

Giochiamo con la matematica

I problemi che seguono vogliono essere uno stimolo ad esercitare la fantasia e l'intuizione matematica; sono una sfida e anche un momento di riflessione sull'uso appropriato degli strumenti che hai a disposizione, non ultimi il buon senso e un po' di logica. Li abbiamo divisi per tipologia, ma la suddivisione non è così netta perché come li risolverai, con quali strumenti e applicando quali tipi di ragionamento sono solo una tua scelta. Alcuni problemi sono inediti, altri sono problemi "storici" e di essi abbiamo rivisto il linguaggio in chiave più moderna ma senza alterarne il senso, altri ancora sono giochi matematici proposti alle varie gare che si tengono ogni anno. Potrai risolverli da solo, organizzare gare interne alla tua classe, sfidare gli amici a chi è più svelto a trovare la soluzione. In ogni caso, buon divertimento..... e che vinca il migliore!

PROBLEMI NUMERICI

- 1 Stai partecipando al Gran Premio di Monza; fra le urla e l'entusiasmo della folla superi il secondo. In quale posizione ti trovi?
- 2 Quando si usano le lattine di conserva di pomodoro ne rimane sempre un po' nella lattina. Una signora molto parsimoniosa con questi avanzi riesce a fare una lattina piena di conserva dopo averne usate 8. Alla fine dell'anno conta di averne recuperate 12. Quante ne ha comprate?
- 3 Due ragazzi ricevono in regalo una somma di denaro. Il primo riceve € 1024 e ogni mese spende la metà di quello che ha. Il secondo riceve € 1000 e in qualche modo riesce a far fruttare questi soldi in modo che gli rendano l'1% ogni mese; spende sempre tutti gli interessi che guadagna. Dopo quanti mesi il primo rimane senza nemmeno un Euro? Dopo lo stesso periodo di tempo, quanti Euro sono rimasti al secondo?
- 4 In un gioco alla televisione ti hanno dato 12 monete da 1 Euro, ma una di esse, che alla vista non si distingue dalle altre, è falsa. La sola cosa che sai è che la moneta falsa pesa un po' di meno delle altre. Hai a disposizione una bilancia a bracci uguali e solo se riesci a trovare la moneta falsa con al massimo tre pesate puoi aprire il forziere che contiene il premio da € 100000. Come fai?
- 5 Sono dati i seguenti numeri: 16 1156 111556 11115556
ottenuti inserendo le cifre 15 nel mezzo alle altre cifre del numero precedente. Tutti questi numeri sono quadrati perfetti; lo sai dimostrare?
- 6 Pensa a un numero con più di quattro cifre e scrivilo; scrivi di nuovo lo stesso numero nella riga sotto ponendo la prima cifra sotto la quarta del numero precedente ed esegui la somma; per esempio:
$$\begin{array}{r} 76245 \\ \underline{\quad 76245} \\ 76321245 \end{array}$$

Dividi la somma ottenuta per 7, il quoziente ottenuto per 11, il nuovo quoziente per 13. L'ultimo quoziente è il numero che hai pensato. Sai dare una spiegazione di ciò?
- 7 Supponiamo di poter annodare un filo attorno alla Terra lungo la linea dell'Equatore; per semplificare le cose diciamo che la Terra è perfettamente sferica e ha una circonferenza di 40000km. Tagliamo il filo, lo allunghiamo di 1 metro e poi lo riannodiamo su un anello equidistante dalla linea dell'Equatore. Un gatto può passare sotto l'anello?
In generale, se la lunghezza di una circonferenza aumenta di 1m, di quanto aumenta il suo raggio?
- 8 Un arabo morendo lasciò 17 cammelli ai suoi tre figli da ripartirsi per metà al primo figlio, per un terzo al secondo e per un nono al terzo. Siccome la suddivisione presentava difficoltà, gli eredi si rivolsero al *cadì* (cioè al giudice) che si fece prestare un cammello da un conoscente, eseguì la ripartizione secondo i vo-

leri del padre e restituì poi il cammello prestato al legittimo proprietario. In questo modo anche i tre figli furono contenti perché ricevettero ciascuno in più di quanto il loro padre aveva stabilito. Sai indicare il ragionamento seguito dal cadì e quanto ebbe ciascun figlio in più?

- 9** In una sala cinematografica ci sono 735 persone; di sicuro troviamo almeno tre persone che compiono gli anni nello stesso giorno. E' vera o falsa questa affermazione? Quante persone devono esserci nella sala per essere sicuri di avere almeno 5 persone che compiono gli anni nello stesso giorno?
- 10** Una pecora si trova in un prato molto grande; la si lega a un palo posto al centro del prato con una corda di lunghezza tale che essa possa nutrirsi per un giorno mangiando tutta l'erba a sua disposizione. Supposto che l'erba mangiata non germogli più e che quella esistente non cresca più, quale lunghezza occorre dare alla corda il secondo giorno, il terzo e così via, per far sì che la capra possa nutrirsi?
- 11** Una lumaca si trova in un pozzo profondo 10 metri. Durante il giorno risale il pozzo di 3 metri, ma durante la notte scivola verso il basso di 2 metri. Dopo quanti giorni la lumaca riesce a raggiungere la cima del pozzo?
a. 7 b. 6 c. 9 d. 8 e. non lo raggiunge mai
- 12** Sono un leone di bronzo sul bordo di una fontana; due getti zampillano dai miei occhi, un altro dalla mia gola, un altro da una mia zampa. In due giorni il mio occhio destro riempie la vasca; il mio occhio sinistro la riempie in tre e la mia zampa in quattro. Per riempirla bastano sei ore dello zampillo della mia gola. Se tutti i getti dei miei occhi, della mia gola e della zampa spillano acqua insieme, in quante ore riempiono la vasca?
a. $4 + \frac{44}{61}$ b. 4 c. $5 + \frac{1}{2}$ d. 8 e. $6 + \frac{3}{4}$

PROBLEMI ALGEBRICI

- 1** Due recipienti A e B contengono quantità uguali, il primo di vino, il secondo di acqua. Si preleva da A $\frac{1}{n}$ del vino contenuto e la si versa in B ; poi si preleva da B la stessa quantità di miscela e la si versa in A . La quantità di vino tolta da A è maggiore, uguale o minore della quantità di acqua tolta da B ?
- 2** Nel mezzo di uno stagno quadrato di 10 metri di lato cresce una canna di palude che esce per un metro dalla superficie calma dell'acqua. Se si tira la canna verso il margine dello stagno essa raggiunge la superficie dell'acqua con la punta che dista 2m dal punto di mezzo di un lato dello stagno. Quanto è profonda l'acqua?
- 3** Un ricco mercante, fra le altre cose, lascia in eredità ai suoi figli un certo numero di diamanti, tutti di ugual valore, stabilendo che:
- il primo figlio prenda un diamante e $\frac{1}{7}$ di ciò che rimane;
- il secondo, una volta soddisfatto il primo, prenda due diamanti e $\frac{1}{7}$ di ciò che rimane
e così via per tutti i figli.
Alla fine della spartizione risulta che tutti i figli hanno avuto la stessa quantità di diamanti. Quanti diamanti ha ricevuto ogni figlio e quanti sono i figli?
- 4** a e b sono due numeri qualsiasi e c è la loro media aritmetica; ragion per cui si avrà:
 $a + b = 2c$
Moltiplicando entrambi i membri di questa relazione per $a - b$ si trova che:
 $(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$ cioè $a^2 - b^2 = 2ac - 2bc$

Trasportando opportunamente i termini e aggiungendo c^2 si ottiene:

$$a^2 - 2ac = b^2 - 2bc \qquad a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 \qquad (a - c)^2 = (b - c)^2$$

da cui risulta che $a = b$.

Cioè tutti i numeri sono uguali! Dov'è l'errore?

- 5** Se $a \neq b$, anche $x - a \neq x - b$ e quindi $(x - a)^2 \neq (x - b)^2$. L'equazione $(x - a)^2 = (x - b)^2$ dovrebbe quindi essere impossibile.

Ma svolgendo i quadrati si ha che:

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2bx + b^2 \quad \text{cioè} \quad 2x(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{da cui} \quad x = \frac{a + b}{2}.$$

Come si spiega questo risultato?

- 6** Un uomo si reca a Costantinopoli per vendere tre perle. La seconda vale il doppio della prima e la terza vale il doppio della seconda meno un terzo di bisante (*bisante* è il nome medievale della moneta d'oro bizantina). Il commerciante che l'uomo ha incaricato di conservare e vendere le perle gli ha chiesto un compenso pari a $\frac{1}{10}$ del valore complessivo delle tre perle. Venduta la prima, quella che vale di meno, l'uomo, dopo aver pagato al commerciante il decimo dovuto sul valore di tutte le perle, ha avanzato $\frac{1}{8}$ del valore della seconda perla e ancora $\frac{1}{10} + \frac{1}{3}$ di bisante e 21 bisanti. Quanto valgono le tre perle?

- 7** Un problema in latino:

Dic quota nunc hora est? Superest tantum ecce diei, quantum bis gemini exacta de luce trientes?

- 8** In una squadra di calcio ci sono 11 giocatori. L'età media è di 22 anni. Durante una partita un giocatore viene espulso; l'età media dei giocatori rimasti diventa allora di 21 anni. Che età ha il giocatore che è stato espulso?

- 9** Un imbianchino ha pattuito di fare un certo lavoro, ma il committente, che sa quanto egli sia pigro, gli dice che gli pagherà 100 Euro al giorno quando lavora, ma se ne farà dare 150 quando non lavora. Dopo 35 giorni l'imbianchino finisce il lavoro ma, secondo i patti convenuti, non riceve neanche un euro. Quanti giorni non ha lavorato?

- 10** Per entrare nel giardino dell'Eden basta bussare ad ognuno dei tre cancelli che lo separano dal resto del mondo. Nel giardino crescono piante che hanno come frutti monete da un euro e chiunque entri ne può prendere quante ne riesce a portare. Quando però si deve uscire occorre pagare un tributo a ciascuno dei guardiani che, altrimenti, non solo non permettono di lasciare il giardino, ma rinchiudono il malcapitato nelle buie prigioni sotterranee. Il primo guardiano esige la metà delle monete raccolte più due, il secondo la metà delle monete rimaste più due ed il terzo ancora la metà di quelle rimaste più due. Se uscendo dal giardino rimani con sole dieci monete, quante ne avevi raccolte?

- 11** Due uomini si mettono in cammino per un lungo viaggio a piedi. Il primo viaggiatore percorre ogni giorno 20 chilometri, il secondo ne percorre 1 il primo giorno, 2 il secondo, 3 il terzo e così via, aggiungendo sempre un chilometro alla strada percorsa il giorno precedente. Dopo quanti giorni il secondo viaggiatore raggiungerà il primo?

- 12** Il Sig. Rossi vuole smettere di fumare e fa un bilancio della sua vita di fumatore. Si accorge che per i primi $\frac{2}{7}$ della sua vita non ha fumato, poi ha fumato sigarette per 24 anni e infine la pipa per $\frac{1}{3}$ della sua vita. Quanti anni ha il Sig. Rossi?

- 13** Una attrice non vorrebbe rivelare la sua età al giornalista che la sta intervistando e così gli risponde con un indovinello: "Se scambiassi tra loro le cifre della mia età e poi dividessi per 2, dovrei aggiungere 6 per ottenere esattamente la mia età". Il giornalista, che non è molto abile nel risolvere gli indovinelli, traslascia l'età dell'attrice nel suo articolo. Tu sapresti scoprire quanti anni ha?

Soluzioni

PROBLEMI NUMERICI

1 Secondo.

2 85

3 Al dodicesimo mese il primo ragazzo rimane con 50 centesimi, cioè nemmeno un Euro; il secondo ha sempre € 1000.

4 Ad ogni pesata dividi il gruppo di monete in due parti:
prima pesata: 6 e 6 monete e prendi il gruppo che pesa meno
seconda pesata: 3 e 3 monete e prendi il gruppo che pesa meno
terza pesata: scegli due delle monete rimaste e le confronti, se pesano uguali quella falsa è la terza moneta, se pesano in modo differente scegli quella che pesa meno.

5 I numeri della successione sono i quadrati di 4, 34, 334, 3334, ottenuti a partire da 4 aggiungendo ogni volta la cifra 3 alla sinistra del numero precedente.

6 Il numero pensato si moltiplica per 1000 e si aggiunge di nuovo il numero:

$$76245000 + 76245 = 76245 \cdot 1001$$

$$\text{Ma } 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, \text{ quindi } 76245 \cdot 1001 = 76245 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13).$$

7 Il raggio dell'anello è più lungo di circa 16cm di quello della Terra, quindi un gatto ci passa. Qualunque sia la lunghezza della circonferenza, il raggio aumenta sempre della stessa quantità $\frac{1}{2\pi}$ m.

8 Ciascun figlio ricevette rispettivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ di cammello in più; quindi nessuno fu scontento e non si dovette procedere all'uccisione di un cammello per rispettare le quote stabilite dal padre.

9 È vera; nel numero 735 sono contenuti più giorni che in due anni. Almeno 1461 persone.

10 Il primo giorno la pecora mangia l'erba contenuta in un cerchio di raggio r ; il secondo giorno il raggio deve essere $r\sqrt{2}$, il terzo $r\sqrt{3}$ e così via.

11 Ogni giorno la lumaca risale effettivamente di 1 metro. Si deve trovare il più piccolo numero intero n per il quale $n + 3 > 10$, cioè $n = 8$. Infatti dopo 7 giorni la lumaca raggiunge il bordo del pozzo ma subito scivola giù di 2 metri arrivando a 8 metri dal fondo; è necessario quindi un giorno aggiuntivo per risalire e poter uscire. La risposta è **d**.

12 In un'ora il contributo al riempimento della vasca di ciascuna fonte del leone è $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{96}$, $\frac{1}{6}$ rispettivamente; tutti insieme in un'ora riempiono $\frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{96} + \frac{1}{6} = \frac{61}{288}$ di vasca. La vasca può quindi essere riempita in $\frac{288}{61}$ ore. La risposta è **a**.

PROBLEMI ALGEBRICI

1 Le due quantità sono uguali.

2 4 metri.

3 I figli sono 6 e a ciascuno sono toccati 6 diamanti.

4 Se fosse $a = b$, moltiplicando per $(a - b)$ si contravverrebbe al secondo principio di equivalenza delle equazioni.

5 L'elevamento al quadrato non garantisce di ottenere un'equazione equivalente a quella data (non esistono principi di equivalenza in questo senso), per cui da una relazione impossibile come, per esempio $2 = -2$ si può ottenere una relazione vera: $(2)^2 = (-2)^2 \rightarrow 4 = 4$.

6 La prima perla vale 428 bisanti, la seconda 856 e la terza $1711 + \frac{2}{3}$ di bisante.

7 Il testo recita così: *O tu che indichi sì bene le ore, quante ne sono trascorse da stamane, se restano due volte i due terzi delle ore trascorse?* La risposta è 5 ore e $\frac{1}{7}$ di ora (per i Latini il giorno era di 12 ore).

8 32 anni.

9 Non ha lavorato 14 giorni.

10 108 monete.

11 Dopo 39 giorni.

12 63 anni.

13 48 anni.