CAPITOLO 1

MATEMATICA PER LA FISICA

Le funzioni goniometriche

Obiettivi

- definire le funzioni goniometriche fondamentali in riferimento ai triangoli rettangoli e alla circonferenza goniometrica
- risolvere triangoli rettangoli

1. Angoli e funzioni goniometriche

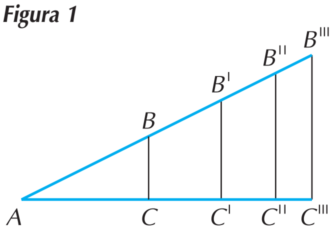
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

1.1 Le funzioni goniometriche nei triangoli rettangoli

Intraprendere lo studio della Fisica può essere difficoltoso se non si hanno a disposizione alcuni strumenti matematici, quali le equazioni, le funzioni, la rappresentazione cartesiana delle curve, i grafici; tutti questi argomenti vengono acquisiti man mano nel primo biennio, ma per poter comprendere meglio alcuni concetti, è opportuno avere conoscenze relative alle relazioni che intercorrono fra i lati e gli angoli di un triangolo. Lo scopo di questo capitolo è quello di completare queste conoscenze di base al fine di rendere più semplice lo studio della Fisica.

Dato un triangolo ABC rettangolo in C, consideriamo l'insieme di tutti i triangoli che sono ad esso simili (in ***figura 1*** ne sono rappresentati alcuni); anche se le lunghezze dei lati sono diverse nei vari triangoli, la loro similitudine ci consente di affermare che si mantiene costante il rapporto fra i lati corrispondenti (e quindi anche quello fra le loro misure rispetto ad una stessa unità), cioè:

Figura 1



rapporto tra un cateto e l'ipotenusa: $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{C'B'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{C''B''}}{\overline{AB''}} = \ldots\ldots\ldots$

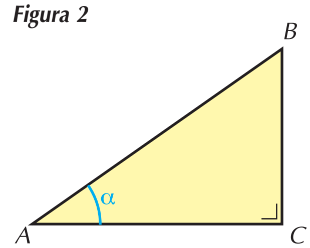
rapporto tra l'altro cateto e l'ipotenusa: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AC''}}{\overline{AB''}} = \ldots\ldots\ldots$

rapporto tra i due cateti: $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{C'B'}}{\overline{AC'}} = \dfrac{\overline{C''B''}}{\overline{AC''}} = \ldots\ldots\ldots$

Quello che caratterizza questi triangoli è quindi l'ampiezza degli angoli, che è la stessa in ciascuno di essi.

Si può allora pensare di dare un nome a tali rapporti in modo che sia evidente che essi non dipendono dal particolare triangolo scelto, ma solo dalle ampiezze degli angoli acuti di uno qualsiasi di essi.
Consideriamo allora un triangolo ABC rettangolo in C e chiamiamo con α l'angolo acuto di vertice A (***figura 2***); diamo le seguenti definizioni:

Figura 2



- **seno dell'angolo α**, e scriviamo sin α, il rapporto fra il cateto opposto ad α e l'ipotenusa: $\sin\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
- **coseno dell'angolo α**, e scriviamo cos α, il rapporto fra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
- **tangente dell'angolo α**, e scriviamo tan α, il rapporto fra il cateto opposto ad α ed il cateto adiacente: $\tan\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

Per esempio, se $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 8$ e di conseguenza $\overline{AB} = 10$, si ha che:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

I valori di sin α, cos α e tan α dipendono sostanzialmente dall'ampiezza dell'angolo α, sono cioè funzioni di α, e si dicono perciò **funzioni goniometriche** dell'angolo α.
Osserviamo subito che, poiché in un triangolo rettangolo ciascun cateto è minore dell'ipotenusa, i rapporti $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ sono numeri positivi minori di 1, mentre il rapporto $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, essendo il rapporto fra i cateti, può essere sia minore che maggiore o anche uguale a 1 e non è soggetto a limitazioni. Dunque, per qualunque angolo acuto α:

- sin α e cos α sono numeri positivi minori di 1
- tan α è un numero reale positivo qualsiasi.

Le funzioni goniometriche di un angolo acuto non sono valori indipendenti uno dall'altro ma sono legati da relazioni precise che discendono proprio dalla loro definizione. Osserviamo infatti che:

- il rapporto $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ esprime sostanzialmente la misura del segmento BC quando si è scelto AB come unità di misura; la stessa cosa si può dire per il rapporto $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

  Allora, se applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ABC abbiamo che:

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \qquad \text{cioè} \qquad \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = 1$$

LE RELAZIONI FONDAMENTALI

ed essendo $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin\alpha$ e $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\alpha$, otteniamo la **prima relazione fondamentale** che lega il seno e il coseno di uno stesso angolo α:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

- il rapporto $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ può essere visto come il quoziente dei rapporti $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$: $\quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

  Ma $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan\alpha$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin\alpha$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\alpha$, quindi una **seconda relazione fondamentale** che lega queste tre funzioni è la seguente:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Queste due relazioni consentono, nota una delle funzioni goniometriche, di trovare le altre.

Per esempio, se $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, allora:

- da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ricaviamo che $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- da $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ricaviamo che $\tan\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ESEMPI

1. In un triangolo rettangolo il cateto AC misura 30cm, l'ipotenusa AB misura 50cm (***figura 3***). Calcoliamo i valori delle funzioni goniometriche degli angoli acuti di questo triangolo.

Troviamo per prima cosa l'altro cateto del triangolo applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{BC} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$$

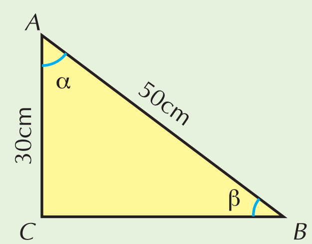
Applicando le definizioni date si ha subito che:

$$\sin\alpha = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \qquad \tan\beta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

Osserviamo che, in questo caso, $\sin\alpha = \cos\beta$ e $\sin\beta = \cos\alpha$, mentre $\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$; queste relazioni non sono casuali, ma dipendono dal fatto che gli angoli α e β sono complementari.

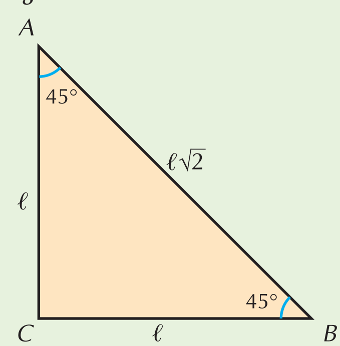
Figura 3



2. Calcoliamo il seno, il coseno e la tangente dell'angolo di 45°.

Per trovare i valori richiesti ci riferiamo ad un triangolo rettangolo isoscele che ha gli angoli acuti di 45° (***figura 4***). Qualunque sia la misura ℓ dei cateti, quella dell'ipotenusa è $\ell\sqrt{2}$. Allora considerando l'angolo acuto $\widehat{A}$ otteniamo:

Figura 4

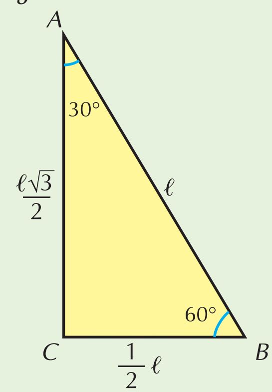


$$\sin 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

3. Procedendo in modo analogo a quello dell'esempio precedente, calcoliamo i valori del seno, del coseno e della tangente degli angoli di 30° e di 60°.

Conviene far riferimento ad un triangolo rettangolo i cui angoli acuti misurano 30° e 60°. Tenendo presente che, posto $\overline{AB} = \ell$, si ha che $\overline{AC} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{BC} = \frac{1}{2}\ell$ (***figura 5***), si trova subito che:

Figura 5



$$\sin 30° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\ell}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\ell}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}\ell}{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{\frac{1}{2}\ell} = \sqrt{3}$$

1.2 Le funzioni goniometriche e la circonferenza goniometrica

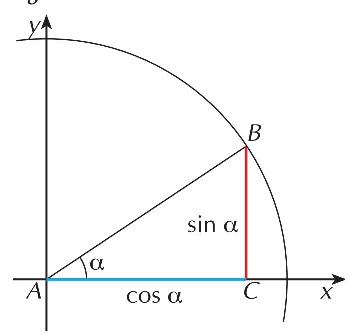
Le funzioni seno, coseno e tangente sono state definite solo per gli angoli acuti di un triangolo rettangolo; viene però spontaneo chiedersi se non sia possibile definire analoghe funzioni anche per angoli che non sono acuti.

Consideriamo allora la circonferenza che ha centro nel vertice A del triangolo e raggio uguale alla sua ipotenusa e riferiamo questa circonferenza ad un sistema di assi cartesiani ortogonali che ha centro in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta del cateto AC (***figura 6***). Se fissiamo come unità di misura il raggio della circonferenza, poniamo cioè $\overline{AB} = 1$, il seno dell'angolo α è proprio la misura del cateto CB, mentre il coseno di α è la misura di AC.

Allora il seno e il coseno di un angolo α si possono anche interpretare rispettivamente come l'ordinata e l'ascissa del punto B in cui la semiretta che definisce l'angolo α insieme alla semiretta positiva Ox delle ascisse interseca la circonferenza:

$$\boxed{x_B = \cos\alpha \qquad y_B = \sin\alpha}$$

Figura 6



Questa considerazione ci consente di definire il seno e il coseno di un angolo qualsiasi riferendoci non più a un triangolo rettangolo ma a una circonferenza.

Consideriamo dunque una circonferenza con centro nell'origine O di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio unitario; chiameremo **goniometrica** questa circonferenza.

Una semiretta uscente da O incontra la circonferenza in A e definisce, insieme alla semiretta positiva Ox, un angolo α. Si conviene di dare misura positiva agli angoli nei quali la semiretta OA segue in senso antiorario la semiretta Ox, misura negativa agli angoli nei quali la semiretta OA segue in senso orario la semiretta Ox (***figura 7***).

Figura 7
α angolo positivo, β angolo negativo

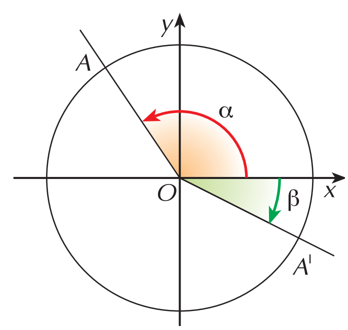
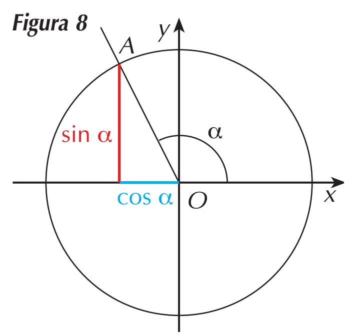


Figura 8



Chiamiamo (***figura 8***):

- **seno** dell'angolo α l'ordinata del punto A: $\quad \boldsymbol{\sin\alpha = y_A}$
- **coseno** dell'angolo α l'ascissa del punto A: $\quad \boldsymbol{\cos\alpha = x_A}$

Ne consegue che il seno ed il coseno di un angolo qualsiasi sono numeri reali compresi fra -1 e 1 e in particolare:

- il seno di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 0° e 180° è un numero positivo (***figura 9a***):

  $0° < \alpha < 180° \quad \Rightarrow \quad 0 < \sin\alpha \leq 1$

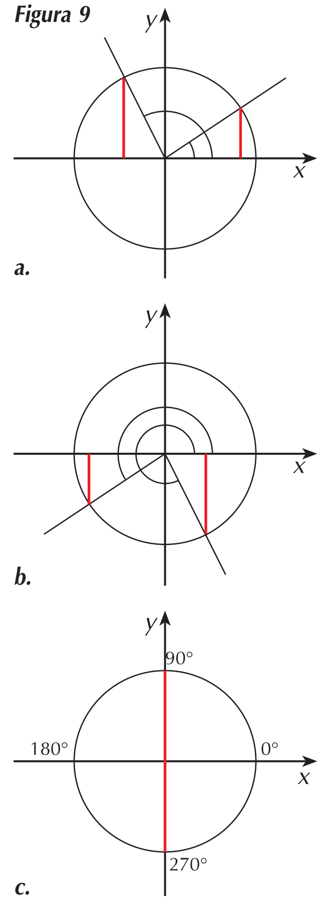
- il seno di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 180° e 360° è un numero negativo (***figura 9b***):

  $180° < \alpha < 360° \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \sin\alpha < 0$

e si ha poi che (***figura 9c***):

$\sin 0° = 0 \qquad \sin 90° = 1 \qquad \sin 180° = 0 \qquad \sin 270° = -1 \qquad \sin 360° = 0$

Figura 9



- il coseno di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 0° e 90° oppure fra 270° e 360° è un numero positivo (***figura 10a***):

  $0° < \alpha < 90° \ \vee \ 270° < \alpha < 360° \quad \Rightarrow \quad 0 < \cos\alpha < 1$

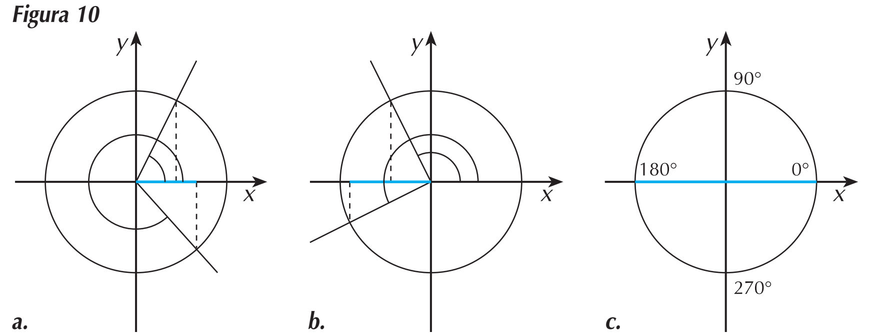
- il coseno di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 90° e 270° è un numero negativo (***figura 10b***):

  $90° < \alpha < 270° \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \cos\alpha < 0$

e si ha poi che (***figura 10c***):

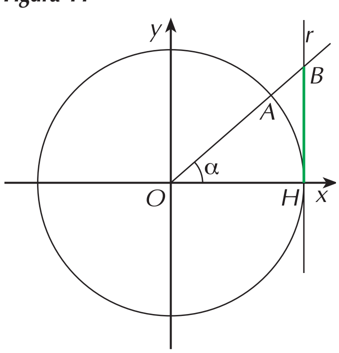
$\cos 0° = 1 \qquad \cos 90° = 0 \qquad \cos 180° = -1 \qquad \cos 270° = 0 \qquad \cos 360° = 1$

Figura 10



Anche la tangente di un angolo α può essere definita per un angolo qualsiasi mediante la circonferenza goniometrica; tracciata la retta r tangente alla circonferenza nel punto di coordinate (1, 0), chiamiamo (***figura 11***):

Figura 11



■ **tangente** di α l'ordinata del punto B di intersezione della retta r con la semiretta OA: $\mathbf{tan}\ \alpha = y_B$

Anche in questo caso, la definizione precedente come rapporto fra i cateti di un triangolo rettangolo $\left(\tan\alpha = \dfrac{HB}{OH}\right)$ è rispettata perché il cateto OH è il raggio di misura unitaria; questa definizione è però più ampia perché ci permette di definire la tangente anche di angoli non acuti. Relativamente al valore di $\tan\alpha$ possiamo dire che:

- la tangente di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 0° e 90° è un numero positivo (***figura 12a***):

  $0° < \alpha < 90° \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha > 0$

- la tangente di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 90° e 180° è un

Figura 12a

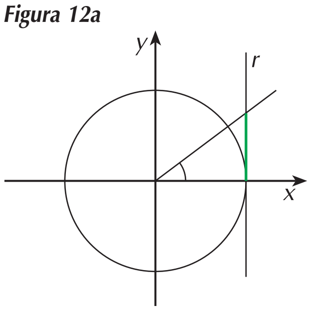
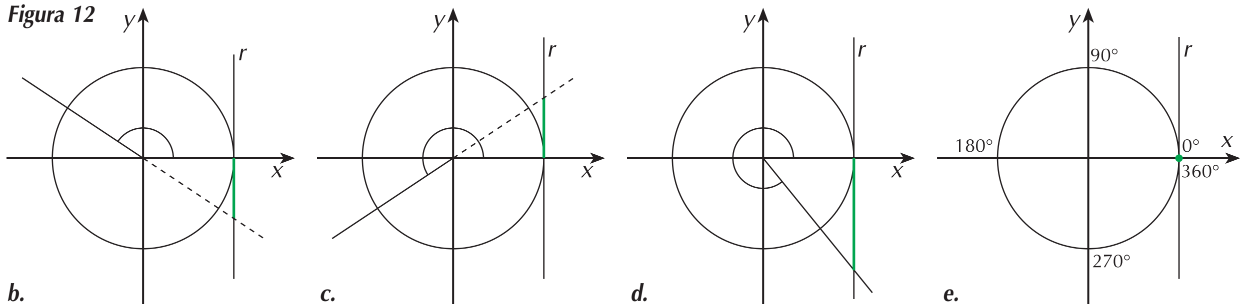


Figura 12



numero negativo (***figura 12b***: occorre prolungare il lato dell'angolo fino ad incontrare la retta *r*):

$90° < \alpha < 180° \qquad \Rightarrow \qquad \tan \alpha < 0$

- la tangente di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 180° e 270° è un numero positivo (***figura 12c***: anche in questo caso occorre prolungare il lato dell'angolo fino ad incontrare la retta *r*):

  $180° < \alpha < 270° \qquad \Rightarrow \qquad \tan \alpha > 0$

- la tangente di un angolo la cui ampiezza è compresa fra 270° e 360° è un numero negativo (***figura 12d***):

  $270° < \alpha < 360° \qquad \Rightarrow \qquad \tan \alpha < 0$

In particolare (***figura 12e***):

$\tan 0° = \tan 180° = \tan 360° = 0$

tan 90° e tan 270° non esistono perché la retta *r* e il secondo lato dell'angolo sono paralleli.

Le relazioni fondamentali sono ancora valide perché:

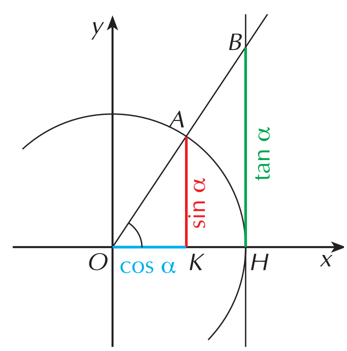
- riferendoci ancora alla ***figura 8***:

  $$\overline{KA}^2 + \overline{OK}^2 = \overline{OA}^2 \qquad \text{cioè} \qquad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

- riferendoci alla ***figura 13*** nella quale i triangoli *OAK* e *OBH* sono simili:

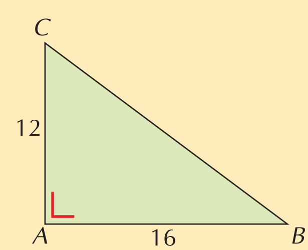
  $$\frac{\overline{HB}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{OK}} \qquad \text{cioè} \qquad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Figura 13



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Nel triangolo *ABC* in figura:



a. $\sin \widehat{ABC} = \frac{3}{4}$ V F

b. $\cos \widehat{ACB} = \frac{3}{5}$ V F

c. $\tan \widehat{ABC} = \frac{3}{4}$ V F

d. $\sin \widehat{ACB} = \frac{4}{5}$ V F

2. Il seno di un angolo acuto α è uguale a $\frac{1}{2}$, il coseno dello stesso angolo è uguale a:

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** nessuno dei precedenti valori

3. Indica quali delle seguenti relazioni relative a un angolo α sono possibili:

a. $\sin\alpha = \frac{5}{3}$ **b.** $\cos\alpha = \frac{10}{13}$ **c.** $\tan\alpha = 8$ **d.** $\cos\alpha = -\frac{3}{2}$

e. $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ **f.** $\tan\alpha = -\frac{1}{8}$ **g.** $\cos\alpha = -\frac{7}{8}$ **h.** $\sin\alpha = -1$

1.3 Le funzioni goniometriche e la calcolatrice

Negli esempi 2 e 3 precedenti abbiamo visto come calcolare le funzioni goniometriche degli angoli di 30°, 45°, 60° mediante considerazioni geometriche. Purtroppo non è possibile calcolare il valore del seno, del coseno o della tangente di angoli di ampiezze diverse se non in casi molto particolari; è però possibile determinare un valore approssimato delle funzioni goniometriche di un qualsiasi angolo usando una calcolatrice scientifica.
Ogni calcolatrice ha delle procedure di calcolo proprie ed è per questo consigliabile consultare il libretto delle istruzioni; nella maggior parte dei casi, tuttavia, la procedura è simile a quella che descriviamo di seguito.
Dopo aver acceso la tua calcolatrice accertati che la modalità di misurazione degli angoli sia in gradi: sul display deve comparire la dicitura **DEG** (DEG sta per degree). Vediamo come procedere attraverso degli esempi.

Dall'angolo al valore delle funzioni goniometriche

- Vogliamo calcolare il valore di $\sin 38°$
  1. Premi il tasto $\boxed{\sin}$
  2. Digita l'ampiezza in gradi dell'angolo: 38
  3. Premi il tasto =

  Ottieni che $\sin 38° = 0{,}6156614......$

E' possibile che in alcuni modelli i passi 1 e 2 debbano essere invertiti, che cioè si debba prima digitare l'ampiezza dell'angolo e poi premere il tasto della funzione goniometrica.

- Vogliamo calcolare il valore di $\cos 135°$
  1. Premi il tasto $\boxed{\cos}$
  2. Digita l'ampiezza in gradi dell'angolo: 135
  3. Premi il tasto =

  Ottieni che $\cos 135° = -0{,}7071067......$

- Vogliamo calcolare il valore di $\tan 109°$
  1. Premi il tasto $\boxed{\tan}$
  2. Digita l'ampiezza in gradi dell'angolo: 109
  3. Premi il tasto =

  Ottieni che $\tan 109° = -2{,}9042108......$

- Vogliamo calcolare il valore di $\sin(-25°)$
  1. Premi il tasto $\boxed{\sin}$
  2. Digita l'ampiezza in gradi dell'angolo: -25
  3. Premi il tasto =

  Ottieni che $\sin(-25°) = -0{,}4226182............$

Quando l'angolo è espresso in gradi, primi e secondi occorre prima trasformare la misura in soli gradi. In genere la conversione avviene in modo automatico mediante la pressione di un particolare tasto funzione; se la tua calcolatrice non dovesse possedere questo tasto dovrai eseguire il calcolo impostandolo in questo modo:

$$20°15'32'' = \left(20 + \frac{15}{60} + \frac{32}{3600}\right)^{\circ} = 20{,}2588.....°$$

Vediamo anche qui alcuni esempi.

- Calcoliamo il valore di sin 118°25′46″
  1. Premi il tasto $\boxed{\text{sin}}$
  2. Trasforma l'angolo in gradi digitando separatamente le cifre dei gradi, dei primi e dei secondi intercalando il tasto funzione contrassegnato con il simbolo $\boxed{\circ\ '\ ''}$: 118 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 25 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 46 $\boxed{\circ\ '\ ''}$
  3. Premi il tasto $=$

  Si ottiene che sin 118°25′46″ = 0,8794040......

  In alcune calcolatrici il tasto $\boxed{\circ\ '\ ''}$ è sostituito dal tasto funzione $\boxed{\text{DMS}}$

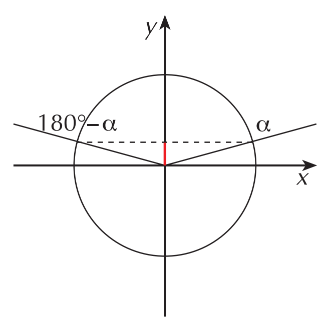
- Calcoliamo il valore di cos 14°17′38″
  1. Premi il tasto $\boxed{\text{cos}}$
  2. Trasforma l'angolo in gradi: 14 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 17 $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 38 $\boxed{\circ\ '\ ''}$
  3. Premi il tasto $=$

  Si ottiene che cos 14°17′38″ = 0,969042............

Dai valori delle funzioni goniometriche all'angolo

Questo problema è l'inverso del precedente, vale a dire che si conosce il valore di una funzione goniometrica e si vuole sapere qual è l'ampiezza dell'angolo; per esempio se $\sin\alpha = 0{,}25$, quanto vale α?
Occorre precisare che la risposta data dalla calcolatrice si riferisce ad uno dei possibili angoli il cui seno vale 0,25; nell'intervallo che va da 0 a 360° ci sono infatti due angoli che rispondono a questa caratteristica: l'angolo acuto α ed il suo supplementare $180° - \alpha$ (***figura 14***). A seconda del problema che si sta affrontando si potrà decidere a quale angolo ci si deve riferire. Vediamo alcuni esempi.

Figura 14



L'angolo ottuso α è l'angolo di ampiezza
180° – 14°28′39″
cioè l'angolo di 165°31′21″

- Calcolare l'angolo acuto α tale che $\sin\alpha = 0{,}25$.
  1. Premere in successione i tasti funzione $\boxed{\text{INV}}$ e $\boxed{\text{sin}}$

  In molte calcolatrici il tasto $\boxed{\text{INV}}$ è sostituito da $\boxed{\text{SHIFT}}$ oppure $\boxed{\text{2-nd}}$
  2. Digitare il valore della funzione goniometrica usando il punto decimale: 0.25
  3. Premere $=$

  Il valore trovato, cioè 14,47751219, esprime la misura dell'angolo α in gradi; volendo avere il valore in gradi, primi e secondi:
  4. premere in successione i tasti funzione $\boxed{\text{INV}}$ e $\boxed{\circ\ '\ ''}$

  Si ottiene così che un valore approssimato di α è 14°28′39″.

In alcuni modelli si deve invertire l'ordine dei tasti digitando prima il valore della funzione goniometrica; relativamente al nostro esempio: 0,25 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$

- Calcolare l'angolo acuto α tale che $\cos \alpha = 0{,}135$.
  1. Premere in successione i tasti funzione $\boxed{\text{INV}}$ e $\boxed{\cos}$
  2. Digitare il valore della funzione goniometrica: 0.135
  3. Premere =
  4. Premere in successione i tasti funzione $\boxed{\text{INV}}$ e $\boxed{\circ\ '\ ''}$

  Si ottiene così che un valore approssimato di α è $82°14'29''$.

- Calcolare l'angolo acuto α tale che $\tan \alpha = 6{,}35$.
  1. Premere in successione i tasti funzione $\boxed{\text{INV}}$ e $\boxed{\tan}$
  2. Digitare il valore della funzione goniometrica: 6.35
  3. Premere =
  4. Premere in successione i tasti funzione $\boxed{\text{INV}}$ e $\boxed{\circ\ '\ ''}$

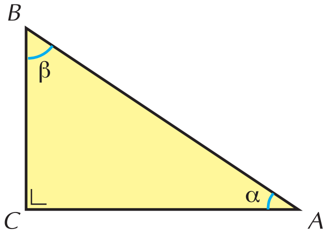
  Si ottiene così che un valore approssimato di α è $81°3'2''$.

2. La risoluzione dei triangoli rettangoli

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 16

Le relazioni che abbiamo stabilito fra i lati di un triangolo rettangolo che ci hanno permesso di definire le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente degli angoli acuti possono essere riscritte in modo da mettere in evidenza le lunghezze del lati; riferendoci al triangolo in ***figura 15*** possiamo dire che:

Figura 15



- poiché $\sin \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ allora $\quad \overline{BC} = \overline{AB} \sin \alpha$
- poiché $\cos \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ allora $\quad \overline{AC} = \overline{AB} \cos \alpha$
- poiché $\tan \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ allora $\quad \overline{BC} = \overline{AC} \tan \alpha$

Queste tre relazioni possono essere così enunciate in forma generale.

I TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale:
- al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo acuto opposto al cateto stesso
- al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso
- al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto stesso.

Usando queste tre relazioni è possibile risolvere molti problemi che riguardano i triangoli; negli esempi che seguono ti proponiamo alcuni casi significativi. Conveniamo di approssimare le lunghezze dei segmenti a meno di 0,01, cioé con due cifre decimali.

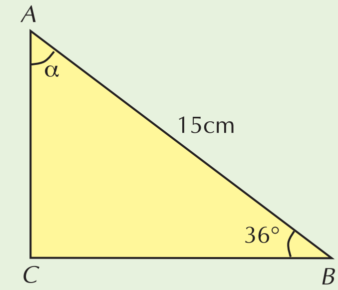
ESEMPI

1. In un triangolo ABC, rettangolo in C, l'ipotenusa AB è lunga 15cm e l'angolo di vertice B ha ampiezza 36°. Vogliamo risolvere il triangolo.

Risolvere il triangolo significa determinare le lunghezze dei suoi lati e le ampiezze dei suoi angoli.

Poiché l'angolo $\widehat{C}$ è retto, ricaviamo subito che (***figura 16***) $\widehat{A} = 90° - 36° = 54°$.

Figura 16



Per determinare le misure dei cateti (in centimetri) usiamo le prime due relazioni:

$\overline{AC}$ = ipotenusa · seno dell'angolo opposto $= \overline{AB} \cdot \sin 36° =$

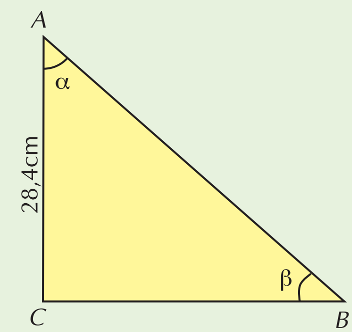
$= 15 \cdot 0{,}58778..... = 8{,}82$

$\overline{CB}$ = ipotenusa · coseno dell'angolo adiacente $= \overline{AB} \cdot \cos 36° =$

$= 15 \cdot 0{,}80901..... = 12{,}14$

2. Di un triangolo rettangolo sono note la lunghezza di un cateto, 28,4cm, e l'ampiezza dell'angolo acuto opposto, 46°25′18″. Vogliamo risolvere il triangolo.

Figura 17



Con riferimento alla ***figura 17***, poniamo $\overline{AC} = 28{,}40$ e $\beta = 46°25'18''$; di conseguenza

$$\alpha = 90° - 46°25'18'' = 43°34'42''$$

Per trovare la misura (in cm) del cateto BC usiamo la terza relazione:

$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \tan \alpha = 28{,}40 \cdot \tan 43°34'42'' = 27{,}02$

Per trovare la misura (in cm) dell'ipotenusa possiamo usare indifferentemente:

– il teorema di Pitagora: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{28{,}40^2 + 27{,}02^2} = 39{,}20$

– la prima relazione: $\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sin \beta \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin \beta} = 39{,}20$

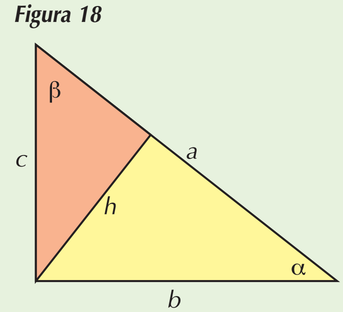
Il secondo metodo è di solito preferibile perché usa i dati del problema e non introduce altri errori di arrotondamento dei risultati.

3. Di un triangolo rettangolo sono note le misure in cm di due cateti: $b = 12{,}40$, $c = 9{,}60$. Vogliamo risolvere il triangolo e determinare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa.

Con il teorema di Pitagora possiamo subito determinare la misura dell'ipotenusa:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{12{,}40^2 + 9{,}60^2} \approx 15{,}68$$

Figura 18



Dalla terza relazione ricaviamo poi che (***figura 18***):

$$\tan \beta = \frac{b}{c} \quad \text{cioè} \quad \tan \beta = \frac{124}{96} \quad \text{da cui} \quad \beta = 52°15'12''$$

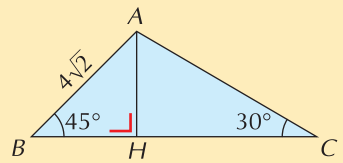
Possiamo ora calcolare $\alpha = 90° - 52°15'12'' = 37°44'48''$.

Per trovare l'altezza relativa all'ipotenusa, basta applicare il primo teorema a uno dei due triangoli rettangoli che si ottengono tracciando l'altezza; relativamente al triangolo in colore arancio nella figura, dove c rappresenta la misura dell'ipotenusa, si ha che

$$h = c \sin \beta = 9{,}60 \sin 52°15'12'' = 7{,}59 \text{ (cm)}$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Del triangolo in figura, ottenuto mediante l'accostamento di due triangoli rettangoli, si conoscono gli elementi indicati.

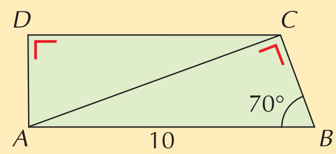


Calcola quanto indicato di seguito:

$\overline{BH} =$ ..... $\overline{AH} =$ .....

$\overline{HC} =$ ..... $\overline{AC} =$ .....

2. Del trapezio $ABCD$ si hanno le informazioni indicate in figura, dove le misure dei segmenti sono espresse mediante la stessa unità. Considera le seguenti uguaglianze:



① $\overline{BC} = 3{,}42$

② $\overline{DC} = 8{,}83$

③ $\overline{AD} = 1{,}17$

Di esse sono vere:

a. tutte e tre **b.** solo la ① **c.** tutte tranne la ③

d. nessuna perché i dati sono insufficienti per determinare le misure dei lati del trapezio.

Soluzioni verifica di comprensione

pag. 6

1 **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** V; **2** **c.**; **3** **b.**, **c.**, **e.**, **f.**, **g.**, **h.**

pag. 11

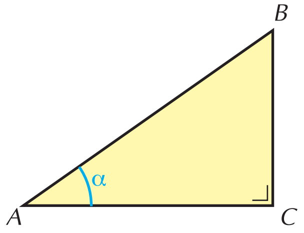
1 $\overline{BH} = \overline{AH} = 4$; $\overline{HC} = 4\sqrt{3}$; $\overline{AC} = 8$; **2** **c.**

I concetti e le regole

Le funzioni goniometriche

Tutti i triangoli rettangoli i cui angoli hanno le stesse ampiezze hanno i lati proporzionali e i valori dei rapporti fra cateti e ipotenusa e fra cateti dipendono dagli angoli acuti del triangolo. Si possono quindi introdurre alcune funzioni relative a questi angoli, dette **funzioni goniometriche**, che, con riferimento alla figura a lato, sono così definite:

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sin\alpha$
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\alpha$
- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \tan\alpha$

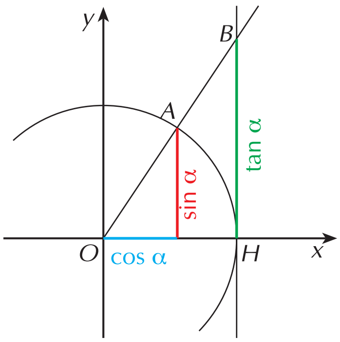


Le funzioni *seno*, *coseno* e *tangente* di un angolo α si possono definire per qualsiasi angolo, non necessariamente acuto.
Considerata la circonferenza avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio 1 (circonferenza goniometrica):

- indicato con A il punto di intersezione di tale circonferenza con la semiretta di origine O che, insieme al semiasse positivo delle ascisse, delimita l'angolo α
- indicato con B il punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza nel punto $H(1, 0)$ con la semiretta OA

si definisce:

- $\sin\alpha$ l'ordinata del punto A
- $\cos\alpha$ l'ascissa del punto A
- $\tan\alpha$ l'ordinata del punto B



In conseguenza della definizione data si verifica che:

- la funzione *seno* e la funzione *coseno* assumono valori compresi tra -1 e 1
- la funzione *tangente* può assumere qualsiasi valore reale, ma non è definita per angoli di $90°$ e $270°$.

Le relazioni fondamentali e i valori delle funzioni goniometriche

Tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo α sussistono le seguenti relazioni:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

I valori delle funzioni goniometriche di un angolo α si possono determinare in modo approssimato con una calcolatrice scientifica.
Solo di alcuni angoli particolari si possono dare i valori esatti e si ha che:

- $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\tan 45° = 1$
- $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ $\quad\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ $\quad\tan 60° = \sqrt{3}$

La risoluzione dei triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo di cui sono noti alcuni elementi, fra i quali almeno uno deve essere un lato, significa trovare le misure di tutti gli altri lati e angoli. Le relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo sono espresse da alcuni teoremi che derivano direttamente dalle definizioni di seno, coseno e tangente di un angolo acuto.
In ogni triangolo rettangolo:

- un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo acuto ad esso opposto
- un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto ad esso adiacente
- un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo acuto opposto al cateto stesso.

Con riferimanto al triangolo in figura:

- $\overline{BC} = \overline{AB} \sin \alpha$
- $\overline{BC} = \overline{AB} \cos \beta$
- $\overline{BC} = \overline{AC} \tan \alpha$