CAPITOLO

Parallelogrammi e trapezi

OBIETTIVI

- riconoscere un parallelogramma e individuarne le proprietà
- riconoscere parallelogrammi particolari e individuarne le proprietà
- riconoscere trapezi e individuarne le proprietà
- individuare simmetrie nei quadrilateri
- conoscere e applicare le proprietà della corrispondenza parallela di Talete

1 QUADRILATERI E PARALLELOGRAMMI

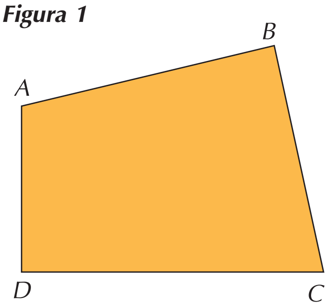
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 11

I quadrilateri

Ricordiamo che un quadrilatero è un poligono che ha quattro lati (***figura 1***); in esso

- i vertici A e C, B e D si dicono opposti, così come i lati AB e CD, AD e BC
- i vertici che appartengono ad uno stesso lato si dicono consecutivi, per esempio A e B oppure A e D sono consecutivi
- i lati che hanno un vertice in comune sono consecutivi, per esempio AD e DC
- gli angoli i cui vertici sono opposti si dicono opposti, per esempio sono opposti gli angoli $\widehat{DAB}$ e $\widehat{DCB}$
- gli angoli che hanno un lato in comune si dicono adiacenti a quel lato; per esempio gli angoli $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BCD}$ sono adiacenti al lato DC, gli angoli $\widehat{BAD}$ e $\widehat{ADC}$ sono adiacenti al lato AD.

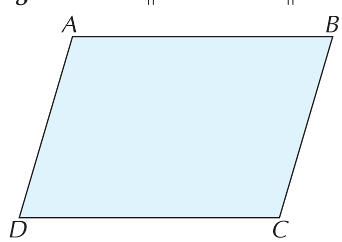
Figura 1



I parallelogrammi

Un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli (***figura 2***).

Figura 2 $AB \parallel DC \wedge AD \parallel BC$

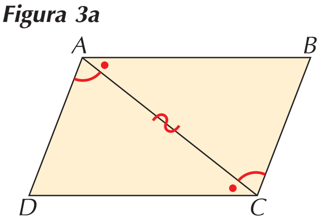


Il parallelogramma è una figura convessa; le sue proprietà, ognuna dimostrata di seguito all'enunciato, sono le seguenti.

LE PROPRIETÀ

- **Ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti.**
  Infatti (***figura 3a***), tracciando la diagonale AC, otteniamo i due triangoli ABC e ADC che hanno:
  - il lato AC in comune
  - gli angoli $\widehat{DAC}$ e $\widehat{ACB}$ congruenti perché alterni interni delle rette parallele AD e CB considerando la retta AC come trasversale

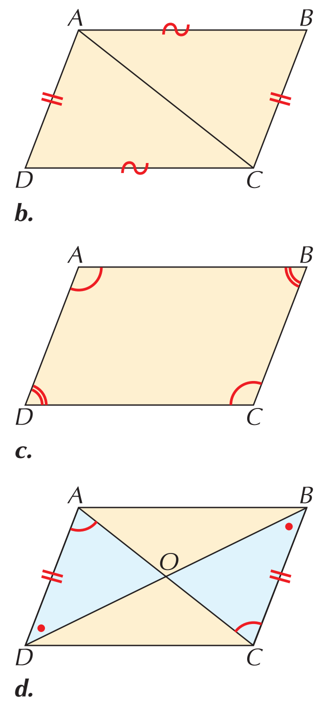
Figura 3a



- gli angoli $\widehat{DCA}$ e $\widehat{CAB}$ congruenti perché alterni interni delle rette parallele AB e CD considerando ancora la retta AC come trasversale.

Per il secondo criterio di congruenza, i due triangoli sono quindi congruenti. In modo analogo si dimostra che, tracciando l'altra diagonale BD, i triangoli ADB e CBD sono congruenti.

Figura 3



- **I lati opposti sono congruenti.**
  Questa proprietà discende immediatamente dalla congruenza dei triangoli ABC e ADC (***figura 3b***):

  $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$

- **Gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari.**
  Questa proprietà discende immediatamente dalla definizione (***figura 3c***):
  - $\widehat{ADC}$ e $\widehat{DCB}$ sono coniugati interni delle rette parallele AD e BC considerando DC come trasversale e sono quindi supplementari.

  Analogamente si dimostra questa priorità per le altre coppie di angoli adiacenti.

- **Gli angoli opposti sono congruenti.**
  Osservando ancora la ***figura 3c*** possiamo affermare che gli angoli opposti $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$ sono congruenti essendo supplementari dello stesso angolo $\widehat{DAB}$ (oppure $\widehat{DCB}$).

  Analogamente sono congruenti gli angoli $\widehat{DAB}$ e $\widehat{DCB}$.

- **Le diagonali si incontrano nel loro punto medio.**
  Indichiamo con O il punto d'intersezione delle diagonali e consideriamo i triangoli ADO e BCO. Di essi possiamo dire che:
  - $AD \cong BC$ per la seconda proprietà
  - $\widehat{DAO} \cong \widehat{OCB}$ perché alterni interni delle rette parallele AD e BC con trasversale AC
  - $\widehat{ADO} \cong \widehat{OBC}$ perché alterni interni delle rette parallele AD e BC con trasversale DB (***figura 3d***).

  Essi sono quindi congruenti per il secondo criterio e in particolare si ha che:
  $AO \cong OC$ e $DO \cong OB$

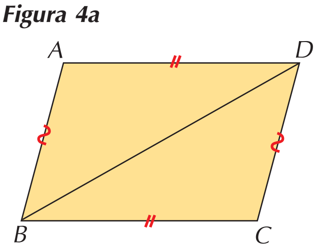
Un quadrilatero, in base alla definizione data, è un parallelogramma se ha i lati opposti paralleli; il seguente teorema ci dà poi ulteriori criteri per riconoscere i parallelogrammi.

COME RICONOSCERE SE UN QUADRILATERO È UN PARALLELOGRAMMA

Teorema. Un quadrilatero convesso è un paralleogramma se ha:
- i lati opposti congruenti, oppure
- gli angoli opposti congruenti, oppure
- le diagonali che si incontrano nel punto medio, oppure
- una coppia di lati opposti congruenti e paralleli.

Dimostrazione.

Figura 4a



- Con riferimento alla ***figura 4a***, tracciamo la diagonale BD e consideriamo i triangoli ABD e CBD; essi hanno $AB \cong CD$ e $AD \cong BC$ per ipotesi ed il lato BD in comune e sono quindi congruenti per il terzo criterio. In particolare:
  - sono congruenti gli angoli $\widehat{ADB}$ e $\widehat{DBC}$ e possiamo concludere che sono parallele le rette AD e BC;

- sono congruenti gli angoli $\widehat{ABD}$ e $\widehat{CDB}$ e possiamo concludere che sono parallele le rette AB e CD.

In base alla definizione, il quadrilatero $ABCD$ è dunque un parallelogramma.

Sappiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è congruente a due angoli piatti (2π), quindi (***figura 4b***):

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D} \cong 2\pi$

Ma, per ipotesi, $\widehat{A} \cong \widehat{C}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{D}$, quindi $\widehat{A}+\widehat{B} \cong \widehat{C}+\widehat{D} \cong \pi$.

Gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono quindi supplementari e perciò le rette AD e BC sono parallele; analogamente sono supplementari gli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ e le rette AB e CD sono anch'esse parallele.

$ABCD$ è dunque un parallelogramma.

Supponiamo che sia $AO \cong OC$ e $BO \cong OD$ (***figura 4c***); essendo anche $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOC}$ perché opposti al vertice, i due triangoli AOD e BOC sono congruenti per il primo criterio, quindi, in particolare $AD \cong BC$.

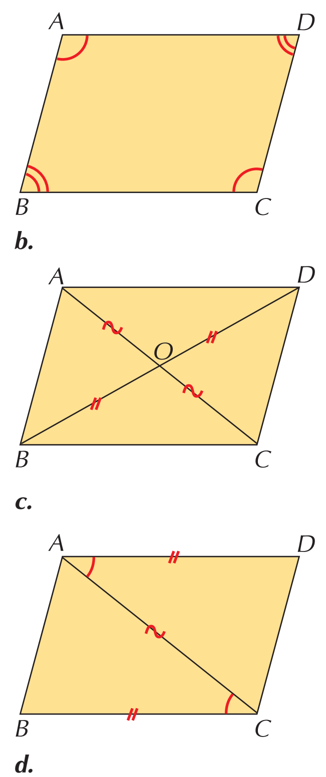
In modo del tutto analogo, anche i triangoli AOB e DOC sono congruenti e perciò $AB \cong CD$. Avendo i lati opposti congruenti, in base alla prima dimostrazione, il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma

Supponiamo che sia $AD \parallel BC$ e $AD \cong BC$ e consideriamo i triangoli ABC e ADC che hanno (***figura 4d***):

- $AD \cong BC$ per ipotesi
- il lato AC in comune
- gli angoli $\widehat{DAC}$ e $\widehat{BCA}$ congruenti perché alterni interni delle rette AD e BC parallele per ipotesi.

Essi sono dunque congruenti per il primo criterio e, in particolare, $AB \cong CD$; avendo i lati opposti congruenti $ABCD$ è un parallelogramma.

Figura 4



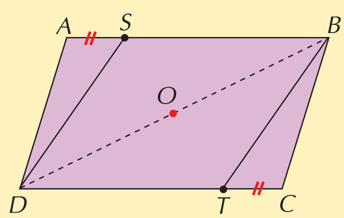
ESEMPI

1. Disegniamo un parallelogramma $ABCD$, prendiamo un punto S sul lato AB e un punto T sul lato CD in modo che sia $AS \cong CT$. Vogliamo dimostrare che il quadrilatero $SBTD$ è un parallelogramma.

Hp. $ABCD$ è un parallelogramma
$AS \cong CT$

Th. $SBTD$ è un parallelogramma (***figura 5***)

Figura 5



Dimostrazione.

Sappiamo che:

$AB \cong DC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$

$AS \cong CT$ per ipotesi

$SB \cong DT$ per differenza di segmenti congruenti

Inoltre $SB \parallel DT$ perché segmenti che appartengono ai lati AB e DC del parallelogramma $ABCD$.
Allora il quadrilatero $SBTD$ ha una coppia di lati opposti congruenti e paralleli ed è perciò un parallelogramma.

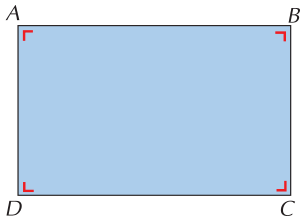
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 15

2 PARALLELOGRAMMI PARTICOLARI

Fra tutti i parallelogrammi ve ne sono alcuni che presentano delle caratteristiche in più rispetto ai parallelogrammi comuni: il rettangolo, il rombo e il quadrato.
Vediamo come possiamo definirli e quali sono le loro peculiarità.

Il rettangolo

Figura 6



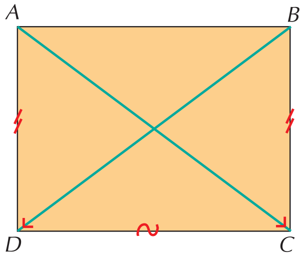
DEFINIZIONE DI RETTANGOLO

Si chiama **rettangolo** un parallelogramma che ha tutti gli angoli congruenti (***figura 6***).

In base a questa definizione possiamo dire che, poiché gli angoli adiacenti di un parallelogramma sono supplementari e due angoli supplementari e congruenti sono retti, gli angoli di un rettangolo sono tutti retti. Come tutti i parallelogrammi, il rettangolo ha i lati opposti congruenti e paralleli e gode di tutte le altre proprietà dei parallelogrammi; in più ha la seguente proprietà:

- **un rettangolo ha le diagonali congruenti.**
  Basta infatti osservare che i triangoli *ADC* e *BDC* sono congruenti perché rettangoli con i cateti congruenti (***figura 7***) e che quindi $AC \cong DB$.

Figura 7

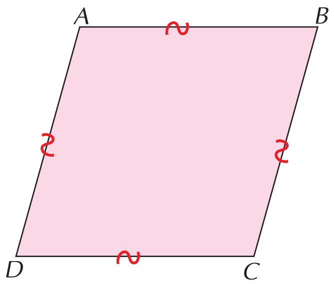


Per riconoscere se un quadrilatero è un rettangolo bisogna innanzi tutto verificare che si tratti di un parallelogramma in uno dei modi visti nel paragrafo precedente; stabilito ciò, si può procedere in uno dei seguenti modi:

- verificare che ci sia almeno un angolo retto
  In questo modo infatti anche gli altri angoli sono retti ed è quindi rispettata la definizione di rettangolo.
- verificare che le diagonali siano congruenti.
  In questo modo (puoi riferirti ancora alla ***figura 7***) i triangoli *ADC* e *BDC* sono congruenti per il terzo criterio (i tre lati sono ordinatamente congruenti); anche gli angoli $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BCD}$ sono quindi congruenti e poiché sono supplementari sono anche retti.

Il rombo

Figura 8



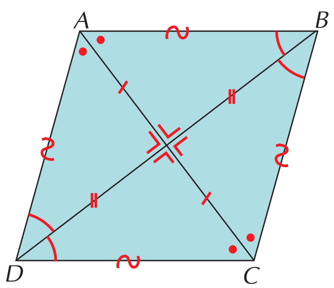
DEFINIZIONE DI ROMBO

Si chiama **rombo** un parallelogramma con tutti i lati congruenti (***figura 8***).

Un rombo possiede tutte le proprietà di un parallelogramma; inoltre:

- **un rombo ha le diagonali che sono fra loro perpendicolari e bisettrici degli angoli opposti.**
  Basta infatti osservare che i triangoli *ABC* e *ADC* sono isosceli (***figura 9***) così come i triangoli *ADB* e *CDB* e che, essendo *DB* e *AC* le mediane di tali triangoli, esse sono anche altezze e bisettrici.

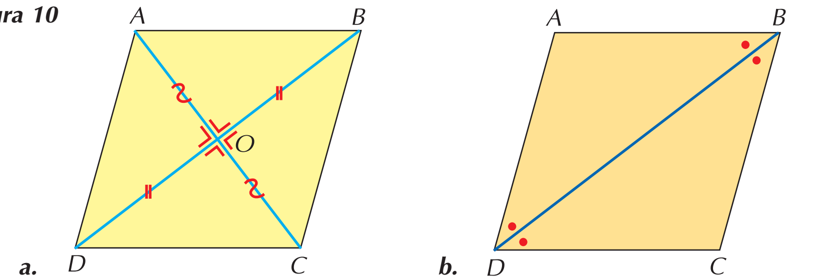
Figura 9



Per riconoscere se un quadrilatero è un rombo bisogna innanzi tutto verificare che sia un parallelogramma; successivamente si può procedere in uno dei seguenti modi:

- verificare che abbia due lati consecutivi congruenti.
  In questo modo, infatti, tutti i lati diventano congruenti fra loro e viene applicata la definizione.
- verificare che le diagonali siano fra loro perpendicolari.
  In questo modo i triangoli rettangoli *AOB, BOC, DOC, DOA* sono tutti congruenti perché hanno i cateti ordinatamente congruenti (***figura 10a***) e si ha che $AB \cong BC \cong DC \cong AD$.
- verificare che una diagonale sia bisettrice degli angoli cui si riferisce.
  Infatti, supposto che $\widehat{ABD} \cong \widehat{CBD}$, e quindi anche $\widehat{ADB} \cong \widehat{BDC}$, i quattro angoli $\widehat{ABD}$, $\widehat{CBD}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{BDC}$ sono congruenti perché metà di angoli congruenti (***figura 10b***); i triangoli *ADB* e *BDC* sono perciò isosceli e congruenti per il secondo criterio e quindi $AB \cong BC \cong DC \cong AD$.

Figura 10



Il quadrato

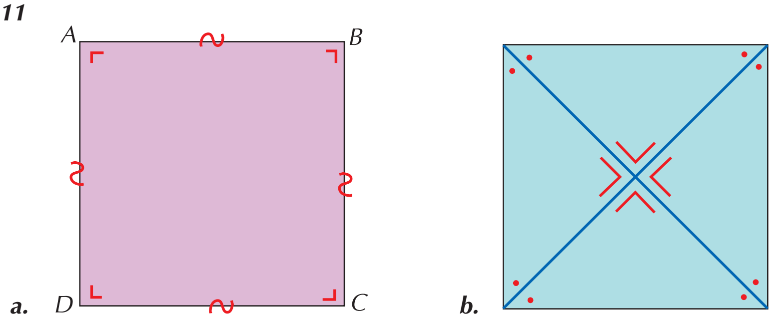
DEFINIZIONE DI QUADRATO

Si dice **quadrato** un parallelogramma che ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti (***figura 11a***).

Dalla definizione si deduce che un quadrato è contemporaneamente un rettangolo e un rombo; di conseguenza, oltre a tutte le proprietà dei parallelogrammi, ha anche tutte le proprietà dei rettangoli e dei rombi e cioè (***figura 11b***):

- **le diagonali sono congruenti, sono perpendicolari, sono bisettrici degli angoli.**

Figura 11



Per riconoscere se un quadrilatero è un quadrato, dopo aver verificato che si tratta di un parallelogramma, abbiamo allora le seguenti possibilità:

- verificare che ci siano due lati consecutivi congruenti e che ci sia un angolo retto

- verificare che le diagonali siano congruenti e perpendicolari
- verificare che le diagonali siano congruenti e che una di esse sia bisettrice degli angoli ai quali si riferisce.

3 Il trapezio

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 19

Un altro quadrilatero che è interessante studiare (lo vediamo anche nella forma dei tetti di alcune case) è il trapezio che definiamo in questo modo.

Definizione di trapezio

Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due lati paralleli.

I lati paralleli di un trapezio si dicono **basi**, gli altri due lati si dicono **obliqui**; si dice inoltre **altezza** del trapezio la distanza fra le due basi (***figura 12***).
I trapezi si possono classificare in relazione alle caratteristiche dei lati obliqui; in particolare (***figura 13***):

- se i lati obliqui sono disuguali il trapezio si dice **scaleno**
- se sono congruenti si dice **isoscele**
- se uno dei lati obliqui è perpendicolare alle basi il trapezio si dice **rettangolo**.

Figura 12

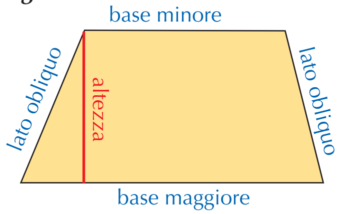
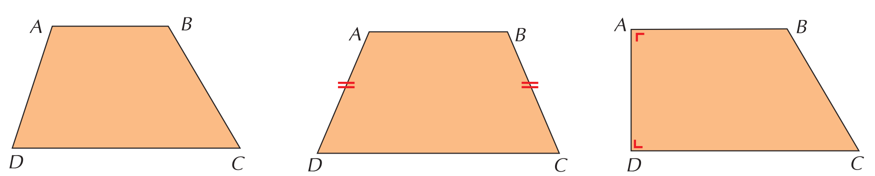


Figura 13



Anche un parallelogramma, avendo due lati opposti paralleli, può essere considerato un particolare trapezio; nel seguito tuttavia, parlando di trapezi, escluderemo questo caso particolare.
Il trapezio non ha particolari proprietà se non quelle che derivano dall'avere due lati paralleli:

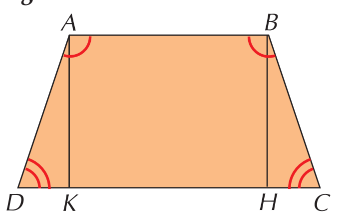
- gli angoli adiacenti a ciascuno dei lati obliqui sono supplementari.
  Infatti (osserva ancora la ***figura 13***) essi sono in ogni caso coniugati interni:
  $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = \pi \qquad \text{e} \qquad \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = \pi$

Le proprietà del trapezio isoscele

Se invece il **trapezio è isoscele**, e solo in questo caso, si evidenziano alcune proprietà:

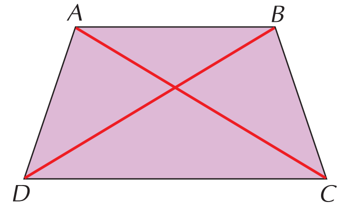
- gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti (***figura 14***);
  Infatti, se tracciamo le altezze uscenti dai vertici A e B (i due segmenti sono congruenti perché rappresentano la distanza fra le rette parallele delle basi), i triangoli ADK e BCH (***figura 14***) sono congruenti perché hanno l'ipotenusa ed un cateto congruenti; di conseguenza anche gli angoli di vertici D e C sono congruenti.
  Inoltre $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ perché supplementari di angoli congruenti.

Figura 14



- le diagonali sono congruenti (***figura 15***);
  Infatti (***figura 15***), i triangoli ADC e DCB sono congruenti per il primo criterio (DC è in comune ai due triangoli, $AD \cong BC$ per ipotesi e $\widehat{ADC} \cong \widehat{BCD}$ per la proprietà precedente) e in particolare $AC \cong DB$.

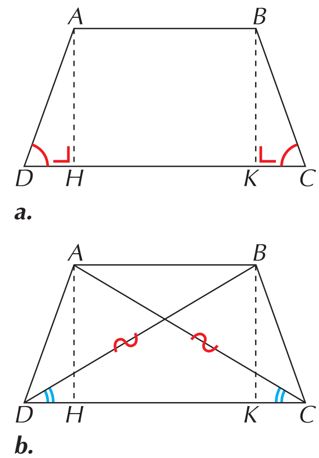
Figura 15



Queste proprietà possono essere invertite diventando un criterio per riconoscere se un trapezio è isoscele.
Un trapezio è isoscele se:

- gli angoli adiacenti ad una base sono congruenti.
  Infatti (***figura 16a***), se dai vertici A e B tracciamo le perpendicolari alla base maggiore DC, i triangoli rettangoli ADH e BCK hanno gli angoli di vertici D e C congruenti per ipotesi e i segmenti AH e BK congruenti perché lati opposti del rettangolo $ABKH$; i due triangoli sono quindi congruenti e perciò $AD \cong BC$.
- le diagonali sono congruenti.
  Infatti (***figura 16b***), se di nuovo dai vertici A e B tracciamo le perpendicolari alla base DC, i triangoli AHC e BKD sono congruenti (hanno l'ipotenusa e un cateto ordinatamente congruenti) e in particolare sono congruenti gli angoli $\widehat{ACH}$ e $\widehat{BDK}$; i triangoli ACD e BCD sono allora congruenti per il primo criterio ($AC \cong BD$ per ipotesi, DC in comune e $\widehat{ACH} \cong \widehat{BDK}$) e quindi $AD \cong BC$.

Figura 16



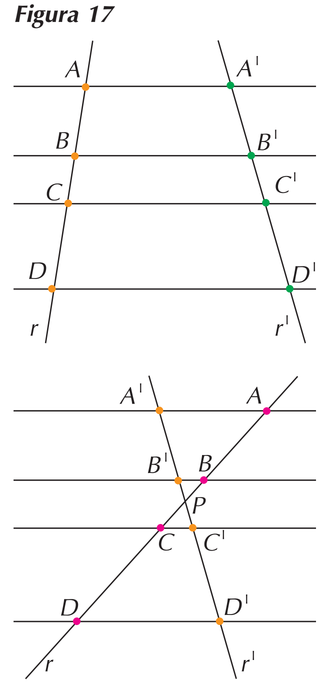
4 LA CORRISPONDENZA DI TALETE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 21

Sappiamo che un fascio di rette parallele è l'insieme di tutte e sole le rette che hanno la stessa direzione e che, se una retta interseca una di queste parallele, allora interseca tutte le altre, cioè è una **trasversale** di tutte le rette del fascio.

Consideriamo dunque un fascio di rette parallele e tagliamolo con due trasversali r e r' come in ***figura 17***; si vengono in questo modo a determinare alcuni punti sulla prima trasversale ed altrettanti sulla seconda che sono le intersezioni delle rette del fascio con le trasversali. Fra i punti della trasversale r e quelli della trasversale r' si viene così a stabilire una corrispondenza biunivoca che associa il punto A' ad A, il punto B' a B, il punto C' a C e così via. Tale corrispondenza si chiama **corrispondenza parallela di Talete**.
Se esiste corrispondenza biunivoca fra i punti delle due trasversali, esiste corrispondenza biunivoca anche fra i segmenti che hanno per estremi questi punti; per esempio, facendo ancora riferimento alla ***figura 17***, si ha che il segmento $A'B'$ è il corrispondente di AB, il segmento $B'D'$ è il corrispondente di BD, il segmento $C'D'$ è il corrispondente di CD e così via.

Figura 17



In generale non vi è alcuna relazione fra un segmento ed il suo corrispondente: salvo casi particolari, AB non è congruente ad $A'B'$, i due segmenti non sono paralleli e non sono perpendicolari e questo per ogni coppia di segmenti che si corrispondono.
Se però capita che due segmenti sulla prima trasversale sono congruenti, allora possiamo dire che anche i loro corrispondenti lo sono; vale infatti il seguente teorema.

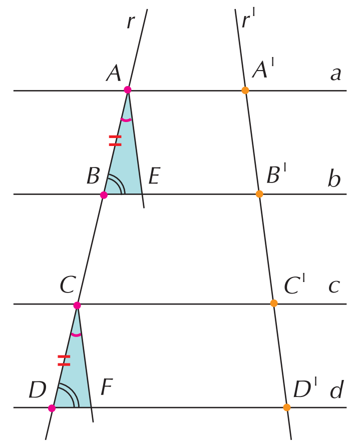
Teorema (della corrispondenza di Talete). Dato un fascio di rette parallele, tagliato da due trasversali, se sulla prima trasversale si individuano due segmenti congruenti, allora anche i loro corrispondenti sulla seconda trasversale sono congruenti.

Hp. $a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel \dots\dots$

$AB \cong CD$

Th. $A'B' \cong C'D'$ (***figura 18***)

Figura 18



Dimostrazione.

Tracciamo i due segmenti AE e CF paralleli alla trasversale r'; i quadrilateri $AA'B'E$ e $CC'D'F$, avendo i lati opposti paralleli, sono dei parallelogrammi, quindi $AE \cong A'B'$ e $CF \cong C'D'$.

Consideriamo adesso i triangoli ABE e CDF; essi hanno:

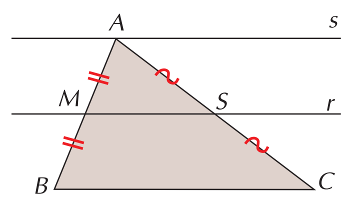
$AB \cong CD$ per ipotesi

$\widehat{ABE} \cong \widehat{CDF}$ perché angoli corrispondenti delle rette parallele b e d tagliate dalla trasversale r

$\widehat{BAE} \cong \widehat{DCF}$ perché angoli corrispondenti delle rette parallele AE e CF tagliate dalla trasversale r

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio ed in particolare $AE \cong CF$. Allora $AE \cong A'B'$, $CF \cong C'D'$, $AE \cong CF$, quindi, per la proprietà transitiva della congruenza, $A'B' \cong C'D'$. ◀

Figura 19



LE CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI TALETE

Questo teorema è importante per le sue conseguenze applicate ai triangoli; si verifica infatti che:

- **se per il punto medio di un lato di un triangolo si traccia la parallela ad un altro lato, questa taglia il terzo lato nel suo punto medio.**

  Infatti, tracciata da M la parallela al lato BC e considerato il fascio di rette di direzione BC (***figura 19***), se $AM \cong MB$, anche $AS \cong SC$.

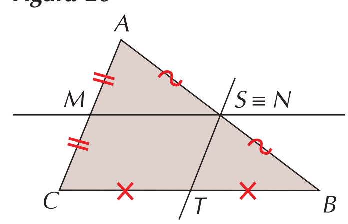
- **Viceversa, se si congiungono i punti medi di due lati di un triangolo, il segmento ottenuto è parallelo al terzo lato ed è inoltre congruente alla sua metà.**

  Infatti, indicati con M e N i punti medi di AC e AB e tracciata da M la parallela al lato BC, essa interseca il lato AB nel suo punto medio S (***figura 20***); quindi, visto che il punto medio di un segmento è unico, N coincide con S e perciò, se si uniscono i punti medi di due lati, il segmento che si ottiene è parallelo al terzo lato.

  Inoltre, se da S tracciamo la parallela ad AC, il punto T di intersezione con il lato BC è punto medio di tale lato, quindi $CT \cong TB$. Ma il quadrilatero $MSTC$ è un parallelogramma e perciò $MS \cong CT$. Ne consegue che, essendo

  $CT \cong \frac{1}{2}CB$, $MS \cong \frac{1}{2}CB$.

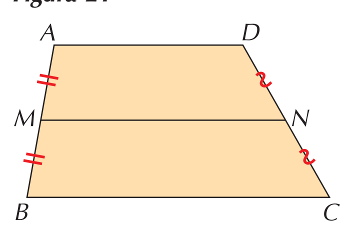
Figura 20



In modo del tutto analogo, si dimostra inoltre che:

- il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma (***figura 21***).

Figura 21



ATTENZIONE AGLI ERRORI

La corrispondenza di Talete **non afferma** che sulle due trasversali i segmenti che si corrispondono sono congruenti, come si può vedere immediatamente dalla ***figura 22***.
I soli casi in cui accade che $AB \cong A'B'$ e, di conseguenza le stesse congruenze si verificano per tutte le altre coppie di segmenti corrispondenti, si verificano quando:

- le due trasversali formano angoli congruenti con le parallele del fascio (***figura 23a***), perché si vengono a formare tanti trapezi isosceli;
- le due trasversali sono parallele (***figura 23b***), perché si vengono a formare tanti parallelogrammi.

Figura 23

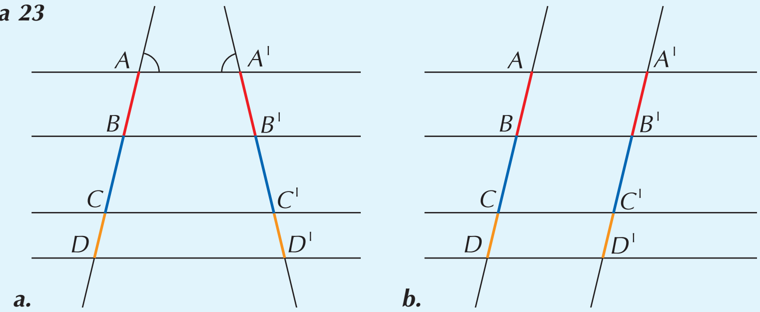
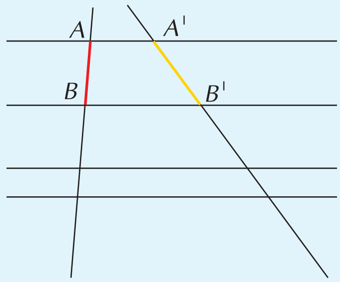


Figura 22



Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 23

5 PARALLELOGRAMMI, TRAPEZI E ISOMETRIE

Un parallelogramma $ABCD$ ha le diagonali che si tagliano nel punto medio O; possiamo quindi dire che i punti A e C sono simmetrici rispetto ad O, così come i punti B e D (***figura 24***):

- un parallelogramma ha quindi un centro di simmetria che è il punto d'intersezione delle diagonali.
  Non ha però assi di simmetria a meno che si tratti di un parallelogramma particolare.
  I parallelogrammi particolari, cioè il rettangolo, il rombo e il quadrato, oltre ad avere un centro di simmetria, hanno anche assi di simmetria.
- Un rettangolo ha due assi di simmetria: le rette che passano per i punti medi dei lati opposti (***figura 25a***).
  Infatti, indicata con s la retta asse di simmetria del lato AB, si ha che $B = \sigma_s(A)$, $BC = \sigma_s(AD)$ perché $BC \parallel AD$ e $BC \cong AD$, quindi $C = \sigma_s(D)$ e perciò s è anche asse di simmetria del lato DC.
  Analogamente la retta r, asse di simmetria del lato AD, è anche asse di BC.
- Un rombo ha due assi di simmetria: le rette delle diagonali (***figura 25b***).
  Infatti, nella simmetria di asse r i punti B e D sono punti uniti e $C = \sigma_r(A)$ perché $AC \perp r$ e $AO \cong OC$. Analogamente, anche la retta s è asse di simmetria.
- Un quadrato, essendo contemporaneamente un rettangolo ed un rombo, ha quattro assi di simmetria: le rette che passano per i punti medi dei lati opposti e le rette delle diagonali (***figura 25c*** di pagina seguente).

Figura 24

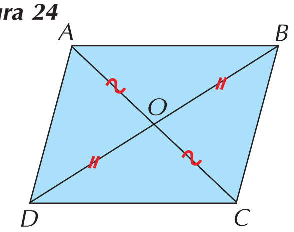
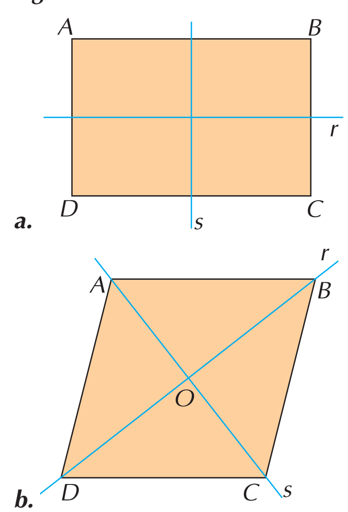


Figura 25



Di un parallelogramma, e quindi anche di un parallelogramma particolare, possiamo poi dire che:

- una coppia di lati paralleli si corrisponde nella traslazione che ha come vettore l'altro lato: con riferimento alla ***figura 26***, il lato DC corrisponde al lato AB nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AD}$, il lato BC corrisponde al lato AD nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$.

Figura 25c.

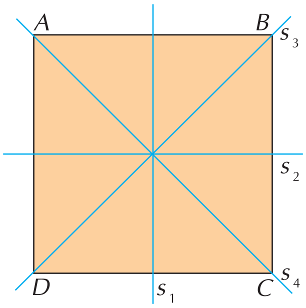
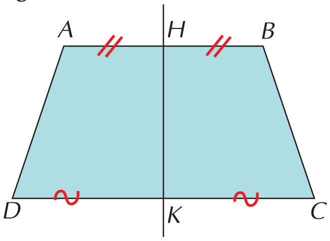


Figura 26

Il trapezio non presenta particolari isometrie a meno che sia isoscele; in questo caso infatti:

- la retta che passa per i punti medi delle basi è asse di simmetria (***figura 27***). Poiché $AH \cong HB$ e $DK \cong KC$, basta dimostrare che HK è perpendicolare alle basi del trapezio. Osserviamo allora che i quadrilateri $AHKD$ e $BHKC$ sono congruenti perché hanno tutti i lati ordinatamente congruenti e $\widehat{HAD} \cong \widehat{HBC}$ e $\widehat{ADK} \cong \widehat{BCK}$. Anche gli angoli $\widehat{AHK}$ e $\widehat{BHK}$ sono quindi congruenti e perciò retti, così come gli angoli $\widehat{DKH}$ e $\widehat{CKH}$; HK è quindi asse di simmetria per il trapezio.

Figura 27



ATTENZIONE AGLI ERRORI

Un parallelogramma generico ha un centro di simmetria, ma, come già detto, non ha assi di simmetria, quindi **non sono assi di simmetria**:

- le diagonali (***figura 28a***):
  i punti B e D non sono simmetrici rispetto alla diagonale AC
- le rette che passano per i punti medi di due lati opposti (***figura 28b***):
  i punti A e B non sono simmetrici rispetto alla retta r, così come C e D.

Inoltre

- le diagonali non sono bisettrici degli angoli (***figura 28c***):
  gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{CAD}$ non sono congruenti.

Figura 28a

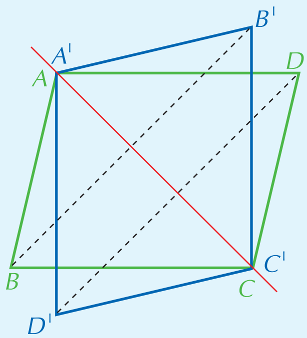


Figura 28