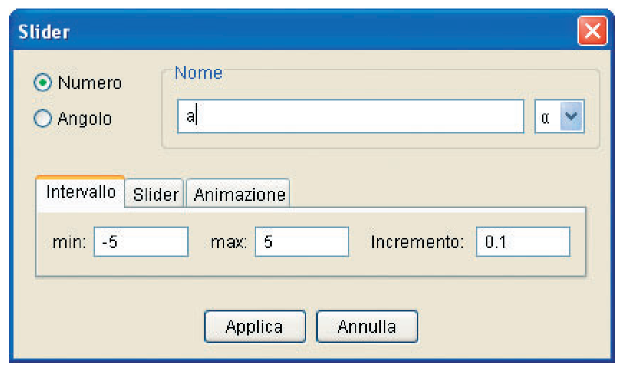
Parallelismo e perpendicolarità nel piano

Matematica in laboratorio

1. L'UTILIZZO DEGLI SLIDER E IL PARALLELISMO CON GEOGEBRA

Uno slider è un numero, oppure un angolo, il cui valore può variare in un fissato intervallo $[a, b]$ assumendo valori che, a partire da a, vengono incrementati di un passo costante fino a b.
Per esempio, se si fissa come intervallo $[1,4]$ ed il passo di incremento è 0,5, i valori che lo slider assume sono

1   1,5   2   2,5   3   3,5   4



Uno slider viene usato quando si vuole far dipendere una costruzione da un parametro variabile.
L'attivazione di questo strumento avviene con il comando *10-Slider* che fa aprire una finestra di dialogo come quella in figura.
In essa si deve:

- specificare se il parametro variabile è un numero oppure un angolo
- dare un nome al parametro
- completare la scheda *Intervallo* indicando il valore minimo e il valore massimo dell'intervallo e il passo di incremento.

L'aspetto grafico di uno slider è un segmento con un punto mobile in evidenza; la sua posizione orizzontale o verticale nella *Vista Grafica* può essere fissata dalla scheda *Slider* che si trova a fianco di quella *Intervallo*.
La scheda *Animazione*, quando è attivata, consente di fissare le modalità di variazione automatica del parametro in modo che sia *Oscillante* (da a a b e viceversa), *Crescente* (sempre da a verso b), *Decrescente* (sempre da b verso a).
Facendo scorrere il punto mobile mediante trascinamento in avanti e indietro, si ottengono le variazioni programmate del parametro.

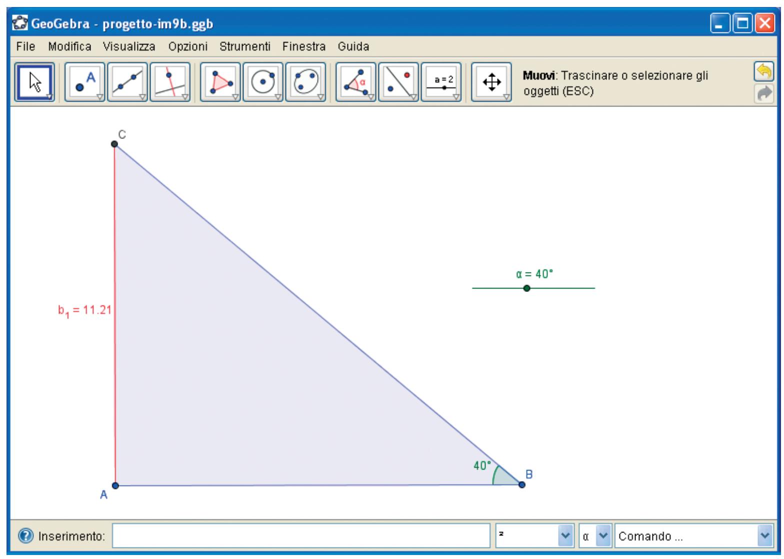
Esercitazione 1. Uso di uno slider applicato ai triangoli rettangoli

Vogliamo disegnare un triangolo rettangolo avente un angolo acuto di ampiezza variabile fra 0° e 90° e osservare come si modifica la lunghezza del lato ad esso opposto.
Per disegnare il triangolo rettangolo costruiamo un segmento AB e una retta r ad esso perpendicolare passante per A.
Supponiamo poi che l'angolo di ampiezza variabile sia quello di vertice B; costruiamo lo slider in questo modo:

– attiviamo lo strumento *10-Slider* e clicchiamo in un punto della finestra grafica
– spuntiamo la casella *Angolo*

- nella casella *Nome* attribuiamo allo slider il nome α (si può scegliere questo simbolo dalla casella a discesa sulla destra)
- fissiamo come valori minimo e massimo dell'intervallo 0° e 90° e come incremento 10°
- confermiamo le scelte fatte cliccando sul pulsante *Applica*.

Alla conferma, nella *Vista Grafica* viene disegnato un segmento orizzontale con il punto mobile che indica, ad ogni spostamento, il valore di α assunto in quella posizione.
Disegniamo adesso l'angolo variabile del triangolo con lo strumento *8-Angolo di data misura* facendo clic prima sul punto *A*, poi sul punto *B* e indicando come ampiezza α (nella finestra di dialogo puoi anche scegliere l'orientamento orario oppure antiorario).
Completiamo il triangolo determinando il punto *C* di intersezione della retta *r* con il secondo lato dell'angolo α e ridisegnandolo con lo strumento *5-Poligono*.
Nascondiamo tutti gli elementi che sono serviti alla costruzione e lasciamo solo il triangolo.
Muovendo il punto mobile verso destra, l'angolo α aumenta la sua ampiezza di 10° ogni volta, muovendolo verso sinistra diminuisce della stessa quantità.



In corrispondenza di ciascuna variazione, anche la lunghezza del lato opposto a questo angolo si modifica; per renderla visibile, apriamo la scheda delle *Proprietà* relativa al lato *AC* e, dalla scheda *Fondamentali*, in corrispondenza della voce *Mostra etichetta*, apriamo il menu a discesa e scegliamo *Nome e valore*.

Casi particolari sono quelli estremi:

- quando $\alpha = 0°$ il triangolo degenera in due segmenti sovrapposti e la misura del segmento *AC* è 0;
- quando $\alpha = 90°$ il triangolo non esiste più perché l'ipotenusa diventa parallela a uno dei cateti; il triangolo non viene quindi mostrato e anche la misura del segmento *AC* non viene indicata in quanto questo segmento non esiste più.

Esercitazione 2. **Verifica del parallelismo**

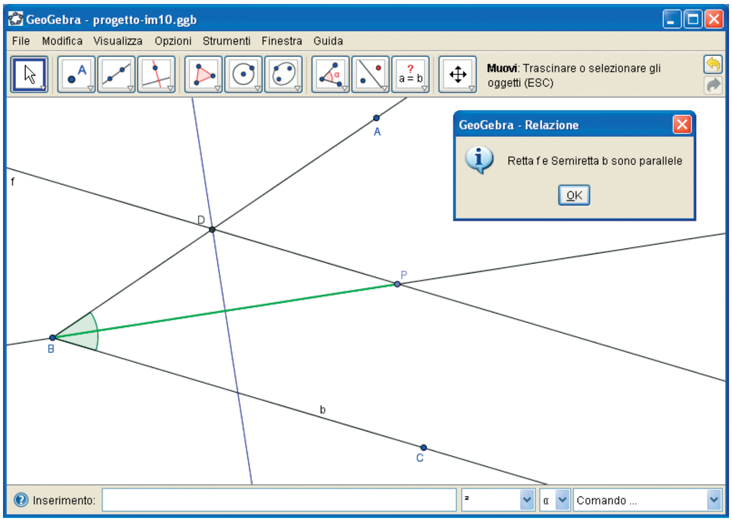
Sia $\widehat{ABC}$ un angolo convesso e sia *P* un punto della sua bisettrice; l'asse del segmento *PB* incontra la semiretta *AB* in *D*. Ci chiediamo se esiste qualche relazione fra il lato *BC* dell'angolo e la retta *DP*.

Costruiamo la figura secondo le indicazioni.

1. Disegniamo un angolo convesso di vertice *B* (strumento *8-Angolo*) e completiamo il disegno rappresentando le semirette *BA* e *BC*.
2. Con lo strumento *4-Bisettrice* tracciamo la bisettrice dell'angolo cliccando nell'ordine sui punti *A*, *B*, *C*; viene disegnata una retta che rappresenta la bisettrice sia dell'angolo convesso che dell'angolo concavo.
3. Usando lo strumento *3-Nuovo punto*, prendiamo un punto sulla bisettrice dell'angolo convesso: clicchiamo in un punto quando, avvicinando il puntatore alla bisettrice, questa cambia spessore. Attraverso la voce *Rinomina* del menu contestuale diamo nome *P* al punto.
4. Con lo strumento *3-Segmento tra due punti* definiamo il segmento *BP* cliccando su *B* e su *P*.
5. Con lo strumento *4-Asse di un segmento tra due punti* tracciamo l'asse di *BP*.

6 Troviamo poi il punto di intersezione dell'asse con la semiretta *BA* (strumento *2-Intersezione tra due oggetti*) e chiamiamolo *D*.

7 Tracciamo infine la retta *DP* (strumento *3-Retta per due punti*).



Per sapere se esiste qualche relazione fra la retta *DP* e la semiretta *BC* usiamo lo strumento *10-Relazione tra due oggetti* e clicchiamo sulle due rette. Si apre a questo punto una finestra di dialogo nella quale viene comunicato che le due rette sono parallele.

In modalità *1-Muovi* spostiamo adesso il punto *P* lungo la bisettrice e riformuliamo il quesito; modifichiamo l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ABC}$ e, di nuovo, riformuliamo il quesito; le risposte sono uguali alla precedente. Questo significa che il fatto di aver trovato due rette parallele non dipende né dalla posizione del punto *P* sulla bisettrice, né dall'ampiezza dell'angolo $\widehat{ABC}$.

Quello che abbiamo fatto con questa esercitazione è però solo una verifica del parallelismo in qualche situazione, non abbiamo cioè dimostrato che le rette *BC* e *DP* sono parallele per qualunque angolo $\widehat{ABC}$ e per qualunque punto *P* sulla bisettrice; la dimostrazione deve essere condotta mediante un ragionamento rigoroso che può essere il seguente:

- avendo tracciato l'asse del segmento *BP*, i segmenti *DB* e *DP* sono congruenti e perciò $\widehat{DPB}$ è isoscele
- di conseguenza sono congruenti gli angoli $\widehat{DBP}$ e $\widehat{DPB}$
- essendo *BP* la bisettrice, $\widehat{DBP} \cong \widehat{PBC}$ e, per la proprietà transitiva, anche $\widehat{DPB} \cong \widehat{PBC}$
- poiché questi ultimi angoli sono alterni interni rispetto alle rette *DP* e *BC* con trasversale *BP*, possiamo concludere che $DP \parallel BC$.

ESERCIZI

1. Crea un nuovo strumento che tracci il segmento che rappresenta la distanza di un punto da una retta e memorizzalo in modo permanente.

2. Disegna un triangolo isoscele di base assegnata avente l'altezza variabile in uno specificato intervallo; risolvi il problema con GeoGebra usando uno slider.

3. Utilizzando GeoGebra, disegna un triangolo con due lati di lunghezza assegnata e un terzo lato variabile tra 1 e 10. Rileva le variazioni dell'ampiezza dell'angolo ad esso opposto.

4. Usando lo strumento appropriato, verifica che i punti della bisettrice di un angolo sono equidistanti dai lati dell'angolo.

5. Disegna un triangolo isoscele *ABC* di base *BC* e traccia la retta del lato *AB*; disegna una circonferenza che ha centro in *A* e che interseca il lato *AC* del triangolo in *Q* e la retta del lato *AB* in *R* (*R* appartiene al prolungamento di *AB* dalla parte di *A*). Nascondi la circonferenza, che è servita solo per disegnare i segmenti *AR* e *AQ* congruenti, e traccia la retta *RQ*. Verifica che tale retta è perpendicolare alla base e spiega qual è il motivo.

6. Usando anche i nuovi strumenti, costruisci un triangolo rettangolo e poi due triangoli isosceli sui cateti ed esternamente al triangolo; traccia le rette delle altezze relative alla base di ciascuno dei due triangoli isosceli e verifica che:

a. le rette delle due altezze sono fra loro perpendicolari e sono ciascuna parallela all'altro cateto del triangolo rettangolo

b. il loro punto di intersezione appartiene all'ipotenusa del triangolo.

7. Sono date due rette parallele a e b e una terza retta c; costruisci una procedura per trovare un punto su c che sia equidistante da a e da b.

8. Dato un triangolo ABC costruisci le bisettrici degli angoli interni del triangolo di vertici B e C; dal vertice A traccia le parallele a tali bisettrici che incontrano la retta del lato BC nei punti D ed E. Verifica che il segmento DE ha la stessa lunghezza del perimetro del triangolo e danne una giustificazione rigorosa mediante dimostrazione.

9. Costruisci un triangolo ABC dove l'angolo $\widehat{B}$ è il triplo dell'angolo $\widehat{A}$ e stabilisci quali sono i limiti entro cui può variare α affinché:

a. esista il triangolo;

b. il triangolo sia acutangolo.