Matematica in laboratorio

1. Costruire una circonferenza con GeoGebra

Prepariamo tre slider che chiamiamo *a*, *b* e *c* che rappresentino i coefficienti dell'equazione della circonferenza fissando il range di variazione tra -4 e 4 con passo di incremento 1. Mettiamoci inizialmente nella condizione in cui tutti e tre gli slider siano impostati a -4. Scriviamo adesso l'equazione della circonferenza nella riga di inserimento:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

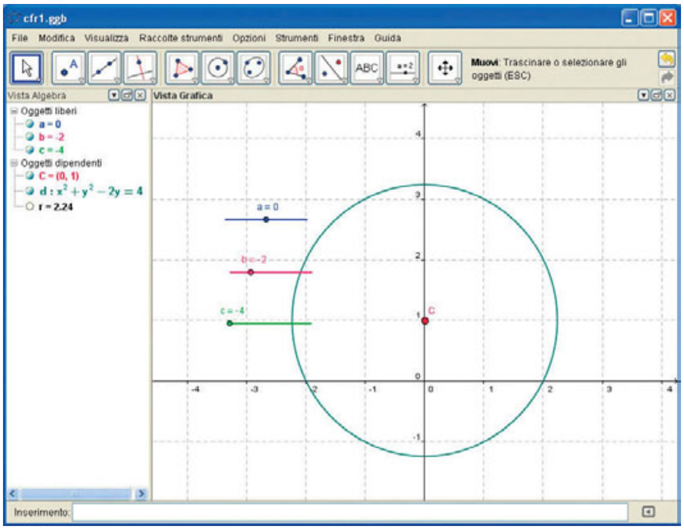
L'equazione viene rappresentata nella finestra di Algebra in funzione del centro e del raggio; per cambiare la forma e scriverla in quella generale apriamo il menu contestuale e dalla voce *Proprietà* scegliamo la scheda *Algebra*; selezioniamo dal menu a discesa la forma generale.
Nella riga di inserimento scriviamo poi le coordinate del centro *C* nella forma generale e l'espressione del raggio (la funzione per il calcolo della radice quadrata è *sqrt*). Con i valori dei parametri impostati a -4 il centro ha coordinate (2, 2), il raggio è uguale a 3.46 (viene usata la notazione anglosassone con il punto decimale).
Facciamo adesso variare i coefficienti uno alla volta manualmente.

- Spostiamo lo slider *a* sul valore 0: il centro della circonferenza si sposta e si posiziona sull'asse *y*.
- Attiviamo l'animazione sullo slider *b* (dal menu contestuale): la circonferenza cambia la sua posizione (osserva in contemporanea come cambiano le coordinate del centro e la misura del raggio) ma il centro appartiene sempre all'asse *y*.

Osserva che quando entrambi gli slider sono uguali a 0 il centro della circonferenza è l'origine.

- Ripetiamo la stessa procedura sullo slider *b*: impostiamolo a 0 e poi facciamo variare *a* con l'animazione; la circonferenza mantiene il centro sull'asse *x*.
- Portiamo il centro nell'origine (entrambi gli slider *a* e *b* uguali a 0) e facciamo variare *c*. Osserviamo che la circonferenza esiste fino a che *c* è negativo, si riduce a un punto quando $c = 0$, non esiste quando $c > 0$ (il valore di *r* risulta non definito in quanto non soddisfa più alla condizione $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$).

Puoi adesso modificare i valori dei parametri per analizzare le altre situazioni particolari descritte nel testo.



2. La risoluzione dei problemi con GeoGebra e con Wiris

Usiamo GeoGebra

GeoGebra mette a disposizione alcuni comandi per costruire una circonferenza e determinarne l'equazione; essi si trovano tutti nel gruppo dell'icona numero 6 e sono:

Circonferenza - dati il centro e un punto

Circonferenza - dati il centro e il raggio

Compasso

Circonferenza - per tre punti

E' immediato comprendere il significato dei primi due comandi e dell'ultimo; lo strumento *Compasso* costruisce invece la circonferenza quando viene assegnato il centro e un segmento, definito attraverso i suoi punti estremi, come raggio. Vediamo come si applicano.

L'equazione di una circonferenza dati il centro e un punto

Vogliamo scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto $C(2, 1)$ e passa per il punto $A(-1, 3)$. Possiamo scrivere direttamente le coordinate dei due punti nella riga di inserimento (oppure cliccare nel punto della finestra grafica); ricordiamo la sintassi per l'inserimento di un punto:

etichetta = (<ascissa>,<ordinata>)

Digitiamo dunque:

$C = (2, 1)$

$A = (-1, 3)$

Attiviamo il comando 6-*Circonferenza dati il centro e un punto* e indichiamo C come centro e A come punto. Subito viene disegnata la circonferenza e la sua equazione viene mostrata nella finestra di Algebra.

L'equazione di una circonferenza dati il centro e il raggio

Attraverso la riga di inserimento, indichiamo le coordinate del centro, per esempio $C(3, -1)$, e indichiamo la misura del raggio, per esempio 2 :

$C = (3, -1)$

$r = 2$

Attiviamo il comando 6-*Circonferenza dati il centro e il raggio* indicando C come centro e digitando r nella finestra di inserimento della misura del raggio.
Anche in questo caso viene sia disegnata la circonferenza, sia scritta la sua equazione nella finestra di algebra.

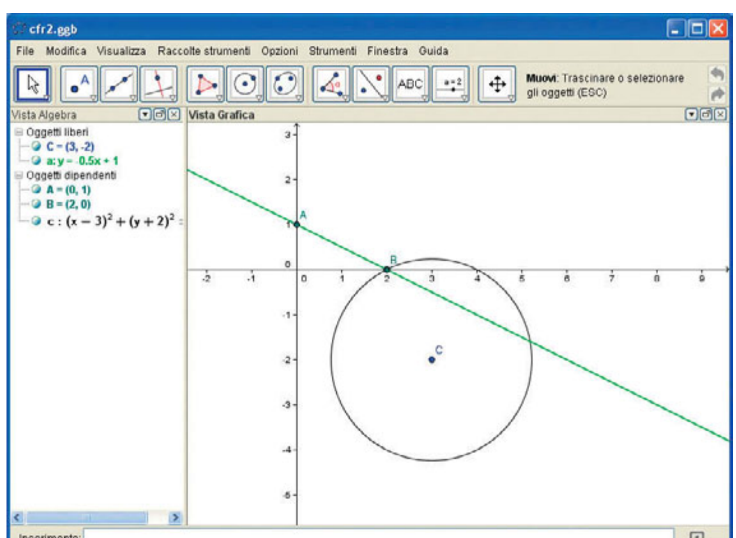
L'equazione di una circonferenza per tre punti

Scriviamo le coordinate dei tre punti nella riga di inserimento, per esempio $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-3, 0)$
Attiviamo il comando 6-*Circonferenza per tre punti* e clicchiamo sui 3 punti A, B e C.

Un problema più complesso

Vogliamo scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto $C(3, -2)$ e raggio uguale al segmento individuato dagli assi cartesiani sulla retta $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Disegniamo prima di tutto la retta digitando la sua equazione nella riga di inserimento e troviamo le sue intersezioni con gli assi cartesiani usando lo strumento 2-*Intersezione di due oggetti* e cliccando sulla retta e sull'asse y prima, sulla retta e sull'asse x poi; ai due punti vengono assegnati i nomi A e B. Usiamo adesso il comando 6-*Compasso* indicando i punti A e B come estremi del segmento che individua il raggio e C come centro della circonferenza. L'equazione viene mostrata nella finestra di Algebra.
In tutte le costruzioni fatte, modificando i dati inseriti attraverso la voce *Proprietà* del menu contestuale (tasto destro del mouse), si possono ottenere le soluzioni di infiniti problemi della stessa tipologia.



Usiamo Wiris

Anche Wiris possiede dei comandi specifici, analoghi a quelli di GeoGebra, per costruire una circonferenza; essi si attivano con la corrispondente icona del menu **Geometria**.

- **circonferenza (centro,raggio)**

  Trova l'equazione della circonferenza che ha centro nel punto indicato e raggio r. Per esempio:

  circonferenza (punto$(1,3)$*,2)* *restituisce l'equazione* $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

- **circonferenza (punto,punto,punto)**

  Trova l'equazione della circonferenza che passa per i tre punti indicati. Per esempio:

  circonferenza (punto$(0,1)$*,punto*$(-2,-1)$*,punto*$(2,-3)$*)* *restituisce l'equazione* $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$

  nella quale vengono già evidenziati il centro e il raggio.

- **circonferenza (centro,punto)**

  Trova l'equazione della circonferenza che ha centro nel primo dei punti elencati e passa per il secondo. Per esempio:

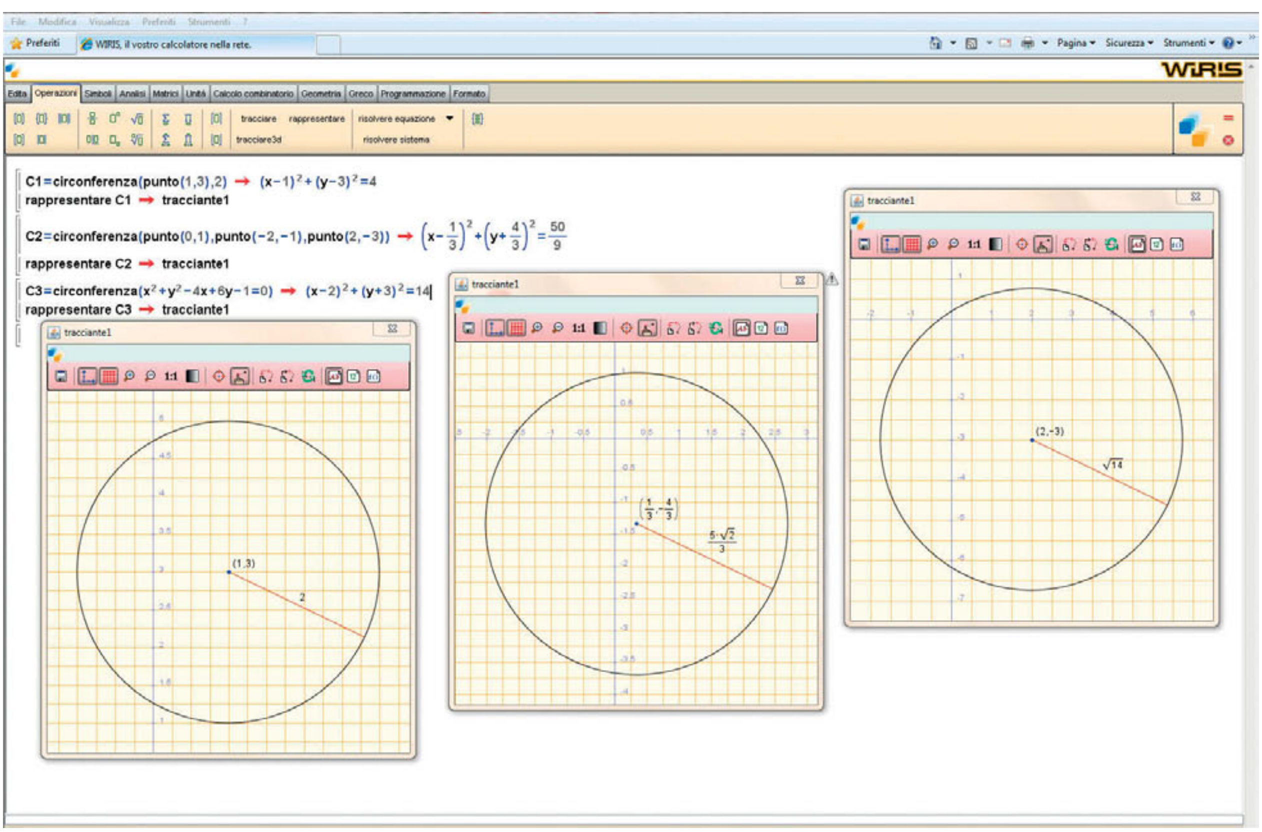
  circonferenza (punto$(-3,1)$*,punto*$(1,2)$*)* *restituisce l'equazione* $(x+3)^2+(y-1)^2=17$

- **circonferenza (equazione)**

  Scrive l'equazione della circonferenza indicata evidenziando centro e raggio. Per esempio:

  circonferenza$(x^2+y^2-4x+6y-1=0)$ *restituisce l'equazione* $(x-2)^2+(y+3)^2=14$

  nella quale si evidenzia che il centro è il punto di coordinate $(2,-3)$ e il raggio è $\sqrt{14}$.



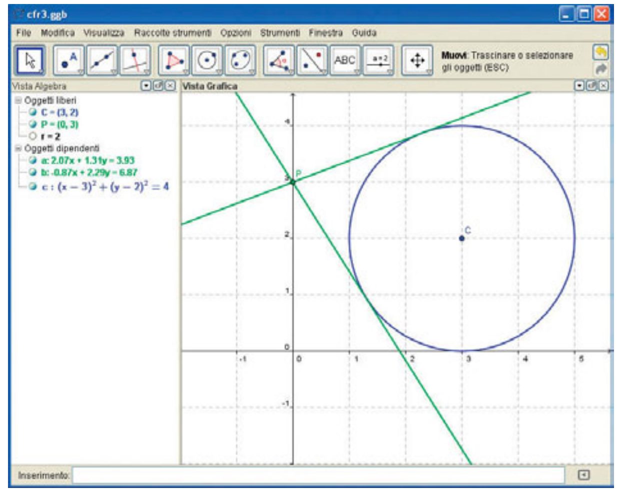
3. LE RETTE TANGENTI

Usiamo GeoGebra

Costruiamo la circonferenza che ha centro nel punto $C(3, 2)$ e raggio $r = 2$; la sua equazione, trovata con GeoGebra in uno dei modi indicati nella precedente esercitazione è $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Prendiamo poi il punto $P(0, 3)$ esterno alla circonferenza e troviamo le rette ad essa tangenti.
La procedura è davvero molto semplice:

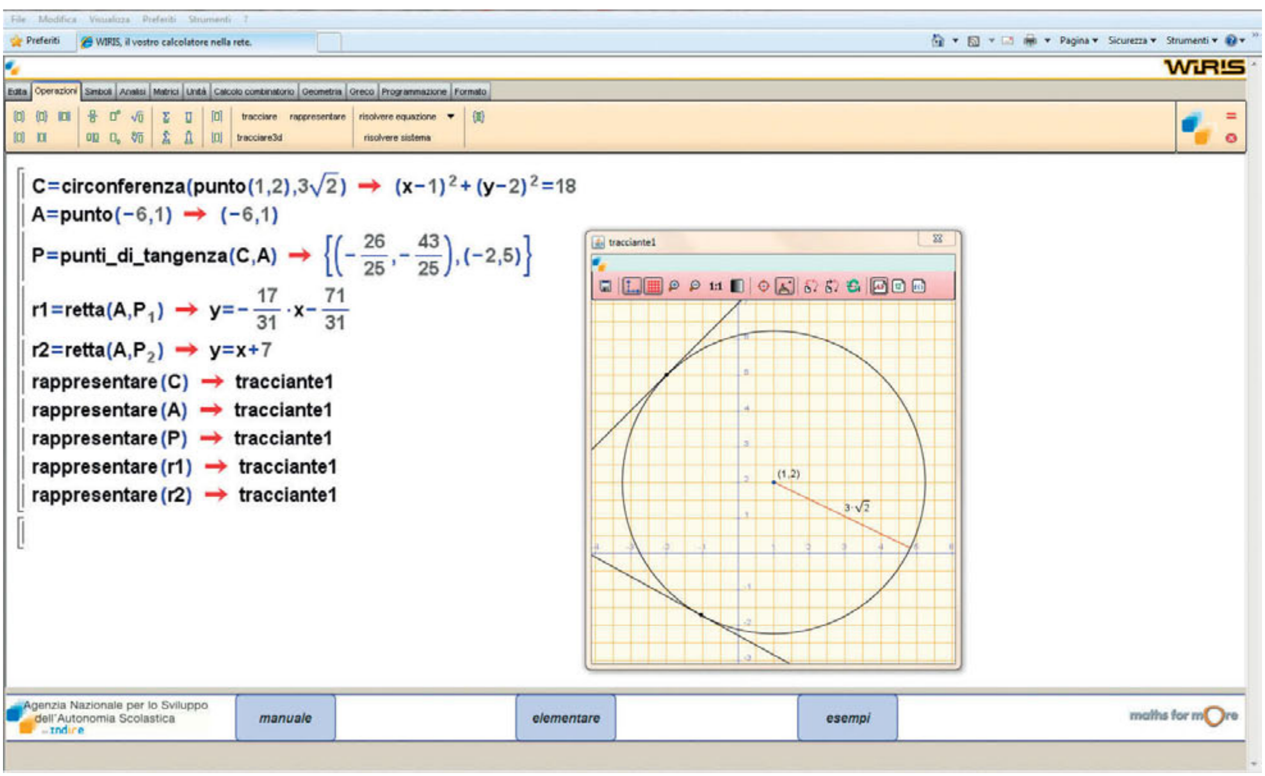
- selezioniamo il comando *4-Tangenti*
- clicchiamo prima sul punto *P* e poi sulla circonferenza.

Le due tangenti vengono disegnate nella finestra grafica e la loro equazione viene rappresentata nella finestra di Algebra.



Usiamo Wiris

La figura che segue mostra le istruzioni per trovare le rette tangenti ad una circonferenza uscenti da un punto *P*.



Con le prime due istruzioni abbiamo costruito una circonferenza e preso il punto *A* ad essa esterno.
Nella terza abbiamo definito i punti di tangenza della circonferenza *C* uscenti dal punto *A*. I punti di tangenza sono due, viene quindi creata in modo automatico una lista di punti *P*, ciascuno dei quali è individuabile tramite un indice numerico progressivo che parte da 1: i punti sono quindi P_1 e P_2.
Abbiamo poi trovato le equazioni delle rette tangenti *r*1 e *r*2 usando il comando della retta per due punti (lo si può trovare nel gruppo **geometria**) inserendo rispettivamente i punti *A* e P_1, *A* e P_2.

Le ultime istruzioni sono quelle di rappresentazione grafica degli oggetti creati.