Approfondimento

L'angolo tra due rette nel piano cartesiano

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, consideriamo le rette r e s di equazioni

$$y = mx + q \qquad \text{e} \qquad y = m'x + q'$$

Esse, intersecandosi, formano due angoli che sono fra loro supplementari. Indicando con γ quello acuto (***figura 1***), ci chiediamo se esiste una relazione fra γ ed i coefficienti angolari m e m' delle due rette. Indichiamo allora con α l'angolo che la retta r forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse e con β quello che la retta s forma con lo stesso asse e supponiamo che sia $\alpha > \beta$. Le due rette e l'asse delle ascisse individuano un triangolo di cui α è un angolo esterno; possiamo quindi dire che, essendo $\alpha = \beta + \gamma$ per il teorema dell'angolo esterno, allora $\gamma = \alpha - \beta$.

Grazie alle formule che ci consentono di determinare le funzioni goniometriche della differenza degli angoli possiamo calcolare la tangente di γ:

$$\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

tenendo poi presente che è $\tan\alpha = m$ e $\tan\beta = m'$, la relazione diventa

$$\tan\gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

Se invece è $\alpha < \beta$ (***figura 2***), allora $\gamma = \beta - \alpha$ e la tangente dell'angolo γ è data dalla relazione

$$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

In ogni caso, allora, la tangente dell'angolo acuto che le due rette formano intersecandosi è data dalla relazione

$$\tan\gamma = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|$$

Ad esempio, considerate le rette di equazioni $y = 2x - 1$ e $y = -x + 3$ (***figura 3***) di coefficienti angolari rispettivamente 2 e -1, l'angolo acuto γ da esse formato è tale che

$\tan\gamma = \left|\frac{2+1}{1-2}\right| = 3$. Un valore approssimato di γ è $71°\ 33'\ 54''$.

Figura 1

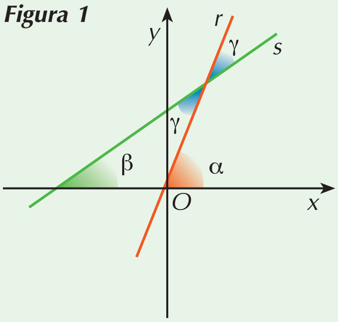


Figura 2

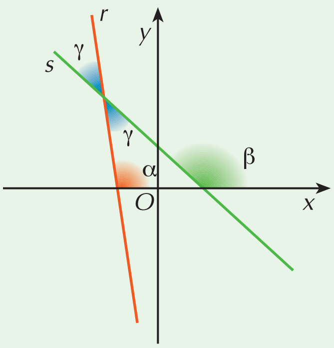
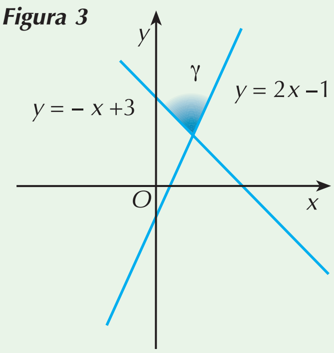


Figura 3



Esercizi

Calcola l'ampiezza degli angoli formati dalle seguenti coppie di rette.

1 **Esercizio guidato**

$r:\ 8x - 2y + 1 = 0 \qquad r':\ 3x - 5y = 0$

Il coefficiente angolare della retta r è: $m = 4$

Il coefficiente angolare della retta s è: $m' = \dfrac{3}{5}$

Poiché le due rette non sono parallele, incontrandosi formano un angolo acuto γ tale che

$$\tan\gamma = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right|$$

Applicando la formula otteniamo: $\tan\gamma = \left|\dfrac{4 - \dfrac{3}{5}}{1 + 4 \cdot \dfrac{3}{5}}\right| = 1 \qquad \rightarrow \qquad \gamma = 45°$

Gli angoli formati dalle due rette sono quindi di 45° e 135°.

2 $r:\ x - y = 0$ $\quad r':\ \left(\sqrt{3} - 2\right) x - y - 3 = 0$ $\quad$ [$\gamma = 60°$ e $\gamma' = 120°$]

3 $r:\ y = x - 1$ $\quad r':\ \left(2 - \sqrt{3}\right) x - y - 1 = 0$ $\quad$ [$\gamma = 30°$ e $\gamma' = 150°$]

4 $r:\ 3x - 4y = 0$ $\quad r':\ 4x + 3y - 5 = 0$ $\quad$ [le rette sono perpendicolari; tan γ non esiste]

5 $r:\ 2x - y + 3 = 0$ $\quad r':\ x + y - 1 = 0$ $\quad$ [$\tan\gamma = 3$, $\gamma \approx 71°33'54''$, $\gamma' \approx 108°26'6''$]

6 $r:\ 3x - 4y + 1 = 0$ $\quad r':\ 2x + 3y - 5 = 0$ $\quad$ $\left[\tan\gamma = \dfrac{17}{6},\ \gamma \approx 70°33'36'',\ \gamma' \approx 109°26'24''\right]$

7 $r:\ x - y = 0$ $\quad r':\ \left(2 + \sqrt{3}\right) x + y = 0$ $\quad$ [$\gamma = 60°$ e $\gamma' = 120°$]

8 $r:\ 3x + 4y - 1 = 0$ $\quad r':\ 6x + 8y + 3 = 0$ $\quad$ [$\tan\gamma = 0$, le rette sono ....]

9 $r:\ 3x - 4y - 1 = 0$ $\quad r':\ x + y + 3 = 0$ $\quad$ [$\tan\gamma = 7$, $\gamma \cong 81°52'12''$, $\gamma' \cong 98°7'48''$]

10 $r:\ y = x + 2$ $\quad r':\ \left(2 + \sqrt{3}\right) x - y = 0$ $\quad$ [$\gamma = 30°$ e $\gamma' = 150°$]

11 $r:\ 1 + 2x - y = 0$ $\quad r':\ 3 + x + 2y = 0$ $\quad$ [le rette sono perpendicolari; tan γ non esiste]