Concetti chiave e regole

Angoli e misure

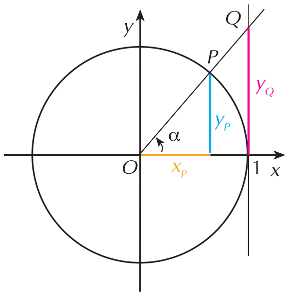
Gli angoli si possono misurare in **gradi** oppure in **radianti**:

- se α è un angolo al centro di una circonferenza di raggio r che insiste su un arco AB:

$$\alpha \text{ (in radianti)} = \frac{\text{lunghezza dell'arco } AB \text{ rettificato}}{r}$$

- se x è la misura di α in radianti e y è quella in gradi, per passare da un sistema all'altro si usa la proporzione $\pi : x = 180 : y$

Le funzioni goniometriche fondamentali

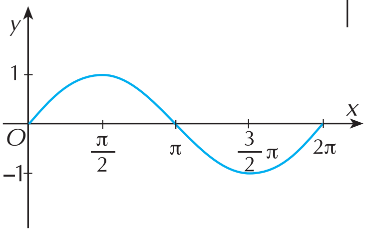


Considerata la circonferenza goniometrica (avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio unitario) ed un angolo α avente vertice nell'origine e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse, si definisce:

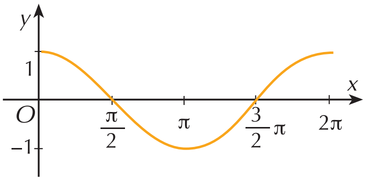
- sin α l'ordinata del punto P
- cos α l'ascissa del punto P
- tan α l'ordinata del punto Q

I grafici e il periodo

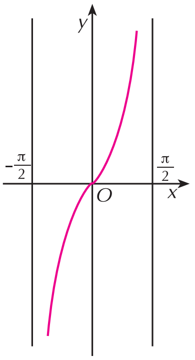
La funzione $y = \sin x$ è periodica di periodo 2π ed il suo grafico è:



La funzione $y = \cos x$ è periodica di periodo 2π ed il suo grafico è:



La funzione $y = \tan x$ è periodica di periodo π ed il suo grafico è:



Le relazioni fondamentali e i valori delle funzioni goniometriche

Tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo α sussistono le seguenti relazioni:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

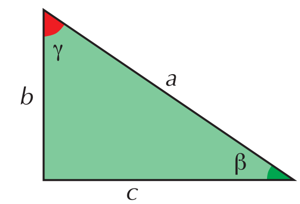
I valori delle funzioni goniometriche di un angolo α si possono determinare in modo approssimato con una calcolatrice scientifica.
Solo di alcuni angoli particolari si possono dare i valori esatti e si ha che:

- $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$
- $\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$

I triangoli rettangoli

I triangoli rettangoli godono delle proprietà enunciate dai seguenti teoremi:

- **Primo teorema.** In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per
  - il seno dell'angolo opposto: $b = a \sin \beta$ $\quad c = a \sin \gamma$
  - il coseno dell'angolo adiacente: $b = a \cos \gamma$ $\quad c = a \cos \beta$



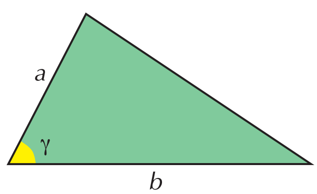
- **Secondo teorema.** In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per
  - la tangente dell'angolo opposto: $b = c \tan \beta$ $\quad c = b \tan \gamma$
  - la cotangente dell'angolo adiacente: $b = c \operatorname{cotan} \gamma$ $\quad c = b \operatorname{cotan} \beta$

L'area di un triangolo e il teorema della corda

Le conseguenze immediate dei due precedenti teoremi sono le seguenti:

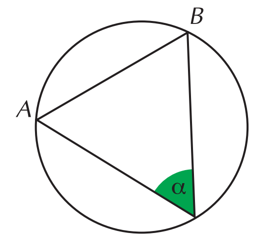
- l'area di un triangolo qualsiasi si può trovare calcolando il semiprodotto della misura di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso:

  $\text{area} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$



- la misura di una corda AB di una circonferenza di raggio r è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza α che insistono sulla corda:

  $\overline{AB} = 2r \sin \alpha$



I triangoli qualunque

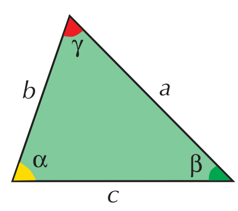
Per i triangoli di qualsiasi tipo valgono i seguenti teoremi:

- **Teorema dei seni:** $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

- **Teorema di Carnot:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

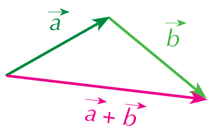
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

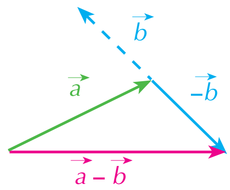


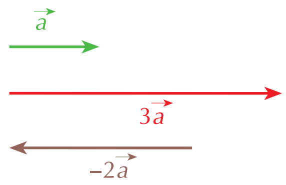
Scalari e vettori

Una grandezza è di tipo **scalare** se si può individuare mediante un numero.
Una grandezza è di tipo **vettoriale** se per individuarla sono necessari una direzione, un verso e un modulo o intensità.
Per eseguire operazioni che coinvolgono quantità scalari si applicano le regole delle operazioni con i numeri.
Per eseguire operazioni con i vettori si seguono regole particolari:

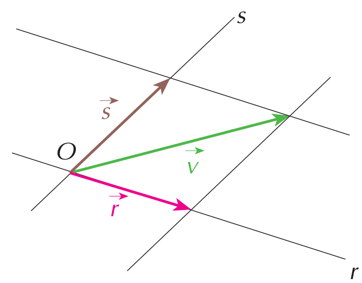
- per **sommare** due vettori si segue la regola punta-coda oppure la regola del parallelogramma
- per **sottrarre** due vettori si somma il primo vettore con l'opposto del secondo
- il **prodotto** un vettore per uno scalare k è il vettore che ha la stessa direzione del vettore dato, lo stesso verso se $k > 0$, verso opposto se $k < 0$, modulo uguale a k volte il modulo del vettore dato.







Di ogni vettore si possono sempre trovare le componenti lungo due direzioni particolari tracciando dalla sua punta le parallele alle direzioni.



I vettori nel piano cartesiano

Ogni vettore $\vec{v}$ si può rappresentare in un piano cartesiano mediante le coordinate dei suoi punti estremi; in particolare, è spesso conveniente raffigurarlo con il primo estremo nell'origine.
In tal caso, indicate con v_x e v_y le sue componenti lungo gli assi cartesiani, con v il suo modulo e con α l'angolo che la sua direzione forma con il semiasse positivo delle ascisse si ha che:

$$v_x = v \cos\alpha \qquad v_y = v \sin\alpha \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Se i vettori sono dati mediante le loro componenti lungo gli assi cartesiani, la somma, la differenza e il prodotto per uno scalare k si determinano con le seguenti regole:

$$\vec{r} + \vec{s} = (r_x + s_x,\ r_y + s_y) \qquad \vec{r} - \vec{s} = (r_x - s_x,\ r_y - s_y) \qquad k\vec{r} = (kr_x,\ kr_y)$$

Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale

In Fisica si usano due particolari tipi di prodotto fra vettori che sono così definiti:

- il **prodotto scalare** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è lo scalare che si ottiene moltiplicando i moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo α da essi formato: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\alpha$
- il **prodotto vettoriale** $\vec{a} \times \vec{b}$ è il vettore che ha modulo $ab \sin\alpha$, direzione perpendicolare al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$, verso definito dalla regola della mano destra.