Concetti chiave e regole

Il rapporto incrementale

Il **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h è dato dall'espressione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata

Se il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale esiste finito, si dice che $f(x)$ è derivabile nel punto x_0; in tal caso l'espressione:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

rappresenta la **derivata** di $f(x)$ in x_0.
Quando il limite non è finito oppure non esiste, si dice che $f(x)$ non è derivabile in x_0.
Una funzione non derivabile in x_0 può però essere derivabile da sinistra o da destra di tale punto a seconda che esista finito il limite per $h \to 0^-$ oppure per $h \to 0^+$ del rapporto incrementale.

Le regole di derivazione

Per calcolare la derivata di una funzione si devono conoscere le regole di derivazione delle funzioni elementari:

$D[k] = 0$ $\quad$ $D[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad$ $D[\sin x] = \cos x$ $\quad$ $D[\cos x] = -\sin x$

$D[\log_a x] = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\quad$ $D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D[a^x] = a^x \ln a$ $\quad$ $D[e^x] = e^x$

ed i seguenti teoremi:

- derivata della somma: $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- derivata del prodotto: $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
  in particolare $D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$ con $k \in R$
- derivata del quoziente: $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
  in particolare $D\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$
- derivata della funzione composta: $D[g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

In particolare se $y = [f(x)]^{g(x)}$ allora $y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Se $f(x)$ è invertibile in un intervallo I, e in un punto x_0 è derivabile con $f' \neq 0$, allora esiste la derivata di f^{-1} ed è: $D\left[f^{-1}(y)\right] = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Dalla regola di derivazione delle funzioni inverse si ha poi che:

- $D[\arcsin x] = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $D[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $D[\arctan x] = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Il significato geometrico

Dal punto di vista geometrico $f'(x_0)$, cioè la derivata calcolata nel punto x_0, rappresenta il coefficiente angolare della retta t tangente alla curva in quel punto.

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in $x = x_0$ allora:

- l'equazione della retta tangente in $P(x_0, f(x_0))$ è: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- l'equazione della retta normale in P è: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Quando la funzione non è derivabile, si possono presentare i seguenti casi particolari:

- $f'(x_0) = \infty$ allora la retta tangente è parallela all'asse y (si dice che il punto P è a tangente verticale)
- la derivata sinistra e quella destra sono finite ma diverse, oppure una di esse è finita e l'altra è infinita; in questo caso esistono due rette tangenti diverse a sinistra e a destra di x_0 e P rappresenta un **punto angoloso**
- la derivata sinistra e quella destra sono infinite ma di segno opposto; in questo caso la retta tangente in P è parallela all'asse y e si dice che P è una **cuspide**.

Il differenziale e il suo significato geometrico

Il **differenziale** di una funzione $f(x)$ in un punto x è il prodotto della derivata della funzione per l'incremento Δx:

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \qquad \text{ed essendo } \Delta x = dx \qquad df(x) = f'(x) \cdot dx$$

Dal punto di vista geometrico il differenziale rappresenta l'incremento della variabile dipendente y calcolato sulla retta tangente anziché sulla funzione.