Approfondimento

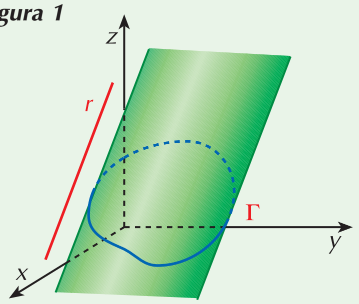
Le equazioni di alcune superfici dello spazio

L'equazione di una superficie cilindrica

In geometria analitica si dice **superficie cilindrica** una qualunque superficie che ha come direttrice una curva Γ appartenente ad un piano e come generatrici le rette che passano per Γ e che sono parallele ad una data retta r (***figura 1***).
Per scrivere l'equazione di un cilindro è necessario quindi conoscere l'equazione di Γ e la direzione delle generatrici.

Particolarmente semplice è il caso in cui il cilindro ha le generatrici parallele ad uno degli assi cartesiani e la curva Γ appartiene al piano coordinato ad esse perpendicolare; si dimostra che, in questi casi, la superficie cilindrica ha nello spazio la stessa equazione che Γ ha nel piano cui appartiene.

Figura 1



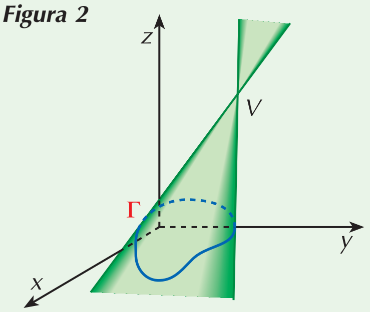
Ad esempio, la superficie cilindrica che ha come direttrice la circonferenza del piano xy di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e per generatrici le rette parallele all'asse z che passano per i punti della circonferenza, ha ancora equazione $x^2 + y^2 = 9$; la superficie cilindrica che ha come direttrice la parabola $z = y^2$ del piano yz e come generatrici le rette parallele all'asse x che passano per i punti della parabola ha ancora equazione $z = y^2$.

L'equazione di una superficie conica

Una **superficie conica** è una qualunque superficie che è luogo di rette passanti per un punto fisso V, detto **vertice**, e per i punti di una curva Γ dello spazio che non passi per V, detta **generatrice** (***figura 2***).
Supponiamo ad esempio di voler scrivere l'equazione del cono che ha vertice nel punto $V(0, 1, 0)$ e che ha per generatrice la circonferenza di equazione (intersezione di una superficie sferica con un piano)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Figura 2



Una retta passante per V ha equazioni $\begin{cases} x = \ell t \\ y = 1 + mt \\ z = nt \end{cases}$ (**A**)

Troviamo le intersezioni di tali rette con il piano $x = 1$ cui appartiene la circonferenza

$$\begin{cases} x = \ell t \\ y = 1 + mt \\ z = nt \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \dfrac{m}{\ell} \\ z = \dfrac{n}{\ell} \end{cases}$$

I punti intersezione sono quindi i punti $P\left(1, 1 + \dfrac{m}{\ell}, \dfrac{n}{\ell}\right)$.

Affinché le rette per V siano generatrici del cono, tali punti devono appartenere alla circonferenza, cioè devono soddisfare l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + 1 = 0$. Troviamo così che deve essere

$$1 + \left(1 + \frac{m}{\ell}\right)^2 + \frac{n^2}{\ell^2} - 2 - \left(1 + \frac{m}{\ell}\right) - \frac{n}{\ell} + 1 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{m^2}{\ell^2} + \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m}{\ell} - \frac{n}{\ell} = 0 \qquad (\mathbf{B})$$

Quest'ultima equazione rappresenta la relazione che individua i punti che appartengono al cono. Cerchiamo di riscriverla in funzione delle variabili x, y e z.
Ricaviamo allora t dalla prima equazione del sistema **(A)** e sostituiamo nelle altre ottenendo

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{\ell} \\ y = 1 + \dfrac{m}{\ell}x \\ z = \dfrac{n}{\ell}x \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} \dfrac{m}{\ell} = \dfrac{y-1}{x} \\ \dfrac{n}{\ell} = \dfrac{z}{x} \end{cases}$$

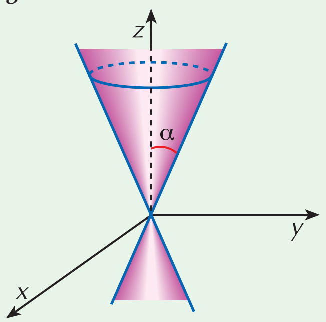
Sostituendo poi le espressioni trovate per i rapporti $\dfrac{m}{\ell}$ e $\dfrac{n}{\ell}$ nell'equazione (**B**) abbiamo infine l'equazione del cono

$$y^2 + z^2 + xy - xz - x - 2y + 1 = 0$$

Un caso in cui si ottiene un'equazione particolarmente semplice si ha quando il cono è generato dalla rotazione di una retta r per l'origine attorno a uno degli assi cartesiani. Se α è l'ampiezza dell'angolo formato da r con tale asse (***figura 3***), l'equazione del cono è

- $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\alpha$ se la rotazione avviene attorno all'asse z
- $x^2 + z^2 = y^2\tan^2\alpha$ se la rotazione avviene attorno all'asse y
- $y^2 + z^2 = x^2\tan^2\alpha$ se la rotazione avviene attorno all'asse x

Figura 3



Ad esempio l'equazione $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}z^2$ rappresenta una superficie conica avente vertice in O, asse di rotazione coincidente con l'asse z e angolo di semiapertura $\alpha = 30°$ ($\tan^2\alpha = \dfrac{1}{3}$ implica $\alpha = 30°$).

L'equazione di una superficie di rotazione

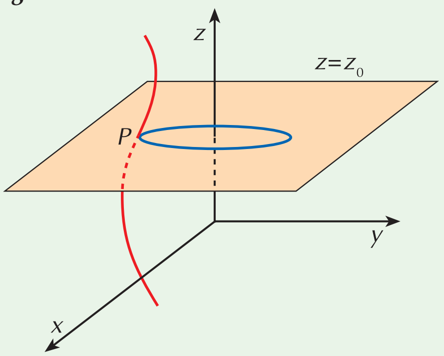
Una superficie di rotazione è la superficie generata dalla rotazione di una curva Γ attorno ad una retta fissa.

Se Γ appartiene al piano xz ed ha equazione $\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e la rotazione avviene attorno all'asse z, un punto $P(x_0, 0, z_0)$ di tale curva descrive una circonferenza, con centro sull'asse z, che appartiene al piano $z = z_0$ e che ha quindi equazione $\begin{cases} x^2 + y^2 = x_0^2 \\ z = z_0 \end{cases}$ (***figura 4***). L'equazione della superficie generata dalla rotazione di Γ attorno all'asse z si ottiene eliminando x_0 e z_0 dalle equazioni

$$F(x_0, z_0) = 0 \qquad x^2 + y^2 = x_0^2 \qquad z = z_0$$

ed ha quindi equazione $F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$.

Figura 4



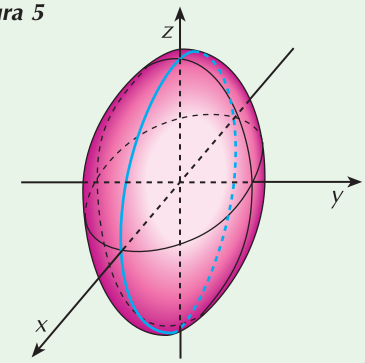
L'equazione della superficie di rotazione si ottiene quindi sostituendo l'espressione $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ al posto di x nell'equazione di Γ.
L'equazione del cono precedente si trova appunto in questo modo: se $z = mx$ è l'equazione della retta r, il cono ha equazione $z = m \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ da cui elevando al quadrato e tenendo conto del significato trigonometrico di m, $\left(m = \dfrac{1}{\tan\alpha}\right)$ si ottiene l'equazione data.

- Ad esempio, la superficie che si ottiene facendo ruotare l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ attorno all'asse z ha equazione

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e si dice **ellissoide rotondo** (***figura 5***).

Figura 5

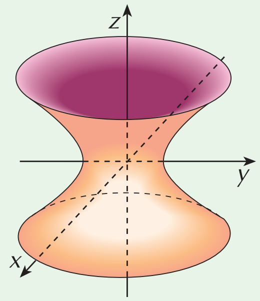


- Analogamente, la superficie che si ottiene facendo ruotare l'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ attorno all'asse z ha equazione

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

e si dice **iperboloide rotondo a una falda** (***figura 6***).

Figura 6

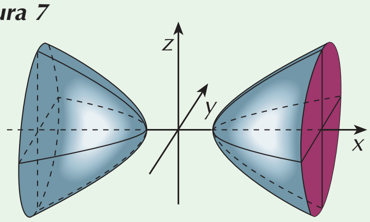


- La stessa iperbole, ruotando attorno all'asse x (il ragionamento è analogo), genera una superficie la cui equazione si ottiene sostituendo $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ al posto di z e cioè

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

Tale superficie prende il nome di **iperboloide rotondo a due falde** (***figura 7***).

Figura 7

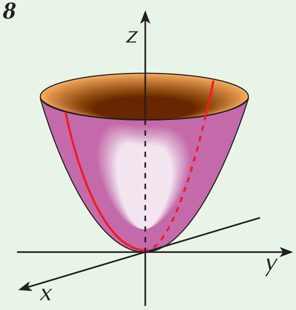


- Infine la parabola di equazione $z = ax^2$, ruotando attorno all'asse z, genera una superficie di equazione

$$z = ax^2 + ay^2$$

che si dice **paraboloide rotondo** (***figura 8***).

Figura 8



ESERCIZI

Superficie cilindrica

Individua le caratteristiche delle seguenti superfici.

1 $x^2 + z^2 = 9$ [generatrici parallele all'asse y; curva direttrice: nel piano xz, circonferenza con centro in $O(0, 0)$ e raggio 3]

2 $x = z^2 - 9$ [generatrici parallele all'asse y; curva direttrice: nel piano xz, parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse x e vertice in $V(-9, 0)$]

3 $y - 4(x-1)^2 = 0$ [generatrici parallele all'asse z; curva direttrice: nel piano xy, parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice in $V(1, 0)$]

4 $y^2 = -z^2$ [asse x]

5 $16x^2 + 9z^2 = 144$
[generatrici parallele all'asse y; curva direttrice: nel piano xz, ellisse con centro di simmetria in $O(0, 0)$, assi coincidenti con gli assi coordinati del piano xz, semiassi 3 e 4, fuochi sull'asse z]

6 $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ [generatrici parallele all'asse z; curva direttrice: nel piano xy, circonferenza con centro in $C(-1, -1)$ e raggio $\sqrt{2}$]

7 Scrivi l'equazione della superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse x e avente come curva direttrice sul piano yz la circonferenza con centro nell'origine e raggio 4. [$y^2 + z^2 - 16 = 0$]

8 Scrivi l'equazione della superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse z e avente come curva direttrice, sul piano xy, l'ellisse con assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani del piano indicato, semiassi uguali a 2 e 3 e fuochi sull'asse x. [$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$]

9 Scrivi l'equazione della sfera che ha centro nel punto di coordinate $(2, 1, 0)$ e raggio $r = 2$. Verificato che il punto $P\left(1, 0, \sqrt{2}\right)$ appartiene alla superficie, determina il piano ad essa tangente in P.
[$x + y - \sqrt{2}z + 1 = 0$]

Superficie conica

Individua le coordinate del vertice, l'asse di rotazione e l'angolo di semiapertura delle seguenti superfici coniche.

10 $3x^2 + 3y^2 = z^2$ $\left[V(0, 0, 0), \text{ asse } z, \ \alpha = \frac{\pi}{6}\right]$

11 $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ $\left[V(0, 0, 0), \text{ asse } x, \ \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

12 $(x-1)^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ $\left[V(1, 0, 0), \text{ asse } z, \ \alpha = \frac{\pi}{3}\right]$

13 $x^2 + z^2 + 4z = y^2 - 4$ $\left[V(0, 0, -2), \text{ asse } y, \ \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

14 Determina l'equazione della superficie conica con vertice nell'origine del riferimento cartesiano, asse coincidente con l'asse x ed angolo di semiapertura $\alpha = \frac{\pi}{6}$. [$x^2 - 3y^2 - 3z^2 = 0$]

15 Determina l'equazione della superficie conica con vertice nell'origine del riferimento cartesiano, asse coincidente con l'asse y e passante per il punto $Q(1, 1, 1)$. [$x^2 + z^2 = 2y^2$]

Superfici di rotazione

Individua le caratteristiche delle seguenti superfici.

16 $\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ [ellissoide rotondo di semiassi 2, 2, 3]

17 $\frac{x^2+y^2}{25}-z^2=1$ [iperboloide rotondo a una falda di semiassi 5, 5, 1]

18 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2+z^2}{10}=1$ [iperboloide rotondo a due falde, semiassi $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$]

19 $z=3x^2+3y^2$ [paraboloide rotondo]