{x}{2(\ln|x| - c_1)}.$

Osserviamo poi che anche la funzione $y = 0$ (che corrisponde al caso $t = 0$) è soluzione dell'equazione data; essa si ottiene per $c_1 \to \infty$.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$y' = \frac{3y^2 - 4xy + 5x^2}{x^2 - 2xy}$$

Per risolvere un'equazione omogenea la si deve ricondurre alla forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Operiamo allora inizialmente sull'equazione in modo da evidenziare la forma tipica:

$$y' = \frac{5x^2 - 4xy + 3y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{x^2\left(5 - 4\frac{y}{x} + 3\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - 2\frac{y}{x}\right)} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 5}{-2\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$$

Operiamo la sostituzione $t = \frac{y}{x}$ (t e y sono funzioni di x); si ha così: $y = xt$ e $y' = xt' + t$.
L'equazione assume la forma

$$xt' + t = \frac{3t^2 - 4t + 5}{-2t + 1} \qquad \text{cioè} \qquad xt' = \frac{5(t^2 - t + 1)}{1 - 2t}$$

Separiamo le variabili: $\frac{1 - 2t}{5(t^2 - t + 1)} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

Integriamo: $\int \frac{1 - 2t}{5(t^2 - t + 1)}\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx$

Al primo membro si ottiene: $-\frac{1}{5}\ln\,(t^2 - t + 1)$

Al secondo membro si ottiene: $\ln|x| + c$

L'integrale generale è quindi: $-\frac{1}{5}\ln\,(t^2 - t + 1) = \ln|x| + c$

Opera adesso la sostituzione inversa e determina l'integrale generale. $[x^5 - x^4y + x^3y^2 + k = 0]$

2 $y' = \frac{x + y}{x}$ $\qquad y' = \frac{y^2 - xy}{x^2}$ $\qquad \left[y = x\ln|x| + cx;\ y = \frac{2x}{1 - kx^2}\right]$

3 $y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}$ $\qquad y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$ $\qquad \left[y = \frac{x^4 + 2kx}{k - x^3};\ y = \pm\sqrt{cx^2 - 2x^2\ln|x|}\right]$

4 $y' = \frac{y^3 - x^2y + xy^2}{x^3}$ $\qquad y' = \frac{x - 2y}{x}$ $\qquad \left[(y + 2x)(y - x)^2 = kx^6y^3;\ y = \frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}\right]$

5 $y' = \frac{2y^2 + xy}{x^2}$ $\qquad y' = \frac{2y^2 + xy - x^2}{x^2 + 2xy}$ $\qquad [2y\ln|x| + 2cy + x = 0;\ y^2 + xy + x^2\ln|x| + cx^2 = 0]$

6 $y' = -\frac{y^4 + y^3x + 3x^2y^2 + x^3y + 2x^4}{x^4 + x^2y^2}$ $\qquad \left[-\arctan\left(1 + \frac{y}{x}\right) + c = \ln|x|\right]$

(Suggerimento: dopo aver fatto la sostituzione $t = \frac{y}{x}$ ed aver scritto l'equazione nella forma $xt' = \ldots\ldots$ puoi semplificare la frazione ottenuta)