APPROFONDIMENTO

Le equazioni reciproche di quarto grado complete

Riconsideriamo l'equazione di quarto grado reciproca completa

$$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$$

Per risolverla dobbiamo effettuare una particolare sostituzione che possiamo individuare facilmente se riscriviamo l'equazione nella forma che si ottiene con i seguenti passaggi:

- dividiamo entrambi i membri per x^2 (l'operazione è lecita perché 0 non è soluzione dell'equazione):

  $$12x^2 - 4x - 41 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

- raccogliamo a fattor comune i termini che hanno lo stesso coefficiente:

  $$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0$$

La sostituzione da operare è suggerita dalla forma stessa dell'equazione ed è: $x + \frac{1}{x} = t$

Per sapere che cosa sostituire al posto di $x^2 + \frac{1}{x^2}$ osserviamo che $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

e che quindi $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, cioè $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

In definitiva le sostituzioni da operare sono:

- **$t^2 - 2$ al posto di $x^2 + \frac{1}{x^2}$**
- **t al posto di $x + \frac{1}{x}$**

Con ciò l'equazione diventa: $12(t^2 - 2) - 4t - 41 = 0 \quad \rightarrow \quad 12t^2 - 4t - 65 = 0$

ed ha soluzioni: $t = -\frac{13}{6}$; $t = \frac{5}{2}$

Per tornare alla variabile x operiamo la sostituzione inversa e risolviamo le due equazioni:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6} \quad \rightarrow \quad 6x^2 + 13x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \; ; \; x = -\frac{2}{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \; ; \; x = 2$$

In definitiva l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

Generalizziamo la procedura.

Per risolvere l'equazione **reciproca di quarto grado completa**

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

si deve:

- dividere entrambi i membri per x^2
- raccogliere a fattor comune i termini che hanno coefficienti uguali
- operare le sostituzioni: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ e $x + \frac{1}{x} = t$
- risolvere l'equazione di secondo grado in t ottenuta
- dette t_1 e t_2 le soluzioni, operare la sostituzione inversa $x + \frac{1}{x} = t_1$ e $x + \frac{1}{x} = t_2$ e risolvere le equazioni in x ottenute.

ATTENZIONE AGLI ERRORI

Posto $x + \frac{1}{x} = t$:

- è sbagliato porre $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2$ perché $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ **non è uguale a** $x^2 + \frac{1}{x^2}$
- è corretto porre $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni reciproche di quarto grado complete.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$

Ricordiamo la procedura per risolvere equazioni di questo tipo:

- si divide per x^2 : $4x^2 + 8x - 37 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$
- si raccoglie a fattor comune fra i termini che hanno coefficienti uguali:

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$$

- si operano le seguenti sostituzioni:

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \text{e} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \quad \rightarrow \quad 4(t^2 - 2) + 8t - 37 = 0$$

- si risolve l'equazione di secondo grado ottenuta:

$$4t^2 + 8t - 45 = 0 \qquad t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{4} = \frac{-4 \pm 14}{4} = \begin{cases} -\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

- si operano le sostituzioni inverse e si risolvono le due equazioni ottenute:

  - $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{9}{2} \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 9x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$

  - $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{ \dfrac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}, \dfrac{1}{2}, 2 \right\}$.

2 $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ 3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2} \right\} \right]$

3 $18x^4 + 21x^3 - 94x^2 + 21x + 18 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -3, -\frac{1}{3} \right\} \right]$

4 $x^4 - \frac{35}{6}x^3 + \frac{31}{3}x^2 - \frac{35}{6}x + 1 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ 3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2} \right\} \right]$

5 $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \right\} \right]$

6 $20x^4 - 12x^3 - 55x^2 - 12x + 20 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\} \right]$

7 $18x^4 + 3x^3 - 154x^2 + 3x + 18 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ -\frac{1}{3}, -3, \frac{19 \pm \sqrt{217}}{12} \right\} \right]$

8 $9x^4 - 8x^3 - 34x^2 - 8x + 9 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ -1, \frac{13 \pm 2\sqrt{22}}{9} \right\} \right]$

9 $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ 2, \frac{1}{2} \right\} \right]$

10 $\frac{6}{x^2} + \frac{5}{x} = 38 - 6x^2 - 5x$ $\quad \left[S = \left\{ 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3} \right\} \right]$

11 $4(x^4 + 1) - 9x(x^2 + 1) - 26x^2 = 0$ $\quad \left[S = \left\{ -1, 4, \frac{1}{4} \right\} \right]$