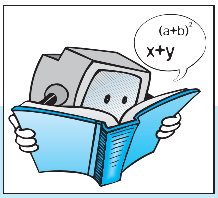
I SISTEMI DI PRIMO GRADO

1



Per ricordare

★ Se un'equazione contiene due incognite, ci sono infinite coppie di valori che la soddisfano: l'equazione $y - 2x + 3 = 0$ è soddisfatta da tutte le coppie di numeri x e y tali che $y = 2x - 3$ (per esempio $x = 2$ e $y = 1$, $x = 0$ e $y = -3$ e così via).
Se consideriamo due equazioni in due incognite, fra le infinite coppie di numeri che soddisfano la prima equazione e le infinite coppie che soddisfano la seconda, può darsi che ce ne sia qualcuna che le soddisfa entrambe. Ricercare queste coppie di numeri significa risolvere il sistema formato dalle due equazioni.
Un **sistema di equazioni** è quindi un insieme di equazioni nelle stesse incognite delle quali si vogliono trovare le soluzioni comuni.
Per indicare che un certo numero di equazioni è in sistema si scrivono le equazioni una sotto l'altra racchiudendole con una parentesi graffa; per esempio:

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

La soluzione di un sistema è l'insieme delle coppie (x, y) che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.
Come per le equazioni, possiamo allora dire che un sistema può essere:

- determinato se ha un numero finito di soluzioni
- indeterminato se ha infinite soluzioni
- impossibile se non ha soluzioni.

★ Il **grado** di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono; se un sistema è di primo grado, tutte le sue equazioni sono di primo grado. Ci occupiamo in questa unità della risoluzione dei **sistemi di primo grado**; in particolare vedremo come si risolvono sistemi di due equazioni in due incognite, di tre equazioni in tre incognite e così via, cioè di sistemi di primo grado in cui il numero di equazioni è pari al numero di incognite.
Un sistema di questo genere si può quindi sempre ricondurre nella forma normale

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

★ I metodi di risoluzione di un sistema si basano su due principi di equivalenza.

- **Principio di sostituzione**: se in un sistema ad una incognita si sostituisce la sua espressione ricavata da una delle altre equazioni, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

Esempio: $\begin{cases} y = x - 3 \\ 2x - 4y + 5 = 0 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} y = \boxed{x - 3} \\ 2x - 4(x - 3) + 5 = 0 \end{cases}$

- **Principio di riduzione**: se ad una equazione di un sistema si sostituisce quella che si ottiene sommandola algebricamente membro a membro con un'altra equazione, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

  Esempio: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} (x - 2y) + (2x + y) = 3 + 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

★ I metodi per risolvere un sistema di primo grado si basano sui precedenti principi e sono i seguenti; li illustriamo su un esempio risolvendo un sistema di due equazioni in due incognite.

- **Metodo di sostituzione** $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$
  - si ricava l'espressione di una variabile da una delle due equazioni $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$
  - si sostituisce questa espressione nella rimanente equazione $\begin{cases} x = \boxed{2y - 3} \\ 3(2y - 3) + 4y - 1 = 0 \end{cases}$
  - si risolve l'equazione in una sola incognita ottenuta $\begin{cases} x = 2y - 3 \\ 6y - 9 + 4y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ y = 1 \end{cases}$
  - si risostituisce nella prima equazione $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

- **Metodo del confronto** $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$
  - si ricavano le espressioni della stessa variabile dalle due equazioni $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ x = \dfrac{4y - 1}{3} \end{cases}$
  - si confrontano le due espressioni e si risolve l'equazione ottenuta $3 - 2y = \dfrac{4y - 1}{3} \rightarrow y = 1$
  - si ricavano le espressioni dell'altra variabile dalle stesse due equazioni $\begin{cases} y = \dfrac{3 - x}{2} \\ y = \dfrac{3x + 1}{4} \end{cases}$
  - si confrontano le due espressioni e si risolve l'equazione ottenuta $\dfrac{3 - x}{2} = \dfrac{3x + 1}{4} \rightarrow x = 1$

  In alternativa, dopo aver trovato il valore della prima variabile si può anche procedere per sostituzione su una delle due equazioni del sistema. In ogni caso si ottiene la soluzione $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

- **Metodo di riduzione** $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$

  – si sommano membro a membro le due equazioni in modo da eliminare una delle due variabili e si riscrive una delle due equazioni:

  $$\begin{cases} (2x + y - 4) + (3x - y + 7) = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x + 3 = 0 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

  – si risolve l'equazione ottenuta in una sola variabile $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$

  – si continua per sostituzione: $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ 3\left(-\dfrac{3}{5}\right) - y + 7 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{26}{5} \end{cases}$

- **Metodo di Cramer** $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 3x + 5y - 6 = 0 \end{cases}$

  – si riscrive il sistema in forma normale $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$

  – si calcola il determinante della matrice dei coefficienti (prodotto dei termini sulla diagonale principale − prodotto dei termini sulla diagonale secondaria):

  $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$$

  – si calcola il determinante Δx che si ottiene dalla matrice dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di x con quella dei termini noti:

  $$\Delta x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{6} & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 6 \cdot 1 = -1$$

  – si calcola il determinante Δy che si ottiene dalla matrice dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di y con quella dei termini noti:

  $$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 3 & \mathbf{6} \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 9$$

  – se $\Delta \neq 0$, la soluzione del sistema è data dalla coppia $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{9}{7} \end{cases}$

  – se $\Delta = 0$, possono capitare due cose:
    - se $\Delta x = 0$ e anche $\Delta y = 0$ (cioè entrambi i determinanti sono nulli) allora il sistema è indeterminato
    - se $\Delta x \neq 0$ oppure $\Delta y \neq 0$ (cioè uno dei due determinanti non è nullo) il sistema è impossibile.

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} 3x - 2y = -7 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Conviene ricavare l'espressione di y dalla seconda equazione $\begin{cases} 3x - 2y = -7 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$

Sostituendo nella prima otteniamo $\begin{cases} 3x - 2(-2x + 7) = -7 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$

La prima equazione è nella sola incognita x e può essere risolta $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$

Risostituendo adesso il valore di x nella seconda equazione troviamo $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

L'insieme soluzione è quindi $S = \{(1, 5)\}$

2 $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ $[S = \{(3, -2)\}]$

3 $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 1 = y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

4 $\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 2x \\ y - x = 4 \end{cases}$ $[S = \{(6, 10)\}]$

5 $\begin{cases} 2x + \frac{2}{3}y = x \\ y = 5 - 4x \end{cases}$ $[S = \{(2, -3)\}]$

6 $\begin{cases} 2\left(y - \frac{3}{2}\right) = 1 + 5x \\ 2(x + 1) - y = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}\right]$

7 $\begin{cases} x - \frac{2}{5} = \frac{3}{2} + y \\ 5y - 3 = 2(x - 1) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{7}{2}, \frac{8}{5}\right)\right\}\right]$

8 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} 3(x + 1) - 5y = -2(x + 1) \\ 3x + 1 = 3(y + 3) \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo il sistema $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x - 3y - 8 = 0 \end{cases}$

Ricavando l'espressione di x dalla prima equazione e sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ 3(y-1) - 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

Poichè la seconda equazione è impossibile, il sistema non ha soluzione ed è $S = \emptyset$.

9 $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 3(x+1) = 4(x+2) - (3y+7) \end{cases}$ [indeterminato]

10 $\begin{cases} \frac{1}{2}y = 1 - \frac{1}{2}x \\ 2(x-1) = \frac{2}{3} - y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\}\right]$

11 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x-2) + y \\ 3[x - 2(2y-3)] = 15 \end{cases}$ [indeterminato]

12 $\begin{cases} x^2 + y = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\ y = \frac{17}{4} + x \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-2, \frac{9}{4}\right)\right\}\right]$

13 $\begin{cases} 5y - \frac{6}{5} = \frac{1}{5}y + \frac{24}{5}x \\ x + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(3y-2) \end{cases}$ $[S = \emptyset]$

14 $\begin{cases} \frac{4}{3}(x+y) = 2x + y - 1 \\ 7 - 3x(x+1) - y = -3x^2 \end{cases}$ $[S = \{(2, 1)\}]$

15 $\begin{cases} 2(x+y)^2 = \frac{1}{3} + 4xy - 2(x+y) + 2(x^2+y^2) \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)\right\}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo del confronto.

16 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

Ricaviamo la stessa variabile dalle due equazioni: $\begin{cases} y = 4x + 9 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$

Confrontiamo e risolviamo l'equazione in x: $4x + 9 = -2x - 3 \quad \rightarrow \quad x = -2$

Ricaviamo l'altra variabile dalle due equazioni: $\begin{cases} x = \dfrac{y-9}{4} \\ x = \dfrac{-y-3}{2} \end{cases}$

Confrontiamo e risolviamo l'equazione in y: $\dfrac{y-9}{4} = \dfrac{-y-3}{2} \quad \rightarrow \quad y = 1$

L'insieme delle soluzioni è dunque: $S = \{(-2, 1)\}$.

Una volta trovato il valore della x si poteva anche procedere per sostituzione in una delle due equazioni:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4x + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

17 $\begin{cases} -x + 2y = -8 \\ \dfrac{1}{2}x + y = -2 \end{cases}$ $[S = \{(2, -3)\}]$

18 $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + 1 = y \end{cases}$ $[S = \{(0, 1)\}]$

19 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - y = 2x \\ y + x = 4 \end{cases}$ $[S = \{(-6, 10)\}]$

20 $\begin{cases} 2x = x + \dfrac{2}{3}y \\ y = 5 + 4x \end{cases}$ $[S = \{(-2, -3)\}]$

21 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y = 1 + \dfrac{1}{2}x \\ 2(x+1) = \dfrac{2}{3} + y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)\right\}\right]$

22 $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ 2x - 10y = -8 \end{cases}$ [indeterminato]

23 $\begin{cases} 5x - 4 + 3y = 4(2 + x - 1) \\ 3y = 23 - 6x \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(3, \dfrac{5}{3}\right)\right\}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi applicando il metodo di riduzione.

24 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni possiamo eliminare la variabile y:

$$\begin{cases} 3x+5y-(4x+5y)=2-1 \\ 4x+5y=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ 4x+5y=1 \end{cases}$$

Conviene adesso procedere per sostituzione: $\begin{cases} x=-1 \\ -4+5y=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

25 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+3y=-7 \end{cases}$$

Prima di applicare il principio di riduzione è necessario fare in modo che la x oppure la y abbiano lo stesso coefficiente nelle due equazioni; possiamo allora moltiplicare per 2 la seconda equazione in modo da avere $2x$ in entrambe le equazioni, oppure moltiplicare per 3 la prima equazione in modo da avere $3y$ in entrambe le equazioni. Se scegliamo il primo modo otteniamo:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+6y=-14 \end{cases}$$

Procedi adesso sottraendo membro a membro. $[S=\{(2,-3)\}]$

26 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-3y=2x-3 \end{cases}$ $[S=\{(0,1)\}]$

27 $\begin{cases} 3x=2y-8 \\ -x+3y=5 \end{cases}$ $[S=\{(-2,1)\}]$

28 $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x=3-2y \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)\right\}\right]$

29 $\begin{cases} 3x+y=\dfrac{1}{2} \\ 2x-y=1 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{3}{10},-\frac{2}{5}\right)\right\}\right]$

30 $\begin{cases} 4x+y=7 \\ \dfrac{5}{3}y-5x=0 \end{cases}$ $[S=\{(1,3)\}]$

31 $\begin{cases} 2x+1=\dfrac{1}{3}y \\ y-x=\dfrac{11}{2} \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{1}{2},6\right)\right\}\right]$

32 $\begin{cases} 3x-\dfrac{1}{5}y=4 \\ \dfrac{3}{7}x+\dfrac{1}{15}y=2 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{7}{3},15\right)\right\}\right]$

33 $\begin{cases} 5x-4+3y=4(2+x-1) \\ y=\dfrac{23-6x}{3} \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(3,\frac{5}{3}\right)\right\}\right]$

34 $\begin{cases} 4+\left(2-\frac{1}{2}\right)x+\left(1-\frac{1}{3}\right)y=1 \\ (x+2)(x+1)=x^2-4(1+y) \end{cases}$ $[S=\{(-2,0)\}]$

Risolvi i seguenti sistemi applicando la regola di Cramer.

35 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\begin{cases} 7x-3y=-1 \\ 3x+y=3 \end{cases}$

Il sistema è già scritto in forma normale; possiamo calcolare i determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1 - 3\cdot(-3) = 16$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1 - 3\cdot(-3) = 8$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot 3 - 3\cdot(-1) = 24$$

Poichè $\Delta \neq 0$, la soluzione del sistema è $\begin{cases} x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2} \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è dunque: $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$.

36 $\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ 6x+y=8 \end{cases}$ $[S=\{(2,-4)\}]$

37 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=20 \end{cases}$ $[S=\{(13,-7)\}]$

38 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+3y=12 \end{cases}$ $[S=\{(0,4)\}]$

39 $\begin{cases} \frac{1}{5}(x+1)=\frac{6}{5}-\frac{4}{5}y \\ x=5-4y \end{cases}$ [indeterminato]

40 $\begin{cases} y=1-\frac{1}{2}(x+3) \\ 2(x-1)=-\frac{2}{3}-y \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{11}{9},-\frac{10}{9}\right)\right\}\right]$

41 $\begin{cases} x+y=\frac{3}{2}(x+y)-y \\ x+2\left(\frac{1}{2}y-x\right)=5 \end{cases}$ $[S=\varnothing]$

42 $\begin{cases} x+\dfrac{1}{3}[1+(2-y)]=2 \\ x+y=4(x-y)+3 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

43 $\begin{cases} \dfrac{5}{2}x+2y=2\left[x-\left(\dfrac{1}{4}-y\right)\right] \\ y-2x=1 \end{cases}$ $[S=\{(-1,-1)\}]$

44 $\begin{cases} x+4y=y-\dfrac{1}{4} \\ x-3=\dfrac{1}{2}[2x-2(3-y)]-1-y \end{cases}$ $[S=\varnothing]$

45 $\begin{cases} x+y+7=\dfrac{1}{3}x\left(1+\dfrac{3}{2}\right) \\ x-14=y \end{cases}$ $[S=\{(6,-8)\}]$

46 $\begin{cases} x^2-3y=(x+1)^2 \\ x-y=2 \end{cases}$ $[S=\{(1,-1)\}]$

47 $\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}y \\ 6x+\dfrac{1}{2}(y+3)(2y-1)=y^2 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{2}{3},-1\right)\right\}\right]$

48 $\begin{cases} 2\left(x-\dfrac{1}{5}\right)-y=8 \\ \dfrac{1}{4}x+y\left(\dfrac{13}{3}+y\right)=\left(\dfrac{1}{3}y+3\right)(3y+1) \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(4,-\frac{2}{5}\right)\right\}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi frazionari.

49 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{y} \\ \dfrac{x+1}{y+6}=4 \end{cases}$$

Il sistema è frazionario perchè le incognite compaiono al denominatore delle frazioni; poniamo le condizioni di esistenza delle due equazioni per individuare il dominio:

- per la prima equazione: $x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0$
- per la seconda equazione: $y \neq -6$

Sviluppiamo i calcoli liberando le equazioni dai denominatori:

$$\begin{cases} y = 6x \\ x + 1 = 4y + 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6x \\ x - 24x = 23 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases}$$

Poichè il valore trovato di y è quello escluso dal dominio, dobbiamo concludere che il sistema non ha soluzioni.

50 $\begin{cases} \dfrac{2-y}{x} = -1 \\ \dfrac{x-y}{2y+1} = 2 \end{cases}$ $[S = \{(-3, -1)\}]$

51 $\begin{cases} \dfrac{x}{y-2} = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)\right\}\right]$

52 $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{y+3} = 1 \\ \dfrac{x-y}{x} = -1 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)\right\}\right]$

53 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{4y-5}{x^2+3x} = \dfrac{x-3}{x} \\ x + 8y = -5 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

54 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2-x} = 1 \\ \dfrac{2x+y}{3y} = 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1\right)\right\}\right]$

55 $\begin{cases} \dfrac{x-2y+1}{x+y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{xy} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

56 $\begin{cases} 1 = \dfrac{2}{x+y} \\ \dfrac{x+2y}{\frac{1}{4}+y} + 1 = \dfrac{7}{1+4y} \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

57 $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{x+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-y-2}{x+y-3} = 2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)\right\}\right]$

58 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x+y}+\dfrac{x^2-2}{xy+y^2}=\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{1-2y}{x-1}=3 \end{cases}$ $[S=\{(0,2)\}]$

59 $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2}=1-\dfrac{1}{y} \\ (x+1-y)(x-1-y)-(x-y)^2=x-2y+4 \end{cases}$ $[S=\emptyset]$

60 $\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2-x}{(x+y)^2}=1-\dfrac{2y}{x+y} \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{x+y-1}{x^2-x-2} \end{cases}$ $[S=\{(0,1)\}]$

61 $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3x+y}=4 \\ \dfrac{4y}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x}{x-3} \end{cases}$ $[S=\emptyset]$

62 $\begin{cases} \dfrac{x+11}{x+5}+\dfrac{8y-11}{6x+x^2+5}=\dfrac{x+5}{x+1} \\ 2x+8y=25 \end{cases}$ [indeterminato con $x\neq -5 \ \wedge \ x\neq -1$]

63 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3x+y}=0 \\ \dfrac{3}{x+y}=\dfrac{4}{y^2-x^2} \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(-\frac{5}{6},\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi di tre equazioni in tre incognite.

64 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ z+y-2x=0 \\ \dfrac{2}{3}z+2y+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema in modo ordinato e liberiamo la terza equazione dai denominatori:

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y-z=0 \\ 3x+12y+4z=3 \end{cases}$$

Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo nelle altre:

$$\begin{cases} x=2-2y-z \\ 2(2-2y-z)-y-z=0 \\ 3(2-2y-z)+12y+4z=3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=2-2y-z \\ 5y+3z-4=0 \\ 6y+z+3=0 \end{cases}$$

Ricaviamo z dalla terza equazione e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} x = 2 - 2y - z \\ 5y + 3(-6y - 3) - 4 = 0 \\ z = -6y - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - z \\ 13y + 13 = 0 \\ z = -6y - 3 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione e sostituiamo in senso inverso:

$$\begin{cases} x = 2 - 2y - z \\ y = -1 \\ z = -6y - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 - z \\ y = -1 \\ z = 6 - 3 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \rightarrow S = \{(1, -1, 3)\}$$

65 $\begin{cases} x - 4y + 2z = 9 \\ 3x + y - 6z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ $[S = \{(1, -2, 0)\}]$

66 $\begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 2x + 5y + 4 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

67 $\begin{cases} x - y + 2z = \frac{19}{4} \\ \frac{1}{2}x + 2y + 5z = 9 \\ x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(2, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

68 $\begin{cases} x - y + 2z = \frac{11}{3} \\ 2x + 4z = 7 + y \\ x + y + 8z = 4 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)\right\}\right]$

69 ESERCIZIO SVOLTO

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -2 \\ 3x - 4y = 10 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Anche per un sistema di tre equazioni in tre incognite possiamo applicare il metodo di Cramer calcolando i determinanti della matrice dei coefficienti e di quelle che si ottengono sostituendo rispettivamente la colonna dei coefficienti di x, di y, di z, con quella dei termini noti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 10 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Per calcolare questi determinanti dobbiamo riportare le prime due colonne di numeri e applicare questo calcolo:

somma dei prodotti lungo le diagonali principali − somma dei prodotti lungo le diagonali secondarie

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 0 + (-4)\cdot 3\cdot 1 - [0\cdot(-4)\cdot(-4) + 1\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 2] = -32$$

$$\Delta x = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 2 & -4 & -2 & 2 \\ 10 & -4 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right| = (-2)\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 0 + (-4)\cdot 10\cdot 1 - [0\cdot(-4)\cdot(-4) + 1\cdot 0\cdot(-2) + 2\cdot 10\cdot 2] = -64$$

$$\Delta y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & 10 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right| = 1\cdot 10\cdot 2 + (-2)\cdot 0\cdot 0 + (-4)\cdot 3\cdot 0 - [0\cdot 10\cdot(-4) + 0\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot(-2)] = 32$$

$$\Delta z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot(-4)\cdot 0 + 2\cdot 10\cdot 0 + (-2)\cdot 3\cdot 1 - [0\cdot(-4)\cdot(-2) + 1\cdot 10\cdot 1 + 0\cdot 3\cdot 2] = -16$$

La soluzione del sistema è quindi $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-64}{-32} = 2 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{32}{-32} = -1 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-16}{-32} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

70 $\begin{cases} 2x + y + 3z = \dfrac{15}{2} \\ 4x + \dfrac{1}{2}(z+1) = 6 + y \\ 4y = 3x - 2\left(z + \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(1, -\frac{1}{2}, 2\right)\right\}\right]$

71 $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z = \dfrac{1}{2}(1-y) \\ 2y + 3x = \dfrac{1}{2} - 4z \\ x + 1 - \dfrac{3}{2}z = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\}\right]$

72 $\begin{cases} 3x - 2(y+z) = 1 \\ \dfrac{1}{2}(x+6y) + \dfrac{1}{2}(4z+9) = y \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{6}y + \dfrac{1}{2}z = \dfrac{2}{3} - 2 \end{cases}$ $[S = \{(-1, 0, -2)\}]$

73 $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{7}{12} = \frac{1}{4}z \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{7}{4} = z \\ 4x + 2y + 7 = 4z - 1 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

74 $\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 5 \\ 3\left(x - \frac{1}{3}\right) + y = \frac{1}{2} + z \\ x + y = 1 + \left(z - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

75 $\begin{cases} x + y + z = \frac{4}{3} - x \\ 3\left(y - \frac{1}{6}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(z + 4) \\ 4\left(2x + \frac{5}{4}z\right) + \frac{1}{3} = 7y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -2\right)\right\}\right]$

76 $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(7y - 6z) = 2 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 4 + z \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

77 $\begin{cases} 5x + 4\left(y - \frac{1}{2}z\right) = 4^2 + z \\ 5\left[\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}(y - 5)\right] = 2z - 6 \\ \frac{1}{2}x[1 - (x - 1)] + y = 7 - \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ $[S = \{(3, 4, 5)\}]$

78 $\begin{cases} 4x - 3y + z = 3 \\ x + \frac{1}{2}(y - 10z) = 11 - 2x \\ 7x + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} + 4y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1, -2\right)\right\}\right]$

79 $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}(2y - 4z) = \frac{7}{6} \\ x + \frac{1}{2}(y - z - 1) = 0 \end{cases}$ [indeterminato]

80 $\begin{cases} 2x - 2(2y + z) = 3 + x \\ 5x - 4\left(y + \frac{3}{4}z - \frac{1}{16}\right) = 4 \\ \frac{1}{3}\left[x - 2\left(y + \frac{3}{2}z\right)\right] = \frac{3}{4} - 1 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)\right\}\right]$

81 $\begin{cases} 4\left(y - \frac{3}{4}x\right) = 23 - 3z \\ \frac{8}{15z} + 1 = \frac{1}{5z}(y - x) \\ \frac{6z + 5}{y - 2x} = 1 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-3, 3, \frac{2}{3}\right)\right\}\right]$

82 $\begin{cases} \frac{x + y}{z - 1} = 1 \\ \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}y + 1\right) = z - 4 \\ 3x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$ $[S = \{(5, 0, 6)\}]$

83 $\begin{cases} 2x + 2y + 2x = 9 \\ 2y + 6x = 3\left(z - \frac{1}{2}\right) \\ 2 = \frac{7 - 8z}{2x - 5y} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}\right]$

84 $\begin{cases} x + 3y = 3(2 - z) \\ 2x - \frac{1}{4}y + 1 = \frac{1}{2}(4z + 17) \\ \frac{3x + 2z}{5 + y} = 1 \end{cases}$ $[S = \{(3, 2, -1)\}]$

85 $\begin{cases} \frac{x + y + 5}{2z} = 1 \\ \frac{3x - z - 3}{y + 1} = 2 \\ x + 2(y + 4) = 4(z - 1) \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

86 $\begin{cases} \frac{x - y + 2z}{x + 1} = 1 \\ \frac{2x - y}{z} + 1 = 0 \\ \frac{3}{2}(x + z) = y \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo che ritieni più opportuno.

1 $\begin{cases} \dfrac{x-3y}{4} = (x+1) - \dfrac{1}{5}x \\ x + y = \left[3x + \dfrac{1}{2}(1-4x)\right] \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

2 $\begin{cases} x + 4y = 5\left(\dfrac{1}{3} + 2y\right) \\ 6\left(\dfrac{1}{3}y + x\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}\right)\right\}\right]$

3 $\begin{cases} x + y = 7(x-y) \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{6} = 3 \end{cases}$ $[S = \{(4,3)\}]$

4 $\begin{cases} \dfrac{1}{9}\left(x + \dfrac{9}{8}y\right) + 1 = \dfrac{15}{36} \\ 3(y-2) - x = \dfrac{15}{2} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{15}{2}, 2\right)\right\}\right]$

5 $\begin{cases} \dfrac{3x^2 + y}{3} = (x+1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) \\ 8\left(x + \dfrac{1}{4}y\right) - \dfrac{16}{3} = \dfrac{1}{3}\left(4x + \dfrac{1}{2}y\right) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{4}, 2\right)\right\}\right]$

6 $\begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{2}y\right)^2 = x(x+y) + \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{1}{2}y\right) + \dfrac{1}{4}y^2 \\ 3(x-y) = 3y - 5 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}\right]$

7 $\begin{cases} 2y = 2\left(x - \dfrac{1}{2}y\right) + 4(1-x) \\ (x+2)(x+1) = x^2 - \dfrac{1}{3}(1+y) \end{cases}$ $[S = \{(-1,2)\}]$

8 $\begin{cases} 2x + \dfrac{18}{3} = \dfrac{1}{3}(1+y) \\ x(x+2) - \dfrac{1}{3}y = 4 + x^2 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

9 $\begin{cases} (3-x)(x-2) - y = (x+3)(1-x) \\ 9\left(1 + \dfrac{1}{3}y\right) = 5\left(x - \dfrac{2}{5}y\right) - 1 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}\right)\right\}\right]$

10 $\begin{cases} y = (\frac{1}{2}x + 3)^2 - \dfrac{x^2 - 3y - 3}{4} \\ (10x + 2)\dfrac{x + y}{5} + 2(y^2 + xy) = 2(x + y)^2 \end{cases}$ $[S = \{(-3, 3)\}]$

11 $\begin{cases} \dfrac{2}{3} = \dfrac{x + y}{2} - \dfrac{3x - 5y}{6} + 1 \\ \dfrac{3}{10}x + \dfrac{1}{5}y = \dfrac{1}{3}(1 - x) - y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(1, -\frac{1}{4}\right)\right\}\right]$

12 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x + y) = 2 + \dfrac{1}{2}(y - 6) \\ y + \dfrac{1}{18} = \dfrac{3}{2} + 4x^2 - \left(\dfrac{1}{3} + 2x\right)^2 \end{cases}$ $[S = \{(-2, 4)\}]$

13 $\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}y \\ 6x + \dfrac{1}{2}(y + 3)(2y - 1) = y^2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -1\right)\right\}\right]$

14 $\begin{cases} 3y - 2 + x^2 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4} \\ x + y - \dfrac{1}{2} = 2(y - 1) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}\right]$

15 $\begin{cases} (x + 2)(x + 1) + \dfrac{1}{5}(y - 3) = x^2 + 2 \\ \dfrac{1}{2}(x - 2y) - \dfrac{1}{6} = 2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{3}, -2\right)\right\}\right]$

16 $\begin{cases} (x - y - 1)^2 - 2x + 1 = (x + y)^2 - 4xy \\ (x + 1)(x - 3) - 3 = x(x - 2) + y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{5}{2}, -6\right)\right\}\right]$

17 $\begin{cases} 2 - x = \dfrac{3y - 5 - x^2}{x + 1} \\ \dfrac{3x - 1}{11y - y^2 - 10} + \dfrac{1}{10 - y} = \dfrac{1}{y - 1} \end{cases}$ $[S = \{(2, 3)\}]$

18 $\begin{cases} (x + y)^2 - \dfrac{3y + 2x + 2}{x + y} = 3xy + x^2 - xy + y^2 \\ \dfrac{3}{4}x + 2\left(x - \dfrac{1}{2}y\right) = 2x + \dfrac{7}{2} \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

19 $\begin{cases} \dfrac{2 - x}{y} + y(1 - x) + 1 = 2x - (x - 1)(y + 2) \\ x + \dfrac{1}{2}(y - 1)^2 = \dfrac{y^2 - 1}{2} - \dfrac{x + 3y}{4} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)\right\}\right]$

20 $\begin{cases} x - y = 3\left(\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}\right) \\ z - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2x - y + \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}\left[\left(2x - \frac{4}{3}y\right) - \frac{4}{3}(z-2)\right] = z - 4 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(1, -\frac{1}{2}, 4\right)\right\}\right]$

21 $\begin{cases} 1 + \frac{6z+3}{x+y} = \frac{2y-x}{x+y} \\ 5x + z + \frac{3}{4} = 3y \\ 3x + 4z - \frac{1}{4} = 3(y-1) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

22 $\begin{cases} \frac{4x-3y}{3z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \\ 3 + \frac{(y-10z)}{2x} = \frac{11}{x} \\ 7x + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} + 4y \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1, -2\right)\right\}\right]$

23 $\begin{cases} x + 6y + 3z = 0 \\ \frac{4x - y + z^2}{z-3} = z - 2 \\ 4z - y = \frac{1}{3}(7-2x) \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}\right]$

24 $\begin{cases} \frac{2x - z - 5}{y-2} = 1 \\ 3x + y = 2(1 + 2z) \\ \frac{x-y-2}{z} - 3 = 0 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

Risolvi e discuti i seguenti sistemi letterali.

25 **ESERCIZIO SVOLTO**

$\begin{cases} 2ax + y = 4a \\ a(x-y) + 1 = 2ax \end{cases}$

Per risolvere un sistema letterale conviene usare il metodo di Cramer.

Scriviamo il sistema nella forma tipica di questo metodo: $\begin{cases} 2ax + y = 4a \\ ax + ay = 1 \end{cases}$

Calcoliamo i determinanti: $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 2a^2 - a = a(2a-1)$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 4a^2 - 1 = (2a-1)(2a+1)$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2a & 4a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 4a^2 = -2a(2a-1)$$

Procediamo adesso alla discussione:

- se $\Delta \neq 0$, cioè se $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq \frac{1}{2}$, il sistema è determinato ed ha soluzione

$$\begin{cases} x = \dfrac{(2a-1)(2a+1)}{a(2a-1)} = \dfrac{2a+1}{a} \\[2ex] y = \dfrac{-2a(2a-1)}{a(2a-1)} = -2 \end{cases}$$

- per studiare il caso in cui $\Delta = 0$ dobbiamo analizzare due possibili situazioni:
  - se $a = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ $\Delta x = -1$ $\quad\rightarrow\quad$ il sistema è impossibile
  - se $a = \frac{1}{2}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\Delta x = 0$ e $\Delta y = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ il sistema è indeterminato.

26 $\begin{cases} 4y = 2a + x - 1 \\ 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2a + 3 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(a+1, \frac{3}{4}a\right)\right\}\right]$

27 $\begin{cases} y - 2 = -2(a-2)x \\ y - 2x = 1 + a \end{cases}$ $\left[a \neq 1 : S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, a\right)\right\}; a = 1 : \text{indeterminato}\right]$

28 $\begin{cases} 3ax - 2y = -a \\ -(a+1)x + y = 1 \end{cases}$ $[a \neq 2 : S = \{(-1, -a)\}; a = 2 : \text{indeterminato}]$

29 $\begin{cases} (a+2)x + (a+2)y = 2 \\ (a+2)x - (a+2)y = a \end{cases}$ $\left[a \neq -2 : S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{2-a}{2(a+2)}\right)\right\}; a = -22 : \text{indeterminato}\right]$

30 $\begin{cases} 2ax + 4y = a \\ 3x + (a-1)y = 2a \end{cases}$ $\left[a \neq -2 \wedge a \neq 3 : S = \left\{\left(\frac{a^2 - 9a}{2a^2 - 2a - 12}, \frac{4a^2 - 3a}{2a^2 - 2a - 12}\right)\right\}; \ a = -2 \vee a = 3 : \text{impossibile}\right]$

31 $\begin{cases} a(x+y) + a^2 = 1 + 2a \\ 2 + ay = 2a(x+1) - a^2 \end{cases}$ $\left[a \neq 0 : S = \left\{\left(\frac{1}{a}, 2 - a\right)\right\}; a = 0 : \text{impossibile}\right]$

32 $\begin{cases} ax - 2y + a + 2 = 0 \\ 2x - ay = 2 - a^2 - a \end{cases}$ $[a \neq \pm 2 : S = \{(1, a+1)\}; a = \pm 2 : \text{indeterminato}]$

33 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\begin{cases} (b+1)x + ay = b \\ bx + ay = -a \end{cases}$$

Il sistema è già nella forma tipica per la risoluzione con il metodo di Cramer e si trova che:

$$\Delta = a \qquad \Delta x = a(a+b) \qquad \Delta y = -ab - a - b^2$$

Discussione:

- se $a \neq 0$ ....
- se $a = 0$ $\Delta x = 0,\ \Delta y = -b^2$

Occorre quindi distinguere due casi: $b = 0$ .... ; $b \neq 0$ ....

34 $\begin{cases} -(a-1)x + (b+2)y = 0 \\ by - ax = 2a + b \end{cases}$ $[b \neq -2a : S = \{(-b-2, 1-a)\}; b = -2a : \text{indeterminato}]$

35 $\begin{cases} bx + y = 0 \\ -(a^2+1) - x + ay = 0 \end{cases}$ $\left[a \neq -\dfrac{1}{b} : S = \left\{\left(-\dfrac{a^2+1}{ab+1}, \dfrac{b(a^2+1)}{ab+1}\right)\right\}; a = -\dfrac{1}{b} : \text{impossibile}\right]$

36 $\begin{cases} x(b+1) + y = a \\ a(x+y) = 1 + a^2 \end{cases}$ $\left[a \neq 0 \wedge b \neq 0 : S = \left\{\left(-\dfrac{1}{ab}, \dfrac{1+b+a^2b}{ab}\right)\right\}; a = 0 \vee b = 0 : \text{impossibile}\right]$

37 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\begin{cases} 3ax + ay = 1 \\ x - \dfrac{(a-1)y}{a} = 0 \end{cases}$$

Per l'esistenza della seconda equazione deve essere $a \neq 0$. In questa ipotesi, puoi riscrivere il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} 3ax + ay = 1 \\ ax - (a-1)y = 0 \end{cases}$$

e applicare il metodo di Cramer.

$\left[a \neq 0 \wedge a \neq \dfrac{3}{4} : S = \left\{\dfrac{a-1}{a(4a-3)}, \dfrac{1}{4a-3}\right\}; a = 0 : \text{il sistema perde significato}; a = \dfrac{3}{4} : \text{impossibile}\right]$

38 $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{1-a} \\ x + y = \dfrac{1}{a+1} \end{cases}$ $\left[a \neq \pm 1 : S = \left\{\left(\dfrac{1}{1-a^2}, \dfrac{a}{a^2-1}\right)\right\}; a = \pm 1 : \text{il sistema perde significato}\right]$

39 $\begin{cases} 1 - y = \dfrac{y+x}{a+2} \\ x + \dfrac{a+1}{a+2} = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq -2 \wedge a \neq -3 : S = \left\{\left(\dfrac{1}{a+2}, \dfrac{a+1}{a+2}\right)\right\}; \\ a = -2 : \text{il sistema perde significato}; \\ a = -3 : \text{indeterminato} \end{array}\right]$

40 $\begin{cases} ax - x + (a-1)y = a^2 \\ x - 2y + 2a = \dfrac{a}{a-1} \end{cases}$

$\left[a \neq 1 : S = \left\{\left(\dfrac{a}{a-1}, a\right)\right\}; a = 1 : \text{il sistema perde significato}\right]$

41 $\begin{cases} ax + 1 = b(y+a) + y - a \\ \dfrac{y}{b-1} = \dfrac{1}{b^2-1} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} b \neq \pm 1 \wedge a \neq 0 : S = \left\{\left(b-1, \dfrac{1}{b+1}\right)\right\}; \\ b = \pm 1 : \text{il sistema perde significato;} \\ b \neq \pm 1 \wedge a = 0 : \text{indeterminato} \end{array}\right]$

42 $\begin{cases} a(x+2) - 4(ay-2) = (a+2)^2 \\ x - y = a - \dfrac{1-2a}{a} \end{cases}$

$\left[a \neq 0 : S = \left\{\left(a+2, \dfrac{1}{a}\right)\right\}; a = 0 : \text{il sistema perde significato}\right]$

43 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{a+2} = 1 \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2}(x-a) \end{cases}$

$[a \neq -2 : \text{sistema impossibile; } a = -2 : \text{il sistema perde significato}]$

44 $\begin{cases} 2y - 2\left(\dfrac{1 - ax - x}{a+1}\right) = \dfrac{2}{a+2} \\ 3x + y = \dfrac{4a+7}{3a + a^2 + 2} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a \neq -1 \wedge a \neq -2 : S = \left\{\left(\dfrac{1}{a+1}, \dfrac{1}{a+2}\right)\right\}; \\ a = -1 \vee a = -2 : \text{ il sistema perde significato} \end{array}\right]$

45 $\begin{cases} ax - 1 = a^2(2-y) \\ x^2 + ay = \dfrac{2a^2+1}{a} + x(x-1) \end{cases}$

$[a \neq 0 : \text{sistema indeterminato; } a = 0 : \text{il sistema perde significato}]$

46 $\begin{cases} 2\left[(y-a) + \dfrac{1}{2}\right] + a(x-y) = 2a \\ 2 - \dfrac{x+6y}{a+1} + 2y = \dfrac{1}{a+1} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a \neq -1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq \dfrac{1}{2} : S = \left\{\left(3, \dfrac{1-a}{a-2}\right)\right\}; \\ a = -1 : \text{ il sistema perde significato;} \\ a = 2 : \text{impossibile;} \\ a = \dfrac{1}{2} : \text{indeterminato} \end{array}\right]$

47 $\begin{cases} a - (x-y) = \dfrac{1+2a}{a} \\ 2a(x - a + y) - 4a = 2 \end{cases}$

$\left[a \neq 0 : S = \left\{\left(a, \dfrac{2a+1}{a}\right)\right\}; a = 0 : \text{il sistema perde significato}\right]$

48 $\begin{cases} ax - x(1-x) = 1 + x^2 \\ \dfrac{y+3}{a+2} = 1 + \dfrac{a-1}{a+2}x \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a \neq -2 \wedge a \neq 1 : S = \left\{\left(\dfrac{1}{a-1}, a\right)\right\}; \\ a = -2 : \text{il sistema perde significato;} \\ a = 1 : \text{sistema impossibile} \end{array}\right]$

49 $\begin{cases} \dfrac{x}{a+1} = 2 - \dfrac{2a-y}{a+1} \\ x - y = a(1-y) \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a \neq -1 \wedge a \neq 0 : S = \left\{\left(\dfrac{3a-2}{a}, \dfrac{a-2}{a}\right)\right\}; \\ a = -1 : \text{il sistema perde significato;} \\ a = 0 : \text{sistema impossibile} \end{array}\right]$

50 $\begin{cases} \dfrac{2}{a}x + y - 2 = \dfrac{2-a}{a} \\ x - y = a(1-y) \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq 2; S = \{(1,1)\}; \\ a = 0 : \text{il sistema perde significato;} \\ a = 2 : \text{sistema indeterminato} \end{array}\right]$

51 $\begin{cases} \dfrac{x}{b+1} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{b^2+b} \\ \dfrac{x+by}{b} = b(x-y) \end{cases}$ $[b \neq 0 \wedge b \neq -1 : S = \{(b, b-1)\}; b = 0 \vee b = -1 : \text{il sistema perde significato}]$

52 $\begin{cases} 2b + \dfrac{ab + 2x - 3y}{a-b} = 0 \\ \dfrac{x+y}{b} = a + b \end{cases}$ $[b \neq 0 \wedge a \neq b : S = \{(b^2, ab)\}; b = 0 \vee a = b : \text{il sistema perde significato}]$

53 $\begin{cases} \dfrac{x}{a-1} + y = a + 1 \\ \dfrac{x+1}{a} - \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{3-a}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq \frac{2}{3} : S = \{(a-1, a)\}; \\ a = 0 \vee a = 1 : \text{ il sistema perde significato;} \\ a = \frac{2}{3} : \text{indeterminato} \end{array}\right]$

54 $\begin{cases} x + \dfrac{ay}{b} = \dfrac{2+a}{b} \\ bx - ay + a = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} b \neq 0 \wedge a \neq 0 : S = \left\{\left(\frac{1}{b}, \frac{a+1}{a}\right)\right\}; \\ b = 0 : \text{il sistema perde significato;} \\ b \neq 0 \wedge a = 0 : \text{impossibile} \end{array}\right]$

55 **ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{cases} \dfrac{1-2x}{a} + \dfrac{1+y}{2a} = \dfrac{2-3a}{2a} \\ \dfrac{ax}{y+1} - \dfrac{ax-1}{a} + x = a + \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Il sistema è frazionario: condizioni per le variabili: $y \neq -1$
condizioni per il parametro: $a \neq 0$

Svolgiamo i calcoli liberando le equazioni dai denominatori:

$$\begin{cases} 2 - 4x + 1 + y = 2 - 3a \\ a^2x - (ax-1)(y+1) + ax(y+1) = a^2(y+1) + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 3a + 1 \\ a^2x - a^2y = a^2 \end{cases}$$

Poiché abbiamo già supposto che sia $a \neq 0$, possiamo semplificare le seconda equazione:

$$\begin{cases} 4x - y = 3a + 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Applichiamo la regola di Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3a+1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3a - 1 + 1 = -3a$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 3a+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3a - 1 = 3(1-a)$$

Essendo $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato ed ha soluzione $\begin{cases} x = \dfrac{-3a}{-3} = a \\ y = \dfrac{3(1-a)}{-3} = a - 1 \end{cases}$

Verifichiamo l'accettabilità della soluzione: poiché deve essere $y \neq -1$ imponiamo che sia

$$a - 1 \neq -1 \quad \rightarrow \quad a \neq 0$$

Essendo già in questa ipotesi, la soluzione è sempre accettabile.

Riassumendo: se $a \neq 0 : S = \{(a, a-1)\}$;
se $a = 0$: il sistema perde significato

56 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x-a} = 2 \\ \dfrac{x+2}{2y-a} = -1 \end{cases}$ $\left[a \neq -1 \wedge a \neq -\frac{4}{3} : S = \{(3a+2, -a-2)\}; a = -1 \vee a = -\frac{4}{3} : \text{impossibile}\right]$

57 $\begin{cases} (x-a)^2 - (y-a)^2 = x^2 - y^2 \\ \dfrac{2x+a}{x+1} = \dfrac{2y}{y+1} \end{cases}$ $[a \neq 0 : S = \{(-1, -1)\}; a = 0 : \text{indeterminato con } x \neq -1 \wedge y \neq -1]$

58 $\begin{cases} \dfrac{a-2}{y} = \dfrac{a}{x-1} \\ \dfrac{x-a}{y} + a = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 2 : S = \left\{\left(2, \frac{a-2}{a}\right)\right\}; \\ a = 2 \vee a = 0 : \text{impossibile}; \\ a = 1 : \text{indeterminato} \end{array}\right]$

59 $\begin{cases} \dfrac{y+a}{a} - x = \dfrac{2a-3}{a-1} \\ \dfrac{a}{x} - \dfrac{a-1}{y-1} = \dfrac{a^2-a-1}{xy-x} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a \neq 0 \wedge a \neq 1 : S = \left\{\left(\frac{1}{a-1}, a\right)\right\}; \\ a = 0 \vee a = 1 : \text{il sistema perde significato} \end{array}\right]$

60 $\begin{cases} x + 3y = 2a + 1 - z \\ 2x - y - z = 5a - 1 \\ x + \dfrac{1}{2}y = 2a \end{cases}$ $[S = \{(a, 2a, 1-5a)\}]$

61 $\begin{cases} 3x - 2y + z = 3a - 5 \\ y - x = 2 - a \\ 3y + 2z = 4 \end{cases}$ $[S = \{(a, 2, -1)\}]$

62 $\begin{cases} y - x + z = a \\ 2x - 3y - 4z + 2a = 0 \\ a(x - y) + z = -a(2a + 1) \end{cases}$ $[a \neq -1 : S = \{(0, 2a, -a)\}; a = -1 : \text{indeterminato}]$

63 $\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 3x - y + 5z - 2t = -1 \\ x + y - z = t - 4 \\ -2x - y + 3 = t \end{cases}$ $[S = \{(1, -2, 0, 3)\}]$

64 $\begin{cases} 2x - 4\left(y + \frac{1}{2}z\right) + t = 3 + x \\ 5x - 4\left(y + \frac{3}{4}z - \frac{1}{16}\right) - 2t = 4 \\ \frac{1}{3}\left[x - 2\left(y + \frac{3}{2}z\right)\right] = \frac{3}{4} - 1 \\ x - 2y + \frac{1}{5}z = 2t + \frac{13}{4} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 0\right)\right\}\right]$

Risolvi i seguenti problemi.

65 Luca ha pagato € 2,54 per 5 matite e 2 gomme, mentre Vittorio ha speso per il doppio delle gomme ed una sola matita € 2,38. Quanto costano matite e gomme? $[€\ 0,30 : €\ 0,52]$

66 La somma fra il numeratore e il denominatore di una frazione è 8; inoltre se sommiamo 1 al denominatore otteniamo una nuova frazione equivalente ad $\frac{1}{2}$. Trova la frazione iniziale. $\left[\frac{3}{5}\right]$

67 Un'azienda vinicola ha imbottigliato vino per un totale di 1320 litri in bottiglie da 0,75ℓ e 2ℓ. Il quintuplo del numero delle bottiglie da 2ℓ supera di 80 quello delle bottiglie da 0,75ℓ. Quante bottiglie di ogni tipo sono state prodotte? $[1120, 240]$

68 La differenza fra numeratore e denominatore di una frazione è 4. Aggiungendo 2 al numeratore e 3 al denominatore si ottiene una frazione equivalente a $\frac{3}{2}$. Trova la frazione. $\left[\frac{7}{3}\right]$

69 Se si scambiano fra loro le cifre di un numero che ne ha due, si ottiene un numero più grande del primo di 36 e tale che sommato al numero originale dà 110. Individua il numero. $[37]$
(Suggerimento: ricorda che un numero di due cifre in forma polinomiale, indicando con x il numero delle decine e con y quello delle unità, può essere scritto così: $10x + y$).

70 Data una frazione, se aggiungiamo 5 al numeratore e 3 al denominatore otteniamo una frazione equivalente a quella data. Sapendo inoltre che la somma del numeratore con il denominatore è 16 calcola la frazione. $\left[\frac{10}{6}\right]$

71 Metà dei risparmi di Mara sommati ad un terzo di quelli di Andrea basterebbero per comprare un appartamento da € 110 000. I due potrebbero però con un acconto di € 56 000, pari ad un quinto di quanto dispongono insieme, attivare un finanziamento per un appartamento più grande. A quanto ammontano i risparmi di Mara e Andrea? [€ 100 000; € 180 000]

72 Una bottiglia di vetro piena d'acqua pesa 1,25kg. Una bottiglia di plastica vuota pesa un quinto di quella di vetro e, rispetto a questa, contiene il doppio dell'acqua; se la si riempie il suo peso è 1,6kg. Quanto pesano la bottiglia di vetro e quella di plastica? E quanta acqua contengono? [$0,5$kg; $0,1$kg; $0,75\ell$; $1,5\ell$]

73 L'età di Luigi è doppia rispetto a quella di suo figlio Giorgio ed è maggiore di 4 anni rispetto a quella di sua moglie Rita. L'età di Giorgio sommata a quella dello zio Antonio è di 73 anni, mentre la somma degli anni di Rita e Luigi uguagliano il doppio di quelli di Antonio. Quanti anni hanno Luigi e Antonio? [$50, 48$]

74 La somma dei polli allevati da due contadini supera di 22 la loro differenza. Un accordo preso fra loro prevede che ogni contadino, se supera la quota di venti, deve versare in una cassa comune € 10 per ogni pollo in più. Se complessivamente i due contadini pagano € 50, quanti polli possiede ognuno? [$34, 11$]

75 Preso un numero di due cifre, se sostituisci alla cifra delle decine quella delle unità moltiplicata per 2 ottieni lo stesso numero, mentre se scambi le cifre ottieni i $\frac{4}{7}$ del numero originario. Di che numero si tratta?
[il problema è indeterminato: qualsiasi numero per cui la cifra delle decine sia doppia rispetto a quella delle unità]

76 Un'azienda produce gomme da masticare. Il peso di una singola gomma è di 12g; il peso complessivo di una confezione classica è di 80g, mentre la confezione maxi, il cui involucro pesa il 50% in più e che contiene il doppio delle gomme, pesa 150g. Quante gomme contiene e quanto pesa l'involucro della confezione classica? [$5, 20$g]

77 Un camioncino a pieno carico pesa complessivamente 2t. Un camion più grosso, che pesa a vuoto il 50% in più del camioncino a vuoto, può trasportare un peso triplo rispetto a quello che può trasportare il camioncino, fino a raggiungere le 4,2t complessive. Quanto pesa a vuoto il camioncino e quanto può trasportare? [$1,2$t; $0,8$t]

78 La casa di Luca si trova sulla strada che da casa di Maria porta a quella di Enrico. Maria va da Luca, si ferma un po' da lui, torna a casa a cambiarsi e poi va da Enrico percorrendo in questo modo un totale di 2,8km. Enrico invece va direttamente da Maria, ma non trovandola si dirige verso casa. Quando gli mancano i $\frac{2}{5}$ del tragitto da casa di Maria alla sua ha percorso un totale di 3,2km. Quanto distano le case di Maria e Enrico da quella di Luca? [400m, 1600m]

79 Un corriere compie un viaggio cambiando macchina a metà strada e prendendone una che è il 50% più veloce della prima, impiegandoci in questo modo 12 ore. In un secondo viaggio lungo lo stesso percorso, il cambio avviene 360km dopo la metà e il corriere impiega 1 ora in più. Calcola quanto è lungo il viaggio e la velocità media delle due vetture. [1728km; 120km/h; 180km/h]

80 Di due candele sappiamo che la prima si consuma due volte più velocemente della seconda e che la seconda è più corta di 8cm rispetto alla prima. Se accendiamo le due candele contemporaneamente, la seconda si consumerà definitivamente 3 ore dopo la prima. Inoltre quando si sarà consumato $\frac{1}{3}$ della seconda mancheranno 10 minuti al momento in cui si consumerà metà della prima. Calcola con quale velocità bruciano le due candele (esprimi il risultato in cm/h) e quanto sono lunghe. [4cm/h; 2cm/h; 28cm; 20cm]

81 In un quadrilatero $ABCD$ l'angolo $\widehat{A}$ sommato a $\widehat{B}$ è pari ai $\frac{5}{4}$ dell'angolo $\widehat{C}$, mentre l'angolo $\widehat{A}$ sommato a $\widehat{D}$ è tre volte l'angolo $\widehat{B}$. Sapendo che $\widehat{C}$ è doppio di $\widehat{B}$, trova gli angoli del quadrilatero e stabilisci la sua natura. [$90°$, $90°$, $60°$, $120°$]

82 L'area di un triangolo ABC misura $\frac{25}{6}a^2$. L'altezza CH relativa ad AB misura $2a$; inoltre due volte l'area di AHC supera di $\frac{1}{3}a^2$ quella di HBC. Trova la misura del perimetro del triangolo ABC e stabilisci se esso è rettangolo. [$10a$; il triangolo è rettangolo in C]

83 In un trapezio $ABCD$, gli angoli C e B sono supplementari, l'angolo $\widehat{A}$ è $\frac{7}{16}$ dell'angolo $\widehat{C}$ e l'angolo $\widehat{D}$ è $\frac{11}{2}$ dell'angolo $\widehat{B}$. Calcola le misure dei quattro angoli e specifica qual è la base maggiore. [$70°$, $20°$, $160°$, $110°$]

84 Nel triangolo ABC l'angolo esterno a quello di vertice A è $\frac{13}{4}$ dell'angolo $\widehat{B}$. Indicata con H la proiezione di C su AB, si ha che la somma fra gli angoli $\widehat{HCB}$ e $\widehat{CAB}$ è $\frac{10}{9}$ di $\widehat{ACB}$. Calcola la misura degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. [$50°$, $40°$, $90°$]

85 Un rettangolo $ABCD$ ha il lato BC lungo 2cm. Preso un punto E su AB e detta F la sua proiezione su CD si ha che l'area del rettangolo $AEFD$ è $\frac{4}{7}$ di quella del rettangolo $ABCD$. Se consideriamo poi sul prolungamento di AB un segmento BG lungo due volte CF, abbiamo che il trapezio rettangolo $AGFD$ ha area di 17cm^2. Calcola il perimetro di $ABCD$. [18cm]

86 In un triangolo ABC, il rapporto fra i lati AC e AB è uguale a $\frac{3}{2}$ ed il perimetro è 30cm. Dal punto medio D del lato AB traccia la parallela a BC che incontra in E il lato AC. Trova le lunghezze dei lati del triangolo ABC sapendo che il perimetro del trapezio $DECB$ è 25cm. [10cm, 12cm, 8cm]

87 Un rettangolo ha il lato AB lungo 7cm e il lato BC lungo 4cm. Da un punto E ad esso interno, si tracciano le parallele ai lati che individuano i seguenti punti: F su AD, G su BC, H su CD e I su AB. Sapendo che il perimetro di $EIBG$ è 12cm e che quello di $HEGC$ supera di 10 quello di $AIEF$ trova l'area di $FEHD$. [6cm^2]