

APPROFONDIMENTO

La divisione fra polinomi con più di una variabile

Se un polinomio è funzione di due o più variabili, bisogna sempre specificare rispetto a quale lettera si vuole eseguire la divisione; vediamo un esempio.

$$(10a^2y + 9a^3 + 6ay^2 + 4y^3) : (-ay + 2y^2 + 3a^2).$$

Se consideriamo la lettera y come variabile, dovremo ordinare i polinomi rispetto a tale lettera.

$$\begin{array}{r|l} 4y^3 + 6ay^2 + 10a^2y + 9a^3 & 2y^2 - ay + 3a^2 \\ -4y^3 + 2ay^2 - 6a^2y & \hline +8ay^2 + 4a^2y + 9a^3 & 2y + 4a \\ -8ay^2 + 4a^2y - 12a^3 & \\ \hline +8a^2y - 3a^3 & \end{array} \quad \text{Quindi } Q(y) = 2y + 4a \quad R(y) = 8a^2y - 3a^3$$

La divisione si arresta perché il grado dell'ultimo resto parziale è minore di quello del polinomio divisore (rispetto a y , grado del resto 1, grado del divisore 2). Se eseguiamo la divisione rispetto alla lettera a troviamo:

$$\begin{array}{r|l} 9a^3 + 10a^2y + 6ay^2 + 4y^3 & 3a^2 - ay + 2y^2 \\ -9a^3 + 3a^2y - 6ay^2 & \hline +13a^2y + 4y^3 & 3a + \frac{13}{3}y \\ -13a^2y + \frac{13}{3}ay^2 - \frac{26}{3}y^3 & \\ \hline \frac{13}{3}ay^2 - \frac{14}{3}y^3 & \end{array} \quad \text{Quindi } Q(a) = 3a + \frac{13}{3}y \quad R(a) = \frac{13}{3}ay^2 - \frac{14}{3}y^3$$

Osserviamo che il quoziente e il resto della divisione sono diversi nei due casi.

Il polinomio dato si può quindi scrivere in uno qualsiasi dei seguenti modi:

$$10a^2y + 9a^3 + 6ay^2 + 4y^3 = \begin{cases} (2y + 4a)(2y^2 - ay + 3a^2) + 8a^2y - 3a^3 \\ \left(3a + \frac{13}{3}y\right)(3a^2 - ay + 2y^2) + \frac{13}{3}ay^2 - \frac{14}{3}y^3 \end{cases}$$

In generale, eseguendo la divisione rispetto a variabili diverse si ottengono quozienti e resti che sono diversi. Solo se il resto è zero i due quozienti sono uguali, anche se appaiono ordinati in modo diverso:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 & x - 2y \\ -x^3 + 2x^2y & \hline -4x^2y + 11xy^2 - 6y^3 & x^2 - 4xy + 3y^2 \\ +4x^2y - 8xy^2 & \\ \hline 3xy^2 - 6y^3 & \\ -3xy^2 + 6y^3 & \\ \hline 0 & Q(x) = x^2 - 4xy + 3y^2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -6y^3 + 11xy^2 - 6x^2y + x^3 & -2y + x \\ +6y^3 - 3xy^2 & \hline 8xy^2 - 6x^2y + x^3 & 3y^2 - 4xy + x^2 \\ -8xy^2 + 4x^2y & \\ \hline -2x^2y + x^3 & \\ +2x^2y - x^3 & \\ \hline 0 & Q(y) = 3y^2 - 4xy + x^2 \end{array}$$

ESERCIZI

Esegui le seguenti divisioni esatte fra polinomi a coefficienti letterali.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{array}{r|l}
 (4x^3 + b^2x + b^3) : (2x + b) & \begin{array}{l} \textcircled{4x^3} + b^2x + b^3 \\ -4x^3 - 2bx^2 \\ \hline \textcircled{-2bx^2} + b^2x + b^3 \\ +2bx^2 + b^2x \\ \hline 2b^2x + b^3 \\ -2b^2x - b^3 \\ \hline 0 \end{array} \\
 \hline
 \text{In definitiva: } Q(x) = 2x^2 - bx + b^2 & \begin{array}{l} \textcircled{2x} + b \\ \hline 2x^2 - bx + b^2 \end{array}
 \end{array}$$

$$2 \left(\frac{3}{2}m^3v + m^4 + v + \frac{1}{2}m^2v^2 + mv^3 \right) : (m + v) \quad \left[Q(m) = m^3 + \frac{1}{2}m^2v + v^3 \right]$$

$$3 (x^4 - 3ax^3 - 2a^2x^2 + 9a^3x - 3a^4) : (x^2 - 3a^2) \quad [Q(x) = x^2 - 3ax + a^2]$$

$$4 (a^5 - 4a^4 + 6a^3 - 9a^2 + 14a - 8) : (a^2 - 3a + 2) \quad [Q(a) = a^3 - a^2 + a - 4]$$

$$5 (6x^4 - 19x^3y + 12x^2y^2 - 7xy^3 + 5y^4) : (2x - 5y) \quad [Q(x) = 3x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3]$$

$$6 [x^3 + 2x^2 - (a^2 - 6a + 2)x - 2a^2 + 5a + 3] : (x - a + 3) \quad [Q(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a + 1]$$

$$7 (3x^4 - 9ax^3 + 11a^2x^2 + 3a^3x - 4a^4) : (3x^2 - a^2) \quad [Q(x) = x^2 - 3ax + 4a^2]$$

Determina il quoziente ed il resto delle seguenti divisioni rispetto ad ognuna delle lettere che vi compaiono. Verifica che, se la divisione non è esatta, i quozienti ed i resti sono diversi.

$$8 (6a^3 - 17a^2b + 14ab^2 - 3b^3) : (2a - 3b) \quad [Q = 3a^2 - 4ab + b^2]$$

$$9 \left(4x^3 + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{6}y^3 \right) : \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y \right) \quad \left[\begin{array}{l} Q(x) = 6x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{11}{8}y^2, R(x) = -\frac{3}{48}y^3; \\ Q(y) = y^2, R(y) = 4x^3 \end{array} \right]$$

$$10 (2x^4 - 3ax^3 - 6a^2x^2 + 5a^3x + a^4) : (x^2 - 2a^2) \quad \left[\begin{array}{l} Q(x) = 2x^2 - 3ax - 2a^2, R(x) = -a^3x - 3a^4; \\ Q(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}ax + \frac{11}{4}x^2, R(a) = -\frac{1}{2}ax^3 - \frac{3}{4}x^4 \end{array} \right]$$

$$11 \left(2v^4 - 2v^3t + v^3 + \frac{13}{2}v^2t^2 - 3vt^3 - \frac{1}{2}v^2t + 3vt^2 \right) : (2v - t + 1) \quad [Q = v^3 - \frac{1}{2}v^2t + 3vt^2]$$

$$12 (2p^3 - 4p^2m + 3pm^2 - m^3) : (2p^2 - 3pm + m^2) \quad \left[\begin{array}{l} Q(p) = p - \frac{1}{2}m, R(p) = \frac{1}{2}pm^2 - \frac{1}{2}m^3; \\ Q(m) = -m, R(m) = -2mp^2 + 2p^3 \end{array} \right]$$

$$13 (y^5 - 4ty^4 + 6t^2y^3 - 8t^3y^2 + 5t^4y - t^5) : (y^2 - 3ty + t^2) \quad [Q = y^3 - ty^2 + 2t^2y - t^3]$$

$$14 (3y^3 - 4y^2x + x^3) : (2y^2 - x^2) \quad \left[\begin{array}{l} Q(y) = \frac{3}{2}y - 2x, R(y) = \frac{3}{2}x^2y - x^3; \\ Q(x) = -x, R(x) = -2xy^2 + 3y^3 \end{array} \right]$$

$$15 \left(\frac{3}{5}r^4 - \frac{9}{5}r^3x + \frac{167}{15}r^2x^2 + \frac{14}{3}rx^3 - 4x^4 \right) : (3r^2 + rx - x^2) \quad \left[Q = \frac{1}{5}r^2 - \frac{2}{3}rx + 4x^2 \right]$$

$$16 \left(\frac{1}{2}a^6 + a^5b - 2a^3b^3 + b^6 \right) : (a^4 + a^2b^2 - 2b^4) \quad \left[\begin{array}{l} Q(a) = \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{2}b^2, R(a) = -3a^3b^3 + \frac{3}{2}a^2b^4 + 2ab^5; \\ Q(b) = -\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}a^2, R(b) = -2a^3b^3 + \frac{3}{4}a^4b^2 + a^5b + \frac{3}{4}a^6 \end{array} \right]$$