

# APPROFONDIMENTO

## L'algoritmo euclideo

Euclide, nei suoi *Elementi*, descrive due algoritmi particolari per la determinazione del M.C.D. tra due numeri: il primo si basa sull'esecuzione di sottrazioni successive, il secondo su divisioni successive.

**Algoritmo** è la successione dettagliata e finita di tutte le operazioni da compiere per risolvere un problema.

### Il metodo delle sottrazioni successive

L'osservazione su cui si basa questo metodo è che se due numeri naturali  $a$  e  $b$ , con  $a > b$ , sono divisibili per un terzo numero  $k$ , allora anche la loro differenza è divisibile per  $k$ . Per esempio, poiché 35 e 15 sono entrambi divisibili per 5, anche  $35 - 15 = 20$  è divisibile per 5.

Questo significa che, se  $a > b$

$$M.C.D. (a, b) = M.C.D. (a - b, b)$$

L'algoritmo per determinare il M.C.D. è quindi il seguente:

- se  $a < b$  scambia  $a$  con  $b$
- esegui la differenza  $a - b$
- se la differenza è zero  $\rightarrow M.C.D.(a, b) = b$
- se la differenza non è zero  $\rightarrow$  ripeti i passi dall'inizio.

Per esempio, per trovare  $M.C.D.(20, 15)$  procediamo così:

- $20 - 15 = 5 \rightarrow M.C.D.(20, 15) = M.C.D.(5, 15) = M.C.D.(15, 5)$
- $15 - 5 = 10 \rightarrow M.C.D.(15, 5) = M.C.D.(10, 5)$
- $10 - 5 = 5 \rightarrow M.C.D.(10, 5) = M.C.D.(5, 5)$
- $5 - 5 = 0$

valori scambiati

Quindi  $M.C.D.(20, 15) = 5$

L'inconveniente di questo metodo è che il numero di sottrazioni da eseguire può anche essere elevato (prova a calcolare con questo metodo  $M.C.D. (800, 6)$ ) e quindi l'algoritmo non è molto efficiente.

### Il metodo delle divisioni successive

Un metodo decisamente più efficace si basa sulla considerazione che, se  $r$  è il resto della divisione intera di due numeri  $a$  e  $b$ , con  $a > b$ , allora:

- se  $r = 0 \rightarrow M.C.D. (a, b) = b$
- se  $r \neq 0 \rightarrow M.C.D. (a, b) = M.C.D. (b, r)$

Per trovare il M.C.D. è quindi sufficiente continuare ad eseguire divisioni successive fino a trovare resto zero. Calcoliamo per esempio con questo metodo  $M.C.D. (72, 16)$  :

- $72 : 16 = 4$  con resto 8, quindi  $M.C.D. (72, 16) = M.C.D. (16, 8)$
- $16 : 8 = 2$  con resto 0, quindi  $M.C.D. (16, 8) = 8$

In definitiva,  $M.C.D. (72, 16) = 8$ .

### Il calcolo del m.c.m.

Anche il m.c.m. tra due numeri interi  $a$  e  $b$  si può calcolare applicando l'algoritmo euclideo tenendo presente che:

$$m.c.m. (a, b) = \frac{a \cdot b}{M.C.D. (a, b)}$$

Per esempio, poiché abbiamo visto che  $M.C.D. (72, 16) = 8$ , allora  $m.c.m. (72, 16) = \frac{72 \cdot 16}{8} = 144$ .