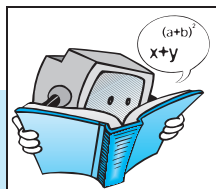


LA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI



Per ricordare

★ Scomporre un polinomio significa scriverlo come prodotto di altri polinomi. Nella scomposizione di un polinomio non devono quindi comparire operazioni di addizione o sottrazione fra polinomi. Per esempio:

- $a(x-2)(x+2)$ è una scomposizione del polinomio $ax^2 - 4a$
- $x(a-2) + y(a+2)$ non è una scomposizione del polinomio $ax - 2x + ay + 2y$

Un polinomio che non si può scrivere in nessun modo come prodotto di altri polinomi si dice **irriducibile**.

I fattori che compaiono nella scomposizione di un polinomio devono essere tutti polinomi irriducibili.

★ I metodi che si utilizzano per scomporre un polinomio si basano sulle proprietà delle operazioni e sulle regole dei prodotti notevoli; essi possono essere così sintetizzati:

- **raccoglimento a fattore comune totale:** si applica quando tutti i termini del polinomio hanno un divisore comune ed utilizza la proprietà di raccoglimento

$$3ab^2 - 6a^2bx + 9ab = 3ab(b - 2ax + 3)$$

- **raccoglimento a fattore comune parziale:** si applica quando alcuni termini del polinomio hanno un divisore comune e altri termini hanno un altro divisore comune, in modo però che, al termine del raccoglimento parziale, si ottengano dei fattori comuni a tutto il polinomio e si possa operare un raccoglimento totale

$$\underbrace{2xy - 6x}_{\text{fattore comune } 2x} + \underbrace{by - 3b}_{\text{fattore comune } b} = \underbrace{2x(y-3) + b(y-3)}_{\text{fattore comune } (y-3)} = (y-3)(2x+b)$$

- **riconoscimento di prodotti notevoli:** rientrano in questi casi

- il quadrato di un binomio (3 termini) $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$
- il quadrato di un trinomio (6 termini) $a^2 + 4x^2 + 9y^2 + 4ax - 6ay - 12xy = (3y - 2x - a)^2$
- il cubo di un binomio (4 termini) $8x^3 - 27a^3 - 36ax^2 + 54a^2x = (2x - 3a)^3$
- la differenza di quadrati (2 termini) $9x^2 - 1 = (3x - 1)(3x + 1)$

- **trinomio caratteristico:** è un trinomio di secondo grado del tipo $x^2 + (a+b)x + ab$ nel quale il termine noto può essere visto come prodotto di due numeri a e b tali che la loro somma sia uguale al coefficiente del termine di primo grado; in questo caso il polinomio si scompone nel prodotto $(x+a)(x+b)$:

$$x^2 - 7x + 12 \rightarrow 12 = (-3) \cdot (-4) \text{ e } -7 = (-3) + (-4) \rightarrow x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

- **regola di Ruffini:** si applica quando si riesce ad individuare un divisore della forma $x - a$; i numeri a sono da ricercarsi fra i divisori del termine noto del polinomio e le frazioni che hanno al numeratore un divisore del termine noto e al denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

possibili numeri $a : \pm 1, \pm 2$

essendo $P(1) = 0$, il polinomio è divisibile per $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x^2 + 3x - 2)$$



Risultano poi utili le seguenti considerazioni:

- $a^n - b^n$ è sempre divisibile per la differenza delle basi e, se n è pari, è divisibile anche per la somma delle basi
- $a^n + b^n$ è divisibile per la somma delle basi solo se n è dispari e non è mai divisibile per la differenza delle basi.

Di conseguenza binomi del tipo $a^n + b^n$ con n pari sono sempre irriducibili.

Dalle precedenti relazioni si deducono due comode regole per scomporre la somma e la differenza di due cubi:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Il trinomio nella seconda parentesi delle due scomposizioni si ricorda con il nome di falso quadrato perchè la sua forma ricorda lo sviluppo del quadrato di un binomio pur non essendolo (c'è il prodotto delle basi e non il doppio prodotto).



Il *M.C.D.* e il *m.c.m.* fra due o più polinomi si trova con la stessa regola che si applica ai numeri e ai monomi; prima però occorre scomporre ciascun polinomio in fattori irriducibili.

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

Scomponi i seguenti polinomi in fattori mediante raccoglimenti totali.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$ax^2 + a^2x^2 - 3abx + a^3x$$

Il *M.C.D.* fra i termini del polinomio è ax che è quindi il fattore da raccogliere; all'interno della parentesi si scrive il quoziente fra il polinomio dato ed il fattore comune:

$$ax(\dots + \dots - \dots + \dots)$$

$$[ax(x + ax - 3b + a^2)]$$

2	$ax^3y - 2axy^4 + ax^2y^2 + axy$	$[axy(x^2 - 2y^3 + xy + 1)]$
3	$2a^2b^2 + 6ab - 2a^3b + 8ab^3$	$[2ab(ab + 3 - a^2 + 4b^2)]$
4	$2abx + abx^2 - 3ab + aby$	$[ab(2x + x^2 - 3 + y)]$
5	$\frac{1}{3}x^2y - x^3 + 2x^2 + x^3y$	$[x^2(\frac{1}{3}y - x + 2 + xy)]$
6	$2x^3y^3 - 6y^4 + 2xy^3 + 4x^2y^3$	$[2y^3(x^3 - 3y + x + 2x^2)]$
7	$2x^3y^3 + x^2y^3 - 3xy^5 + xy^4 + xy^3$	$[xy^3(2x^2 + x - 3y^2 + y + 1)]$
8	$2ax^2y + ay - 3ay^3 + a^2y^2 + a^3y$	$[ay(2x^2 + 1 - 3y^2 + ay + a^2)]$
9	$\frac{1}{2}ab^2c - \frac{3}{2}a^2b^2c^3 + \frac{1}{8}b^2c^3 - \frac{1}{2}a^2b^2c + \frac{1}{4}ab^2c^2$	$[\frac{1}{2}b^2c(a - 3a^2c^2 + \frac{1}{4}c^2 - a^2 + \frac{1}{2}ac)]$
10	$(a + 2b)ax^2 - a(a + 2b) - x(a + 2b)$	$[(a + 2b)(ax^2 - a - x)]$
11	$(x - 1)ax - ay(x - 1) + x^2(x - 1) - x^2y(x - 1)$	$[(x - 1)(ax - ay + x^2 - x^2y)]$
12	$(a + b)ax + (a + b)y - 5(a + b)$	$[(a + b)(ax + y - 5)]$
13	$(a + 2b)x - ax^2(a + 2b) + ax(a + 2b)$	$[x(a + 2b)(1 - ax + a)]$
14	$x(x + b) + 2ab(x + b) - 3(x + b)^2 + b(x + b)^2$	$[(x + b)(2ab - 2x - 3b + bx + b^2)]$
15	$x^3(a - b) + (a - b) + x^2(a - b) + a(a - b)$	$[(a - b)(x^3 + 1 + x^2 + a)]$

Scomponi i seguenti polinomi in fattori mediante raccoglimenti parziali e poi totali.

16 ESERCIZIO SVOLTO

$$xb - x + ab - a$$

Raccogliamo x fra i primi due termini e a fra i secondi due:

$$x(b - 1) + a(b - 1) = (b - 1)(x + a)$$

17	$a^2x + 2b - axb - 2a$	$[(ax - 2)(a - b)]$
18	$2x - 2a + ax^2 - a^2x$	$[(x - a)(ax + 2)]$
19	$a^2x + a + 2ax + 2$	$[(a + 2)(ax + 1)]$
20	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + (a + b)^2$	$[(a + b)(a + b + \frac{1}{2})]$
21	$a^2x + a + 2ax + 2$	$[(a + 2)(ax + 1)]$
22	$x^3 + x - 2x^2 - 2$	$[(x - 2)(x^2 + 1)]$
23	$2mx^2 - 8my + nx^2 - 4ny$	$[(2m + n)(x^2 - 4y)]$
24	$x^3 + 2 + 2x + x^2$	$[(x + 1)(x^2 + 2)]$

$$25 \quad x^3 + y^3 - xy - x^2y^2 \quad [(x - y^2)(x^2 - y)]$$

$$26 \quad ax^3 + 2bx^3 - 2by - ay \quad [(a + 2b)(x^3 - y)]$$

$$27 \quad 3abx^2 + 3abz^2 + x^2 + z^2 \quad (3ab + 1)(x^2 + z^2)$$

$$28 \quad ax + xb + b + c + xc + a \quad [(x + 1)(a + b + c)]$$

$$29 \quad 6xy^2 - 2y - 3xy - x + 3x^2y + 1 \quad [(3xy - 1)(x + 2y - 1)]$$

$$30 \quad 4a^2b - 4ab^2 + 2a - 2b \quad [2(2ab + 1)(a - b)]$$

$$31 \quad a^2x + 2b^2y - b^2 + 2a^2y - a^2 + b^2x \quad [(a^2 + b^2)(x + 2y - 1)]$$

$$32 \quad xa - xb + ya - yb - a + b \quad [(a - b)(x + y - 1)]$$

$$33 \quad 6x^2y - 2x^3y - 6ax^2y + 2ax^3y \quad [2x^2y(a - 1)(x - 3)]$$

Scomponi riconoscendo nei seguenti trinomi anche il quadrato di un binomio.

$$34 \quad a^2x^2 + 2ax + 1 \quad a^2x^2 - 2axb + b^2 \quad [(ax + 1)^2; (ax - b)^2]$$

$$35 \quad x^2 + 2axb + b^2a^2 \quad x^4 + 2a^2x^2 + a^4 \quad [(x + ab)^2; (x^2 + a^2)^2]$$

$$36 \quad \frac{9}{4}a^2x^2 - ax + \frac{1}{9} \quad \frac{9}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 \quad \left[\left(\frac{3}{2}ax - \frac{1}{3} \right)^2; \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right)^2 \right]$$

$$37 \quad ax^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{4}{9}a \quad \frac{9}{4}y^2 + 3y^2z^3 + y^2z^6 \quad \left[a \left(x + \frac{2}{3} \right)^2; y^2 \left(\frac{3}{2} + z^3 \right)^2 \right]$$

$$38 \quad 2a^2x^2 - 8ax + 8 \quad 3x^2 - 6bxy + 3b^2y^2 \quad [2(ax - 2)^2; 3(x - by)^2]$$

$$39 \quad \frac{1}{4}bx^2 + \frac{1}{3}b^2x + \frac{1}{9}b^3 \quad \frac{9}{4}a^3 + 3b^2a^2 + ab^4 \quad \left[b \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}b \right)^2; a \left(\frac{3}{2}a + b^2 \right)^2 \right]$$

$$40 \quad a^4x^2 + 2a^4xy + a^4y^2 \quad 4a^4 + 8a^2b^3 + 4b^6 \quad [a^4(x + y)^2; 4(a^2 + b^3)^2]$$

$$41 \quad x^{4n} + 2x^{2n}y + y^2 \quad x^{2m} + 4a^n x^m + 4a^{2n} \quad [(x^{2n} + y)^2; (x^m + 2a^n)^2]$$

Scomponi riconoscendo nei seguenti polinomi anche il quadrato di un trinomio.

$$42 \quad x^2 + 4xy - 4x + 4y^2 - 8y + 4 \quad [(x + 2y - 2)^2]$$

$$43 \quad \frac{1}{4}x^2 + ax - \frac{2}{3}bx + a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{4}{9}b^2 \quad \left[\left(\frac{1}{2}x + a - \frac{2}{3}b \right)^2 \right]$$

$$44 \quad \frac{1}{4}ax^2 + axy - ax + ay^2 - 2ay + a \quad \left[a \left(\frac{1}{2}x + y - 1 \right)^2 \right]$$

$$45 \quad \frac{3}{4}x^2 + 3xy - \frac{3}{2}x^2y + 3y^2 - 3xy^2 + \frac{3}{4}x^2y^2 \quad \left[3 \left(\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}xy \right)^2 \right]$$

$$46 \quad \frac{1}{9}a^2x + \frac{2}{3}abx - a^2x^2 + b^2x - 3abx^2 + \frac{9}{4}a^2x^3 \quad \left[x \left(\frac{1}{3}a + b - \frac{3}{2}ax \right)^2 \right]$$

Scomponi riconoscendo anche differenze di quadrati.

$$47 \quad 4x^2 - z^2 \quad [(2x - z)(2x + z)]$$

$$48 \quad \frac{4}{81}x^4 - y^2 \quad \left[\left(\frac{2}{9}x^2 - y \right) \left(\frac{2}{9}x^2 + y \right) \right]$$

$$49 \quad a^2 - \frac{1}{25}b^4 \quad \left[\left(a + \frac{1}{5}b^2 \right) \left(a - \frac{1}{5}b^2 \right) \right]$$

$$50 \quad y^4 - \frac{1}{4}x^2 \quad \left[\left(y^2 + \frac{1}{2}x \right) \left(y^2 - \frac{1}{2}x \right) \right]$$

$$51 \quad z^2y^2 - \frac{1}{9}z^2 \quad \left[z^2 \left(y + \frac{1}{3} \right) \left(y - \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$52 \quad 4x^2y^2 - y^2 \quad \left[y^2(2x+1)(2x-1) \right]$$

$$53 \quad \frac{9}{4}ay^2 - ax^4 \quad \left[a \left(\frac{3}{2}y + x^2 \right) \left(\frac{3}{2}y - x^2 \right) \right]$$

$$54 \quad (b+a)^2 - 1 \quad \left[(b+a+1)(b+a-1) \right]$$

55 ESERCIZIO GUIDATO

$$b^4 - x^2 + 2ax - a^2$$

Riscrivi dapprima il polinomio raccogliendo il segno $-$ fra gli ultimi tre termini:

$$b^4 - (x^2 - 2ax + a^2)$$

Il polinomio fra parentesi è adesso il quadrato di un binomio:

$$b^4 - (x - a)^2$$

Puoi applicare adesso la regola della differenza di quadrati.

$$\left[(b^2 + a - x)(b^2 - a + x) \right]$$

$$56 \quad a^4 - a^2 - 2a - 1 \quad \left[(a^2 - a - 1)(a^2 + a + 1) \right]$$

$$57 \quad x^4 + 4x^2 + 4 - 9z^4 \quad \left[(x^2 + 2 - 3z^2)(x^2 + 2 + 3z^2) \right]$$

$$58 \quad 9x^2 - 6xy + y^2 - 9 \quad \left[(y - 3x + 3)(y - 3x - 3) \right]$$

$$59 \quad 9a^2 - b^2 - 4a^2b - 4a^4 \quad \left[(3a + b + 2a^2)(3a - b - 2a^2) \right]$$

$$60 \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{1}{9}y^2 \quad \left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y \right) \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y \right) \right]$$

$$61 \quad 4x^2y^2 + 20xy + 25 - 16z^4 \quad \left[(2xy + 5 + 4z^2)(2xy + 5 - 4z^2) \right]$$

$$62 \quad 9x^{2m} - z^2 \quad \left[(3x^m - z)(3x^m + z) \right]$$

$$63 \quad y^2 - 9x^{2m} \quad \left[(y + 3x^m)(y - 3x^m) \right]$$

$$64 \quad 9a^{2n} - 6a^n + 1 - x^{2m} \quad \left[(3a^n - 1 - x^m)(3a^n - 1 + x^m) \right]$$

$$65 \quad 4x^4 - 4x^2 + 1 - 16y^{2n} \quad \left[(2x^2 - 1 + 4y^n)(2x^2 - 1 - 4y^n) \right]$$

Scomponi riconoscendo nei seguenti polinomi anche il cubo di un binomio.

$$66 \quad 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \quad \left[(2x + 1)^3 \right]$$

$$67 \quad a^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8x^3 \quad [(a - 2x)^3]$$

$$68 \quad 27x^3 - 9x^2 + x - \frac{1}{27} \quad \left[\left(3x - \frac{1}{3} \right)^3 \right]$$

$$69 \quad a^3b^3 + 6a^2b^2 + 12ab + 8 \quad [(ab + 2)^3]$$

$$70 \quad x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy - 1 \quad [(xy - 1)^3]$$

$$71 \quad 8xz^3 + 6xz^2 + \frac{3}{2}xz + \frac{1}{8}x \quad \left[x \left(2z + \frac{1}{2} \right)^3 \right]$$

$$72 \quad 4a^3b^3 + 12a^2b^2c^2 + 12abc^4 + 4c^6 \quad [4(ab + c^2)^3]$$

$$73 \quad \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3y + \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{8}{27}xy^3 \quad \left[x \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y \right)^3 \right]$$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi caratteristici.

74 ESERCIZIO SVOLTO

$$x^2 - 4x - 21$$

Dobbiamo trovare due numeri che hanno come prodotto -21 e come somma -4 .
Poichè $-21 = 7 \cdot (-3) = -7 \cdot 3$ ma solo la seconda coppia dà per somma -4 , il polinomio si scompone in $(x + 3)(x - 7)$.

$$75 \quad x^2 - 9x + 20 \quad x^2 - 8x + 15 \quad [(x - 5)(x - 4); (x - 3)(x - 5)]$$

$$76 \quad x^2 - 6x + 8 \quad x^2 - 4x + 3 \quad [(x - 2)(x - 4); (x - 1)(x - 3)]$$

$$77 \quad x^2 - 4x - 5 \quad x^2 - 2x - 3 \quad [(x + 1)(x - 5); (x + 1)(x - 3)]$$

$$78 \quad y^2 - 4y - 12 \quad x^2 - 2x - 15 \quad [(y + 2)(y - 6); (x + 3)(x - 5)]$$

$$79 \quad b^2 + ab - 6a^2 \quad x^2 + 3bx - 4b^2 \quad [(b - 2a)(b + 3a); (x - b)(x + 4b)]$$

$$80 \quad x^2 + 5xy + 4y^2 \quad x^2 + 7ax + 6a^2 \quad [(x + y)(x + 4y); (x + a)(x + 6a)]$$

81 ESERCIZIO GUIDATO

$$3x^2 - 5x - 2$$

Il coefficiente del termine di secondo grado non è 1; dobbiamo quindi trovare due numeri che abbiano come somma -5 e come prodotto $3 \cdot (-2) = -6$; essi sono -6 e $+1$, quindi scriviamo il termine di primo grado $-5x$ come somma di $-6x$ e di $+x$:

$$3x^2 - 6x + x - 2$$

Procedi adesso con un raccoglimento parziale e poi totale. $[(3x + 1)(x - 2)]$

$$82 \quad 2x^2 - 3x + 1 \quad 4x^2 + 5x + 1 \quad [(2x - 1)(x - 1); (4x + 1)(x + 1)]$$

$$83 \quad 3b^2 - 2b - 1 \quad 2x^2 + 3x + 1 \quad [(3b + 1)(b - 1); (2x + 1)(x + 1)]$$

84	$3x^2 - x - 2$	$2x^2 - 7x + 3$	$[(3x + 2)(x - 1); (x - 3)(2x - 1)]$
85	$4x^2 + 7x - 2$	$5x^2 - 6x + 1$	$[(x + 2)(4x - 1); (x - 1)(5x - 1)]$
86	$4x^2 + 3x - 1$	$4x^2 - 3x - 1$	$[(x + 1)(4x - 1); (4x + 1)(x - 1)]$
87	$4x^2 + 5bx + b^2$	$3x^2 + 5xy + 2y^2$	$[(x + b)(4x + b); (x + y)(3x + 2y)]$
88	$3y^2 + 4ay + a^2$	$5a^2 + 6ax + x^2$	$[(y + a)(3y + a); (a + x)(5a + x)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi applicando il metodo di Ruffini.

89 ESERCIZIO SVOLTO

$$x^3 - x^2 - 10x - 8$$

I possibili divisori del polinomio sono i binomi $x - a$ dove a può essere uguale a $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Applichiamo il teorema di Ruffini e calcoliamo i resti delle divisioni:

$$P(1) = 1 - 1 - 10 - 8 = -18 \quad P(-1) = -1 - 1 + 10 - 8 = 0$$

Abbiamo trovato il primo divisore: $x + 1$

Eseguiamo la divisione

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -10 & -8 \\ -1 & & -1 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

Una prima scomposizione del polinomio è quindi $(x + 1)(x^2 - 2x - 8)$

Per scomporre il trinomio nella seconda parentesi possiamo usare la regola del trinomio caratteristico; in definitiva:

$$x^3 - x^2 - 10x - 8 = (x + 1)(x - 4)(x + 2)$$

90	$x^3 + 4x^2 + x - 6$	$[(x - 1)(x + 2)(x + 3)]$
91	$x^3 - 2x^2 - x + 2$	$[(x - 2)(x + 1)(x - 1)]$
92	$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$	$[(2x - 1)(x - 2)(x + 1)]$
93	$3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$	$[(3x - 1)(x + 1)(x + 3)]$
94	$4x^3 - 7x - 3$	$[(2x + 1)(2x - 3)(x + 1)]$
95	$y^3 - by^2 - 10b^2y - 8b^3$ (Suggerimento: i possibili valori di a sono $\pm b, \pm 2b, \pm 4b, \pm 8b$)	$[(y + b)(y + 2b)(y - 4b)]$
96	$2x^3 - 11bx^2 + 3b^2x + 36b^3$	$[(x - 3b)(x - 4b)(2x + 3b)]$
97	$2x^3 - 5ax^2 - 4a^2x + 3a^3$	$[(x + a)(2x - a)(x - 3a)]$
98	$3x^3 + 16x^2y + 3xy^2 - 10y^3$	$[(x + 5y)(3x - 2y)(x + y)]$
99	$x^4 + 4x^3y - 13x^2y^2 - 4xy^3 + 12y^4$	$[(x - 2y)(x + y)(x + 6y)(x - y)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi ricordando le regole sulla somma e differenza di cubi.

100 ESERCIZIO SVOLTO

$$\frac{1}{27}a^3 - 8x^3$$

Il primo monomio è il cubo di $\frac{1}{3}a$, il secondo è il cubo di $2x$, quindi, tenendo presente la regola:

$$\frac{1}{27}a^3 - 8x^3 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}a - 2x\right)}_{\text{differenza delle basi}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{3}ax + 4x^2\right)}_{\text{falso quadrato}}$$

$$101 \quad 8a^3y^3 - 1 \quad [(2ay - 1)(4a^2y^2 + 2ay + 1)]$$

$$102 \quad 27x^3 + 64y^3 \quad [(3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)]$$

$$103 \quad x^6 - \frac{1}{8} \quad \left[\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right) \right]$$

$$104 \quad \frac{1}{64}a^3 - \frac{1}{125}c^3 \quad \left[\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}c\right) \left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{20}ac + \frac{1}{25}c^2\right) \right]$$

$$105 \quad \left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^3 + 1 \quad \left[\left(\frac{1}{2}x + 2y + 1\right) \left(\frac{1}{4}x^2 + 2xy + 4y^2 - \frac{1}{2}x - 2y + 1\right) \right]$$

$$106 \quad a^3x^3 + (1 - a)^3 \quad [(ax - a + 1)(a^2x^2 - ax + a^2x + 1 + a^2 - 2a)]$$

$$107 \quad \frac{1}{8}b^3 - (a^2 + 2)^3 \quad \left[\left(\frac{1}{2}b - a^2 - 2\right) \left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}a^2b + b + a^4 + 4a^2 + 4\right) \right]$$

$$108 \quad (a - y)^3 - (a + y)^3 \quad [-2y(3a^2 + y^2)]$$

$$109 \quad (2ax - 1)^3 + (ax + 2)^3 \quad [(3ax + 1)(3a^2x^2 - 3ax + 7)]$$

$$110 \quad \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 + \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3 \quad \left[\frac{1}{4}x(x^2 + 48)\right]$$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Scomponi in fattori i seguenti polinomi.

$$1 \quad x^3y^3 + 3x^4y^2 + 3x^5y + x^6 \quad [x^3(x + y)^3]$$

$$2 \quad 2x^3 + 12x^2 + 18x \quad [2x(x + 3)^2]$$

$$3 \quad 3a^3b + 6a^2b^3 + 3ab^5 \quad [3ab(a + b^2)^2]$$

$$4 \quad \frac{2}{3}x^4y + 2x^3y + 2x^2y + \frac{2}{3}xy \quad \left[\frac{2}{3}xy(x + 1)^3\right]$$

$$5 \quad x^2(x - a) + 2(x - a)x + x - a \quad [(x - a)(x + 1)^2]$$

- 6** $27x^3 + 125x^6$ $[x^3(3 + 5x)(9 - 15x + 25x^2)]$
- 7** $4ay^6 + 16a^3y^2 - 16a^2y^4$ $[4ay^2(y^2 - 2a)^2]$
- 8** $x^4a^2 - x^2$ $[x^2(ax - 1)(ax + 1)]$
- 9** $x^2y^3 - \frac{1}{8}x^2z^3$ $[x^2\left(y - \frac{1}{2}z\right)\left(y^2 + \frac{1}{2}yz + \frac{1}{4}z^2\right)]$
- 10** $3a^3b^3 - 12a^2b^2 + 12ab$ $[3ab(ab - 2)^2]$
- 11** $9(x + b)x^2 + 12xy(x + b) + 4(x + b)y^2$ $[(x + b)(3x + 2y)^2]$
- 12** $4a^5x^3 - 8a^3x^3 + 4ax^3$ $[4ax^3(a - 1)^2(a + 1)^2]$
- 13** $\left(x + \frac{1}{3}\right)4b^2 + a^2\left(x + \frac{1}{3}\right) + 4ab\left(x + \frac{1}{3}\right)$ $\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)(a + 2b)^2\right]$
- 14** $\frac{1}{8}b^6 - b^9$ $[b^6\left(\frac{1}{2} - b\right)\left(b^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\right)]$
- 15** $\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 + \frac{1}{4}x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 + x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$ $\left[\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4\right]$
- 16** $3a^2b^5 - 3a^2bc^2$ $[3a^2b(b^2 - c)(b^2 + c)]$
- 17** $(3a + 6b)(a - 3b) + (a + 2b)^2 - a^2 + 4b^2$ $[(a + 2b)(3a - 5b)]$
- 18** $xa - xb + 2ya - 2yb - a + b$ $[(x + 2y - 1)(a - b)]$
- 19** $x^4y^4 + 3x^2y^2 - 4$ $[(xy + 1)(xy - 1)(x^2y^2 + 4)]$
- 20** $6x^3 + 25x^2 + 21x - 10$ $[(2x + 5)(3x - 1)(x + 2)]$
- 21** $(x + 1)^2 + 2(x + 1)(ax + 2) + a^2x^2 + 4ax + 4$ $[(ax + x + 3)^2]$
- 22** $3abx - \frac{1}{3} + 3x - \frac{1}{3}ab$ $\left[\left(3x - \frac{1}{3}\right)(ab + 1)\right]$
- 23** $2x^3y + 8x^2y + 2xy - 12y$ $[2y(x - 1)(x + 2)(x + 3)]$
- 24** $x^5 - 4x^4y + 6x^3 + 4x^3y^2 - 12x^2y + 9x$ $[x(2xy - x^2 - 3)^2]$
- 25** $y^6 - 6x^2y^3 + 9x^4 - y^2$ $[(y^3 - 3x^2 - y)(y^3 - 3x^2 + y)]$
- 26** $(x + 2)^3 - x(x + 2)^2 + 2x(x + 2)$ $[4(x + 2)(x + 1)]$
- 27** $x^3 - 8 + 4(x^2 + 2x + 4)$ $[(x + 2)(x^2 + 2x + 4)]$
- 28** $2ax^6 + 4ax^3 - 6a$ $[2a(x^3 + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1)]$
- 29** $\frac{1}{3}ax^2y + a^2x + \frac{1}{6}byx + \frac{1}{2}ba$ $\left[\frac{1}{6}(b + 2ax)(3a + xy)\right]$
- 30** $(3y - 2)^2 + 3ya - 6yb - 2a + 4b + 9y^2 - 4$ $[(3y - 2)(6y + a - 2b)]$
- 31** $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6$ $[(z + 3)(z - 2)(z^2 + 1)]$

- 32 $2x + 4a + 3x(x + 2a) - 2x^3 - 4ax^2$ $[(2x + 1)(x + 2a)(2 - x)]$
- 33 $x^3y^2(x - 1) - 4xy^2 + 4x^3y^2$ $[xy^2(x - 1)(x + 2)^2]$
- 34 $x^5 + 2x^2 + x^4 + 2x - 2x^3 - 4$ $[(x + 2)(x - 1)(x^3 + 2)]$
- 35 $\frac{1}{2}abx^2 - ax + 3bx - 6$ $\left[\left(\frac{1}{2}ax + 3\right)(bx - 2)\right]$
- 36 $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1$ $[(2x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)]$
- 37 $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$ $\left[\frac{1}{9}(x + 9)(x + 3)\right]$
- 38 $4a - 6b - 2ax + 3bx + 4a^2 - 12ab + 9b^2$ $[(2a - 3b)(2 - x + 2a - 3b)]$
- 39 $\frac{2}{3}x^2y - \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{5}a^3x - \frac{1}{5}a^3y$ $\left[\left(\frac{2}{3}xy + \frac{1}{5}a^3\right)(x - y)\right]$
- 40 $abx^2 + 2abx + ab - x^3 - 2x^2 - x$ $[(ab - x)(x + 1)^2]$
- 41 $a^2(2a - 2x)^2 + (4x^2 - 8ax)(a^2 + x^2 - 2ax)$ $[4(x - a)^4]$
- 42 $4x^2z^4 - y^2 + 2xz^2 + 4x^2z^2 + y + 2xy$ $[(2xz^2 + y)(2xz^2 - y + 2x + 1)]$
- 43 $y^5 - 6y^4 + 12y^3 - 8y^2$ $[y^2(y - 2)^3]$
- 44 $x^2y^3 + xy^3 - x^2yz^2 - xyz^2$ $[xy(x + 1)(y - z)(y + z)]$
- 45 $\frac{4}{9}x^2 - 4xy + 8y^2$ $\left[\frac{4}{9}(x - 3y)(x - 6y)\right]$
- 46 $x^4 - x^2 + x^3 + x - 2$ $[(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)]$
- 47 $x\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right)$ $\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)^2\right]$
- 48 $6(1 - x) + x(x^2 - 1)$ $[(x - 1)(x - 2)(x + 3)]$
- 49 $ab(x - 2) + 4b^2 + 2a^2(5x - 10) - 2b^2x$ $[(5a - 2b)(2a + b)(x - 2)]$
- 50 $ab^3x - b^2x(a - 2) - 2bx$ $[bx(ab + 2)(b - 1)]$
- 51 $\frac{3}{8}x^4 + 81xy^3$ $\left[3x\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}xy + 9y^2\right)\right]$
- 52 $2x^3 + 13x^2 + 22x + 8$ $[(x + 4)(2x + 1)(x + 2)]$
- 53 $ab^3 + 2ab^2 + ab + b + 1$ $[(b + 1)(ab^2 + ab + 1)]$
- 54 $2x^4 - ax^3 - 2a^2x^2 + a^3x$ $[x(x + a)(x - a)(2x - a)]$
- 55 $x^4y + 4x^2y - 5y$ $[y(x - 1)(x + 1)(x^2 + 5)]$
- 56 $ay + by - a^3 - b^3$ $[(a + b)(y + ab - a^2 - b^2)]$
- 57 $x^{2n} + x^n - 2$ $[(x^n - 1)(x^n + 2)]$

$$58 \quad 2x^{2n} + ax^n - a^2 \quad [(2x^n - a)(x^n + a)]$$

$$59 \quad a^2x^{2n} - a^4 \quad [a^2(x^n - a)(x^n + a)]$$

$$60 \quad x^{3n} - 8y^{3m} \quad [(x^n - 2y^m)(x^{2n} + 2x^ny^m + 4y^{2m})]$$

Dopo aver scomposto i seguenti polinomi, determina il loro M.C.D. e il loro m.c.m..

61 ESERCIZIO SVOLTO

$$4x^2 - 8x + 4 \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad ax - a + x - 1$$

Scomponiamo ciascun polinomio:

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x - 1)^2$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x^2 - 1)(x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

$$ax - a + x - 1 = a(x - 1) + (x - 1) = (a + 1)(x - 1)$$

Il solo fattore comune alle tre scomposizioni è il binomio $x - 1$; quindi:

$$M.C.D. = x - 1 \quad m.c.m. = 4(x - 1)^2(x + 1)(x + 2)(a + 1)$$

$$62 \quad x^3 - x \quad 3x^2 + 3x \quad x^2 - 1 \quad [M.C.D. = x + 1; m.c.m. = 3x(x + 1)(x - 1)]$$

$$63 \quad a^3 + 9a^2 + 27a + 27 \quad a^2 + 2a - 3 \quad a^2 - 9 \quad [M.C.D. = a + 3; m.c.m. = (a + 3)^3(a - 3)(a - 1)]$$

$$64 \quad 2a + 2 \quad 2a^2 + 8a + 6 \quad 8a^2 - 8 \quad [M.C.D. = 2(a + 1); m.c.m. = 8(a + 1)(a - 1)(a + 3)]$$

$$65 \quad 3x^2 + 12x + 12 \quad x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \quad 4x + 8 \quad [M.C.D. = x + 2; m.c.m. = 12(x + 2)^3]$$

$$66 \quad x^3 - y^3 \quad x^6 - y^6 \quad x - y \quad [M.C.D. = x - y; m.c.m. = (x - y)(x + y)(xy + x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2)]$$

$$67 \quad y^2 + by - 2b^2 \quad y^2 - b^2 \quad y^2 - 3by + 2b^2 \quad [M.C.D. = y - b; m.c.m. = (y - b)(y + b)(y + 2b)(y - 2b)]$$

$$68 \quad x^4 - x^2 + x^3 - x \quad ax^2 + 2ax^3 + ax^4 \quad x^3 - x \quad [M.C.D. = x(x + 1); m.c.m. = ax^2(x + 1)^2(x - 1)]$$

$$69 \quad bx^2 + 2bx \quad 4b^2x + 4b^2x^2 + b^2x^3 \quad x^2 + 3x + 2 \quad [M.C.D. = 1; m.c.m. = b^2x(x + 2)^2(x + 1)]$$

$$70 \quad 4x^2 - 7x + 3 \quad 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 \quad 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \quad [M.C.D. = 4x - 3; m.c.m. = (4x - 3)^2(x + 1)(x - 1)]$$