Concetti chiave e regole

L'integrale indefinito

La funzione $F(x)$ è la **primitiva** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ se per tutti i punti di tale intervallo è $F'(x) = f(x)$.
Una funzione $f(x)$ ha infinite primitive che sono però definite a meno di una costante additiva; l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ è il suo **integrale indefinito**:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Le proprietà

L'integrale indefinito gode di alcune proprietà:

- si può portare fuori dal simbolo di integrazione una costante moltiplicativa
  $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx \quad \text{con } k \in R$
- l'integrale della somma di due o più funzioni è la somma degli integrali delle singole funzioni
  $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Gli integrali immediati

Per trovare l'integrale delle funzioni elementari basta leggere la tabella delle derivate da destra verso sinistra con alcuni accorgimenti:

$\int 1\, dx = x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
$\int x^k\, dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + c \qquad \text{con } k \neq -1$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + c$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$

I metodi di integrazione

Per calcolare l'integrale indefinito di una funzione si applicano le regole di integrazione delle funzioni fondamentali e le proprietà di linearità.
Nel caso di una **funzione razionale fratta**, del tipo $f(x) = \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$ con $a \neq 0$, bisogna distinguere tre casi:

- discriminante del denominatore nullo

  Ci si riconduce a integrali del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ e $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^k} dx$.
- discriminante del denominatore maggiore di zero
  Si scompone il denominatore e si scrive la funzione come somma di due frazioni con denominatore di primo grado e poi si integra.

- discriminante del denominatore minore di zero
  Ci si riconduce all'integrale che ha come primitiva l'arcotangente.

- **Metodo di integrazione per parti.** Si usa quando la funzione integranda può essere vista come il prodotto di due funzioni, una delle quali è la derivata di una funzione nota; se $f'(x)$ è la derivata della funzione nota e $g(x)$ è l'altro fattore del prodotto, la formula di integrazione per parti è la seguente:

  $$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

- **Metodo di sostituzione.** Si usa quando, operando un cambio di variabile, si ottiene un integrale facilmente calcolabile. Per applicare questo metodo:
  - si opera la sostituzione $x = g(t)$
  - si calcola il differenziale dei due membri della precedente relazione
  - si operano le sostituzioni
  - si integra e si applicano le sostituzioni inverse alla primitiva ottenuta.

L'integrale definito

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a,\ b]$, si chiama **trapezoide** la parte di piano delimitata dalla curva corrispondente, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$.
L'area di un trapezoide è il limite per $\Delta x \to 0$ dell'area del plurirettangolo che lo approssima e prende il nome di **integrale definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,\ b]$. In simboli esso si indica con la scrittura

$$\int_a^b f(x) dx$$

Le proprietà

Le proprietà dell'integrale definito sono le seguenti:

- se gli estremi di integrazione sono uguali, l'integrale è uguale a zero: $\int_a^a f(x) dx = 0$
- se si scambiano gli estremi di integrazione, l'integrale cambia segno: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- l'integrale fra a e b è uguale alla somma degli integrali fra a e c e fra c e b:

  $$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- l'integrale fra a e b della somma di due o più funzioni continue è uguale alla somma degli integrali fra a e b di ciascuna funzione:

  $$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + ... + \int_a^b f_n(x) dx$$

- l'integrale fra a e b di una funzione continua $f(x)$ moltiplicata per una costante k è uguale a k volte l'integrale della funzione:

  $$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

- **Teorema della media**. Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a,\ b]$, esiste almeno un punto $c \in [a,\ b]$ per il quale vale la relazione:

  $$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot\ f(c)$$

La funzione integrale

Considerata una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$, il suo integrale calcolato fra a e un punto x variabile in $[a, b]$ è esso stesso una funzione che si chiama **funzione integrale;** tale funzione ha espressione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con } x \in [a, b]$$

La funzione integrale ha come proprietà che la sua derivata coincide con $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$.

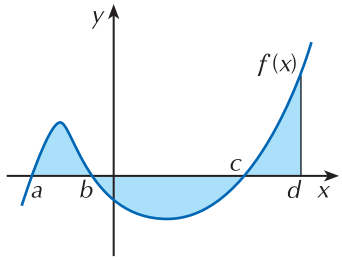
Il calcolo di un integrale definito

Per calcolare il valore di un integrale definito si usa la **formula di Newton-Leibniz;** se $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha che:

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[\varphi(x)\Big]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Il calcolo delle aree e dei volumi

Per calcolare l'area di una regione finita di piano delimitata da una funzione continua $f(x)$ e dall'asse delle ascisse in un intervallo $[a, b]$ si deve calcolare l'integrale definito di $f(x)$ fra a e b quando $f(x)$ è positiva o nulla, l'opposto di questo integrale se $f(x)$ è negativa.
In pratica, si individuano gli intervalli dell'asse x nei quali la funzione $f(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa e poi si calcolano gli integrali definiti in questi intervalli prendendoli con segno positivo quando $f(x) \geq 0$, con segno negativo quando $f(x) < 0$. Con riferimento alla figura a lato:



$$\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

Con il calcolo di un integrale definito si possono anche calcolare misure di volumi di rotazione. Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ il volume V del solido generato da $f(x)$ in una rotazione completa attorno all'asse x si calcola con la formula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$