TEMI DELL'ESAME DI STATO

CORSO DI ORDINAMENTO - SESSIONE ORDINARIA 2003

PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a. Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S e r.

b. Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' ed il rapporto fra i volumi di T e T'.

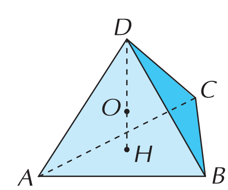
c. Condotto un piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d. Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e. Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalle retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^2$.

Traccia di soluzione

a. Con riferimento alla figura, sia O il centro della sfera inscritta (e anche quello della sfera circoscritta) al tetraedro.
Si può scomporre il solido in quattro piramidi ciascuna avente per base una faccia del tetraedro e per vertice O; l'area di ciascuna base è quindi $\frac{S}{4}$, l'altezza è $\overline{OH} = r$ e quindi il volume del tetraedro è $V = 4 \cdot \frac{S}{4} \cdot r \cdot \frac{1}{3} = \frac{Sr}{3}$.

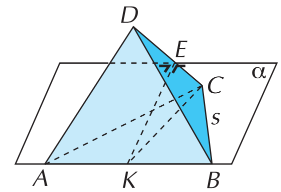


b. Indicato con H il centro di una delle facce del tetraedro, il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' è uguale al rapporto fra il segmento OD, raggio della sfera circoscritta e il segmento OH, raggio della sfera inscritta. La misura di OH, cioè il valore di r, si può ricavare dal volume $\frac{Sr}{3}$ del tetraedro; indicando con h la misura del segmento DH si ha che:

$$\frac{Sr}{3} = \frac{S}{4} \cdot \frac{h}{3} \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{h}{4} \qquad \text{quindi} \qquad \overline{OD} = \frac{3}{4}h. \qquad \text{Allora} \quad \frac{OD}{OH} = \frac{3}{4}h : \frac{h}{4} = 3$$

Rapporto fra i volumi: 27.

c. Indicato con K il piede della distanza di E dallo spigolo AB, K è anche il punto medio di AB e la misura di EK può essere calcolata con il teorema di Pitagora applicato al triangolo ECK rettangolo in E; risulta quindi che $\overline{EK} = \frac{\sqrt{2}}{2}s$.



d. Conviene fissare il sistema di riferimento in modo che E sia l'origine e la retta EK coincida con l'asse y; in queste condizioni E è il vertice della parabola, i punti A e B hanno coordinate $\left(\pm\frac{s}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$; la parabola ha quindi equazione $y = \frac{2\sqrt{2}}{s}x^2$.

e. La retta AE ha equazione $y = \sqrt{2}x$ e quindi l'area è data da $\int_0^{\frac{s}{2}}\left(\sqrt{2}x - \frac{2\sqrt{2}}{s}x^2\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{24}s^2$; deve quindi essere $\frac{\sqrt{2}}{24}s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \rightarrow \quad s = 2\sqrt{2}(\text{cm})$.

PROBLEMA 2

E' assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a. Determinare il suo dominio di derivabilità.

b. Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

c. Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

Traccia di soluzione

$f(x)$: • $\frac{2x+1}{x^2+2m}$ se $m \geq 0$ • $\frac{2x+1}{x^2}$ se $m < 0$

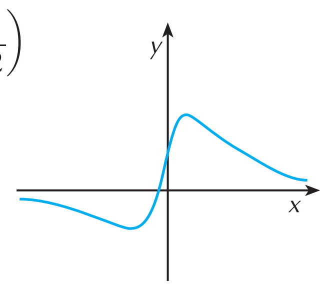
a. La funzione è sempre derivabile nel suo dominio, quindi se $x \neq 0$.

b. $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2-2x+4m}{(x^2+2m)^2} & \text{se } m \geq 0 \\ \dfrac{-2x-2}{x^3} & \text{se } m < 0 \end{cases} \qquad f'(1) = \begin{cases} \dfrac{4m-4}{(1+2m)^2} & \text{se } m \geq 0 \\ -4 & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

La funzione ha derivata nulla se $m = 1$

c. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ asintoto orizzontale : $y = 0$ $M(1,1)$ $m\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

tre punti di flesso determinabili mediante risoluzione grafica



d. Per il calcolo dell'area occorre valutare:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x+1}{x^2+2}dx = \ln\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\frac{\sqrt{2}}{2} + \arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

QUESTIONARIO

1. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x e y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [falsa]

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

$$\left[\text{effettuata la misura degli angoli } \widehat{BAP} = \alpha \text{ e } \widehat{BPA} = \beta,\ \overline{AB} = \frac{\overline{AP}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]$$

4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln\left\{\sqrt{x+1} - (x-1)\right\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A. $-1 < x \leq 3$ **B.** $-1 \leq x < 3$ **C.** $0 < x \leq 3$ **D.** $0 \leq x < 3$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata. [**B.**]

5. La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6. La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$
moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A. $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ **B.** $\frac{1}{3}n(n^2-1)$ **C.** $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$ **D.** $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$

Una sola risposta è corretta; individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata. [**D.**]

8. x e y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

a. è divisibile per 2 e per 3 **b.** è divisibile per 2 ma non per 3

c. è divisibile per 3 ma non per 2 **d.** non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata. [**b.**]

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90. [109 736]

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta. [vera]

PNI - SESSIONE ORDINARIA 2003

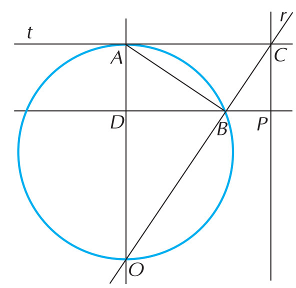
PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.

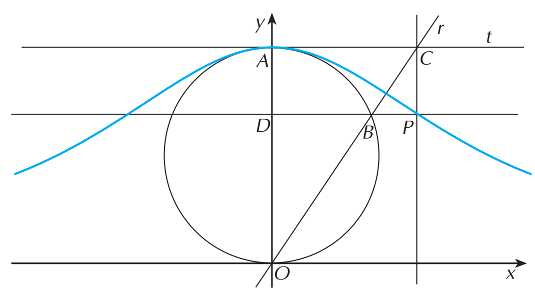
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni: $OD : DB = OA : DP \qquad OC : DP = DP : BC$ dove D è la proiezione ortogonale di B su OA.
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di r è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$.
3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

Traccia di soluzione



1. I triangoli OAC e ODB sono simili e dunque $OD : DB = OA : AC$ ma $AC \cong DP$ quindi $OD : DB = OA : DP$
   $AB \perp OC$ e per il secondo teorema di Euclide AC è medio proporzionale fra OC e BC ed essendo $AC \cong DP$ segue la tesi.
2. Il luogo geometrico descritto dal punto P è ben visibile mediante una costruzione con Cabri e può essere costruito facilmente dagli studenti (figura in basso).
   Conviene fissare la retta OA come asse delle ordinate e la retta per O perpendicolare ad OA come asse delle ascisse, così che:
   - la retta r ha equazione $y = mx$
   - la circonferenza ha centro in $Q\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$ e raggio $\dfrac{a}{2}$:
     $x^2 + \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4} \qquad \rightarrow \qquad x^2 + y^2 - ay = 0$
   - la retta t ha equazione $y = a$



   Il punto P ha la stessa ascissa di C e la stessa ordinata di B ed è $P\left(\dfrac{a}{m}, \dfrac{am^2}{1 + m^2}\right)$

   La curva richiesta ha equazione parametrica $\begin{cases} x = \dfrac{a}{m} \\ y = \dfrac{am^2}{1 + m^2} \end{cases}$

   ed eliminando il parametro m: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari **2.** $f(0) = 2$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2\log 2}$

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G. Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta. Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}dx$. Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Traccia di soluzione

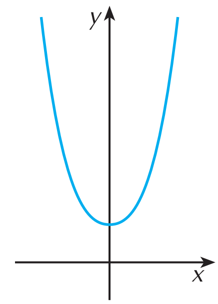
1. $f(x)$ è pari se $f(-x) = f(x)$: $\quad a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c \qquad$ da cui $\boldsymbol{a = b}$

2. $f(0) = 2$ se: $\quad \boldsymbol{a + b + c = 2}$

3. $\displaystyle\int_0^1 (a2^x + b2^{-x} + c)dx = \frac{a}{\log 2} + \frac{b}{2\log 2} + c$: $\qquad \displaystyle\boldsymbol{\frac{a}{\log 2} + \frac{b}{2\log 2} + c = \frac{3}{2\log 2}}$

Risolvendo il sistema delle tre equazioni ottenute si ha che: $a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0$

La funzione ha quindi equazione $y = 2^x + 2^{-x}$ ed il suo grafico (in figura) ha minimo assoluto in (0,2) e non presenta punti di flesso.



Le intersezioni della g con la retta r sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x = \log_2 \left(2 \pm \sqrt{3}\right) = \frac{\log\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{\log 2} \approx \begin{cases} -1{,}89997 \\ 1{,}89997 \end{cases}$$

L'area richiesta è $\displaystyle\int_{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)} (4 - 2^x - 2^{-x})dx = \left[4x - \frac{2^x}{\log 2} + \frac{2^{-x}}{\log 2}\right]_{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)} \approx 5{,}2045.$

$\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}dx = \int \frac{2^x}{2^{2x}+1}dx \qquad$ (per sostituzione ponendo $2^x = t$)

si ottiene $\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}dx = \frac{1}{\log 2}\arctan 2^x + c$

La funzione g' si ottiene dalla funzione g mediante le equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}$ operando cioè le sostituzioni $\begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow 8 - y \end{cases}$: $\quad g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}$.

QUESTIONARIO

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? [306]

2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa? [0,1167]

3. Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2dm? [322,5cl]

4. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

5. Dimostrare, usando il teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione: $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione: $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 = 0$.

6. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di b?

7. Verificare l'uguaglianza $\displaystyle\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

9. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?
[$f'(x) = -\cos x + 2$; $f(x) = -\sin x + 2x + c$; $\pi - 1$]

10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati. [0,347296]

CORSO DI ORDINAMENTO - SESSIONE ORDINARIA 2004

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico G di f.

2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.

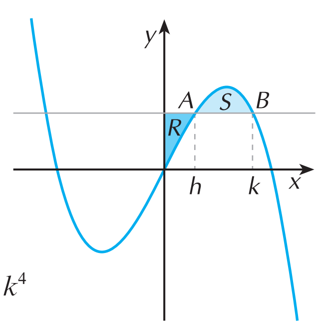
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.

4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

Traccia di soluzione

1. La funzione è una cubica, definita e continua in R, simmetrica rispetto all'origine, interseca l'asse delle ascisse in $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ e in $x = 0$, è positiva per $x < -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee 0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Si ha che $f'(x) = 2 - 9x^2$ ed è $f'(x) \geq 0$ per $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$; abbiamo quindi un punto di minimo in $m\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ e un punto di massimo in $M\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$. La derivata seconda è $f''(x) = -18x$ e pertanto l'origine è il punto di flesso.



2. Le due regioni di piano R e S sono evidenziate in figura.

3. La retta $y = c$ interseca la funzione f nei punti $A(h,c)$ e $B(k,c)$; le aree delle due regioni sono:

$$R: \int_0^h (c - f(x))dx = \int_0^h (c - 2x + 3x^3)dx = ch - h^2 + \frac{3}{4}h^4$$

$$S: \int_h^k (f(x) - c)dx = \int_h^k (2x - 3x^3 - c)dx = ch - ck - h^2 + \frac{3}{4}h^4 + k^2 - \frac{3}{4}k^4$$

Imponendo l'uguaglianza si ottiene l'equazione: $ck - k^2 + \frac{3}{4}k^4 = 0$

Imponendo l'appartenenza del punto B alla funzione si ottiene l'equazione: $c = 2k - 3k^3$

Risolvendo il sistema di queste due equazioni otteniamo che $c = \frac{4}{9}$, $k = \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$

Per trovare il punto A intersechiamo la funzione f con la retta $y = c$: $\begin{cases} y = 2x - 3x^3 \\ y = \dfrac{4}{9} \end{cases}$

L'equazione risolvente del sistema è $2x - 3x^3 = \dfrac{4}{9}$ e si può utilizzare l'algoritmo di Ruffini (sappiamo che una soluzione è $\dfrac{2}{3}$); si ottiene così che $A\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}, \dfrac{4}{9}\right)$.

4. Le equazioni della simmetria sono $\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{8}{9} - y \end{cases}$ e operando le sostituzioni si ottiene che $g(x) = 3x^3 - 2x + \dfrac{8}{9}$.

PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.

2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.

3. Con $BC = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno a uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K.

4. Determinate la misura approssimata, in radianti e in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

Traccia di soluzione

1. Il triangolo si può inscrivere in una circonferenza di diametro BC; se M è il punto medio di BC e quindi il centro della semicirconferenza, si ha che $AM \cong BM \cong CM$.

2. Posto $\overline{BC} = a$, indicata con h l'altezza relativa all'ipotenusa, con x e y le misure dei cateti, si ha che

$$\begin{cases} xy = ah \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema (simmetrico) ottenuto si trova che:

$$x = \frac{\sqrt{a^2+2ah} \pm \sqrt{a^2-2ah}}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{a^2+2ah} \mp \sqrt{a^2-2ah}}{2}.$$

3. Posto $\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = \sqrt{3}$ si ha che $\overline{AC} = \sqrt{3 - x^2}$; facendo ruotare il triangolo ABC attorno alla retta AB, il cono ha raggio di base AC e altezza AB e il suo volume è $V = \dfrac{\pi}{3}x(3 - x^2)$. Il punto di massimo si ha per $x = 1$ ed è $V(1) = \dfrac{2}{3}\pi$ m^3; per ottenere la capacità in litri il volume deve essere in dm^3: $\dfrac{2}{3}\pi \cdot 10^3$ dm$^3 \approx 2094{,}4$ litri.

4. Lo sviluppo piano della superficie laterale del cono è il settore di ampiezza α di una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$ (apotema del cono); la lunghezza dell'arco che delimita il settore è la lunghezza della circonferenza di base del cono ed è $2\pi\sqrt{2}$. L'ampiezza α del settore si calcola mediante la proporzione:

in gradi: $\alpha : 360° = 2\pi\sqrt{2} : 2\pi\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = \dfrac{360° \cdot 2\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{3}} = 293{,}94°$

in radianti: $\alpha : 2\pi = 2\pi\sqrt{2} : 2\pi\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = \dfrac{2\pi \cdot 2\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{3}} = 5{,}1302$

QUESTIONARIO

1. Trovate due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

[deve essere $\begin{cases} a+b=k \\ ab=k \end{cases}$; risolvendo il sistema (simmetrico) si ottiene che $a = \dfrac{k-\sqrt{k^2-4k}}{2}$ e $b = \dfrac{k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$ con $k<0 \vee k>4$; per esempio, per $k=6$ i due numeri sono $3 \pm \sqrt{3}$]

2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3. Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1,3) e un minimo relativo in $(-1,2)$.

[un esempio semplice è dato da una cubica: $y = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$]

4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una sola soluzione reale.

[la sola soluzione reale è il punto di intersezione delle curve di equazioni $y = e^x$ e $y = -3x$]

5. Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate un'espressione di $g(x)$.

[una possibile soluzione: $g(x) = \begin{cases} x^2 & x=2 \\ 2x-1 & x \neq 2 \end{cases}$]

6. Verificate che le funzioni $f(x) = 3\ln x$ e $g(x) = \ln (2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

[le due funzioni differiscono per una costante: $g(x) = 3\ln (2x) = 3\ln 2 + 3\ln x$]

7. Un triangolo ha due lati e l'angolo tra essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ. Qual è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?

[$\delta = \dfrac{\pi}{2}$]

8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?

9. Calcolate $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x \, dx$.

[$\dfrac{\pi}{2} - 1$]

10. Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

[si deve calcolare il numero di disposizioni con ripetizione di 3 elementi di classe 4: $3^4 = 81$]

P.N.I. - SESSIONE ORDINARIA 2004

PROBLEMA 1

Sia γ la curva di equazione $y = ke^{-\lambda x^2}$ ove k e λ sono parametri positivi.

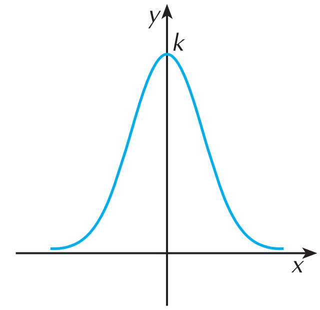
1. Si studi e si disegni γ.

2. Si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;

3. sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \dfrac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia uguale a 1.

4. Per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss*, 1777-1855). Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

Traccia di soluzione



1. La funzione è definita in R ed è continua in tutto il suo dominio; essendo $f(x) = f(-x)$, la curva è simmetrica rispetto all'asse y e ammette come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse.
Si ha che $f'(x) = -2k\lambda x e^{-\lambda x^2}$ ed il punto $(0,k)$ è di massimo; $f''(x) = 2k\lambda e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1)$ e si hanno due punti di flesso di ascisse $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$. Il grafico è in figura.

2. Il rettangolo richiesto ha vertici nei punti $(\pm a, 0)$ e $\left(\pm a, ke^{-\lambda a^2}\right)$ e la sua area è $A(a) = 2a \cdot ke^{-\lambda a^2}$; la derivata della funzione A è $A'(x) = -2ke^{-a^2\lambda}(2a^2\lambda - 1)$ e il massimo si trova nel punto di ascissa $a = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, cioè in corrispondenza di uno dei punti di flesso della funzione.

3. Posto $\lambda = \frac{1}{2}$ la funzione ha equazione $y = ke^{-\frac{1}{2}x^2}$ e si deve calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2}dx$; operando la sostituzione $\frac{1}{2}x^2 = t^2$ si ha che: $\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2}k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = k\sqrt{2\pi}$ e deve essere $k\sqrt{2\pi} = 1$ da cui $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

4. La curva che si ottiene ha equazione $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ e rappresenta la curva normale di Gauss; essa è un caso particolare di quella più generale di equazione $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ le cui caratteristiche principali sono le seguenti: ha come asse di simmetria la retta $x = \mu$, il punto di massimo ha coordinate $\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, i flessi hanno ascissa $x = \mu \pm \sigma$, l'area della parte di piano da essa delimitata con l'asse x vale 1.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita: $f(x) = \sin\frac{\pi}{a}x \cos\frac{\pi}{2b}x + x$ con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che $f(x) = \frac{a+b}{2}$.

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.

3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

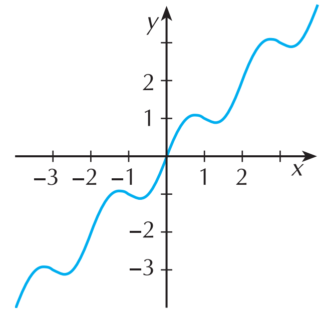
Traccia di soluzione

1. La funzione è definita in R, è simmetrica rispetto all'origine ed è continua. Inoltre si ha che $f(a) = a$ e $f(b) = b$, quindi, per una proprietà delle funzioni continue, essa assume almeno una volta ogni valore compreso fra a e b, quindi esiste almeno un punto x in cui $f(x) = \frac{a+b}{2}$.

2. La funzione $g(x)$ ha equazione $y = \sin\frac{\pi x}{2} \cos\frac{\pi x}{2} + x = \frac{1}{2}\sin \pi x + x$.

Essa si può pensare come somma delle due funzioni $g_1(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x$, periodica di periodo 2, e $g_2(x) = x$.

La derivata è $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos \pi x + 1$ e la disequazione $\frac{\pi}{2}\cos \pi x + 1 \geq 0$ si risolve per via grafica intersecando le curve $y = \cos \pi x$ e $y = -\frac{2}{\pi}$; ci sono infiniti punti di intersezione che corrispondono agli infiniti punti di massimo o di minimo della funzione. Il grafico è in figura.



3. Il primo punto di massimo relativo per $x > 0$ ha ascissa $x = \frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$ e un suo valore approssimato è 0,7197.

QUESTIONARIO

(alcuni quesiti sono uguali al tema dei corsi di ordinamento e di essi non sono riportate le soluzioni)

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? come varia l'area della sua superficie?
   $\left[\frac{V'}{V} = 27,\ \frac{S'}{S} = 9\right]$
4. Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
5. Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che: $\lim_{x\to 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$.
6. Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in (1,3) e un minimo relativo in (−1,2).
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
   [indicata con b la misura della base, con A quella dell'area, con x la proiezione di uno dei lati sulla base, si ottiene la funzione del perimetro: $2p(x) = b + \sqrt{\frac{4A^2}{b^2} + x^2} + \sqrt{\frac{4A^2}{b^2} + (b-x)^2}$ che ha massimo per $x = \frac{b}{2}$]
8. Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una sola soluzione reale e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
   $[x \approx -0{,}26]$
10. Nel piano è data la seguente trasformazione: $\begin{cases} x \rightarrow x\sqrt{3} - y \\ y \rightarrow x + y\sqrt{3} \end{cases}$. Di quale trasformazione si tratta?
   [la matrice della trasformazione è $M = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ed è det $M = 4$; si tratta di una similitudine diretta di rapporto $k = 2$]

CORSO DI ORDINAMENTO - SESSIONE ORDINARIA 2005

PROBLEMA 1

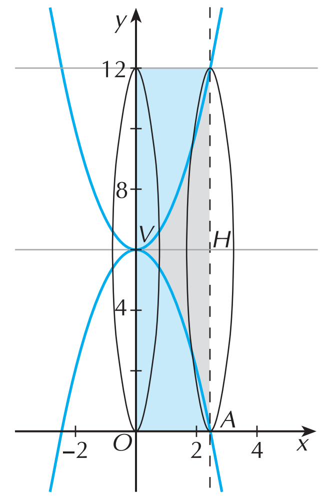
Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola γ di equazione $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.

3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

Traccia di soluzione

1. Il volume richiesto si ottiene dall'equazione $x^2 = 6 - y$ calcolando l'integrale $\pi \int_0^6 (6 - y)dy = 18\pi$.



2. Il volume si ottiene considerando il volume V_1 del cilindro avente raggio di base $\overline{VO} = 6$ e altezza $\overline{VH} = \sqrt{6}$ e sottraendo il volume V_2 che si ottiene dalla rotazione del triangolo mistilineo AVH:

$$V_1 = 36\sqrt{6}\pi \qquad V_2 = \pi \int_0^{\sqrt{6}} [6 - (6 - x^2)]^2 dx = \frac{36}{5}\pi\sqrt{6}$$

cioè $V = 36\sqrt{6}\pi - \dfrac{36}{5}\pi\sqrt{6} = \dfrac{144}{5}\pi\sqrt{6}$

3. Area di $R = \int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2)dx = 4\sqrt{6}$

La retta $y = k$ interseca l'arco di parabola nel punto di ascissa $x = \sqrt{6 - k^2}$, basta quindi risolvere l'equazione:

$$\int_0^{\sqrt{6-k^2}} [(6 - x^2) - k]dx = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{3}\left(\sqrt{6 - k^2}\right)(k^2 - 3k + 12) = 2\sqrt{6}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione equivalente $(6 - k)^3 = 54$ da cui $k = 6 - \sqrt[3]{54}$

4. $A(t, 6 - t^2)$; il coefficiente angolare della retta tangente è $y'(t) = -2t$ e deve essere $0 < y < \sqrt{6}$ (posizioni limiti della retta tangente: 0 nel vertice della parabola, $\sqrt{6}$ nel punto di intersezione con l'asse delle ascisse); la sua equazione è: $y = -2tx + t^2 + 6$.
I punti di intersezione con gli assi cartesiani hanno coordinate $(0, t^2 + 6)$ e $\left(\dfrac{t^2 + 6}{2t}, 0\right)$; l'area del triangolo è $A(t) = \dfrac{(t^2 + 6)^2}{4t}$, quindi $A(1) = \dfrac{49}{4}$.

5. La derivata della funzione area è $A'(t) = \dfrac{3(t^2 + 6)(t^2 - 2)}{4t^2}$ ed è $A'(t) = 0$ se $t = \sqrt{2}$ (valore compreso nei limiti); dallo studio del segno di $A'(t)$ si ricava che in tale punto vi è un minimo.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0, +\infty)$ da: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in $x = 0$.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0, +\infty)$ un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.

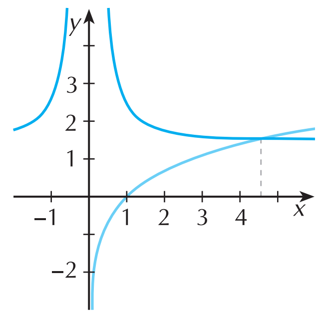
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Traccia di soluzione

1. Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $f(0) = 1$, la funzione è continua in $x = 0$.

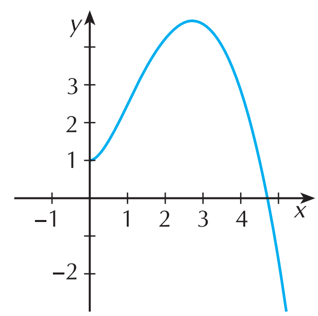
$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x(1 - \ln x) & x > 0 \end{cases} \quad \text{ed è} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \quad \to \quad \text{la funzione è derivabile in } x = 0.$$

2. $f(0) = 1$ (positivo), mentre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, quindi, per il teorema degli zeri la funzione ammette almeno una soluzione in $[0, +\infty)$; per dimostrarne l'unicità si può procedere in due modi:

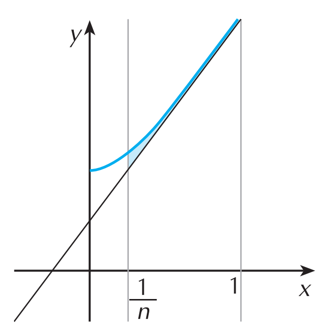


- confrontare graficamente le due funzioni $y = \ln x$ e $y = \frac{3x^2 + 2}{2x^2}$ e verificare che hanno un solo punto di intersezione di ascissa a compresa fra 4 e 5 (con uno dei metodi di approssimazione si trova che $a \approx 4,69$); i grafici sono in figura;
- applicare il teorema di unicità: la derivata prima oppure la derivata seconda non devono mai annullarsi in $(0, +\infty)$; entrambe le derivate tuttavia si annullano all'interno di questo intervallo e questa strada non è percorribile.

3. La funzione è positiva per $x < a$, la sua derivata prima si annulla in $x = 0$ (punto di minimo relativo di coordinate $(0, 1)$) e in $x = e$ (punto di massimo relativo di coordinate $\left(e, \frac{e^2 + 2}{2}\right)$); la derivata seconda è $f''(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -2\ln x & x > 0 \end{cases}$, si annulla in $x = 1$ (punto di flesso di coordinate $\left(1, \frac{5}{2}\right)$).



Poiché $f'(1) = 2$, la tangente nel punto di flesso ha equazione $y = 2x + \frac{1}{2}$. Il grafico è in figura.



4. L'area richiesta è uguale a

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\left(\frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \right) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(-x^2 \ln x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx$$

Si ha che: $\int -x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln x$ quindi

$$A_n = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln x + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \left[\frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{9} - \frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{\ln n}{3n^3}$$

5. $\lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{1}{9}$

Per $n \to +\infty$ la regione di piano considerata è il triangolo mistilineo delimitato dalla curva, dalla tangente inflessionale e dall'asse y.

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sin 18° e sin 36°.

2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

[il volume del solido è $V = 400\text{cm}^3$, posto uguale a x il raggio di base del cilindro, la sua altezza è $h = \dfrac{400}{\pi x^2}$ e quindi la sua superficie totale è $S = \dfrac{800}{x} + 2\pi x^2$; il punto di minimo assoluto si ha per $x = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$ e in questo caso l'altezza è $h = 2\sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}}$
Il cilindro è equilatero.]

3. Si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.

[$y' = \sin x + x \cos x$, $\sin x = 1$ per $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ed in tali punti è $y' = 1$; $\sin x = -1$ per $x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi$ ed in tali punti è $y' = -1$
le due rette tangenti coincidono con le bisettrici dei quadranti]

4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

[indicata con x la misura di un lato e con $2p$ il perimetro, quella dell'altro lato è $p - x$;
l'area è $A(x) = px - x^2$ ed è massima per $x = \dfrac{1}{2}p$; il rettangolo è un quadrato]

5. Il numero e di Nepero (nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)): come si definisce? perché la derivata di e^x è e^x?

[definizione: $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; derivata di e^x : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} e^x \cdot \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$]

6. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

[$n! = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$; $n!$ rappresenta il numero di permutazioni di n oggetti; $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$]

7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

[$f(x) - 2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = (x^2 + 2x)^2 + 1$ essendo una somma di quadrati non si annulla mai]

8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Qual è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

[posto uguale a ℓ lo spigolo del cubo, spigolo dell'ottaedro: $\dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$; $V_{\text{ottaedro}} = \dfrac{1}{6}\ell^3$, $\dfrac{V_{\text{cubo}}}{V_{\text{ottaedro}}} = 6$]

9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di $\sin^2 35° + \sin^2 55°$ ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

[$\sin^2 35° + \sin^2(90° - 35°) = \sin^2 35° + \cos^2 35° = 1$]

10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \arctan x - \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

[$f'(x) = 0$, $f(x)$ è costante a tratti ed è: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x > -1 \\ -\dfrac{3}{4}\pi & \text{se } x < -1 \end{cases}$]

P.N.I. - SESSIONE ORDINARIA 2005

PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r di equazioni: $\lambda : x^2 = 4(x-y)$ $\quad r : 4y = x + 6$

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del primo quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

Traccia di soluzione

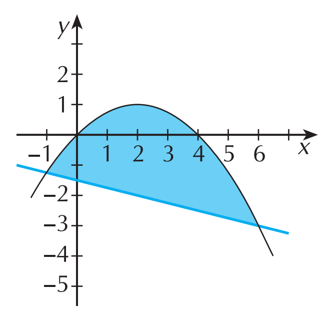
1. $\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ 4y = x+6 \end{cases}$ l'equazione risolvente $x^2 - 2x + 3 = 0$ non ha soluzioni reali,

2. Il punto di minima distanza è il punto di contatto della retta tangente a λ che è parallela a r :

$$\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ y = \dfrac{1}{4}x + k \end{cases} \quad \rightarrow \quad k = \frac{9}{16} \qquad \text{retta tangente } y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{16} \qquad \text{punto di tangenza } P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{16}\right)$$

3. La retta s ha equazione $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2}$ e le ascisse di punti di intersezione con λ sono $x = -1$ e $x = 6$.

L'area è: $\displaystyle\int_{-1}^{6} \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right)dx = \frac{343}{24}.$



4. La retta $y = c$ interseca la parabola nei punti di ascissa $x_1 = 2 - 2\sqrt{1-c}$ e $x_2 = 2 + 2\sqrt{1-c}$

$$\int_{2-2\sqrt{1-c}}^{2+2\sqrt{1-c}} \left(-\frac{1}{4}x^2 + x - c\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)dx \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{1-c}(1-c) = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

5. $V = \displaystyle\int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right)^2 dx = \frac{32}{15}.$

PROBLEMA 2

Il problema è uguale al problema 2 della sessione ordinaria.

QUESTIONARIO

(alcuni quesiti sono uguali al tema dei corsi di ordinamento e di essi non sono riportate le soluzioni)

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sin 18° e sin 36°.

2. Si dia una definizione di retta tangente a una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.

3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$.

$\left[\text{esempio} \quad \varphi: \text{ simmetria di asse } y = x: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}; \sigma: \text{ simmetria di asse } y = x - \sqrt{5}: \begin{cases} x' = y + \sqrt{5} \\ y' = x - \sqrt{5} \end{cases}; \varphi \circ \sigma: \begin{cases} x' = x - \sqrt{5} \\ y' = y + \sqrt{5} \end{cases} \right]$

4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

5. Come si definisce e qual è l'importanza del numero e di Nepero (nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)). Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

6. Le rette r e s di equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.
$\left[\begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases} \right]$

7. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3,4). $[y = 7 - x]$

9. Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti qual è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?
$\left[p_1 = \frac{1}{12};\ p_2 = p(6,2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4 \approx 0{,}0735;\ p_3 = 1 - p(6,0) - p(6,1) \approx 0{,}083 \right]$

10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

[media della popolazione con meno di 60 anni: x; media della popolazione con 60 anni o più : y
$0{,}6x + 0{,}4y = 30 \ \rightarrow \ x = 50 - \frac{2}{3}y$ e deve essere $0 \le x < 60$, quindi $-15 < y \le 75$
la media può essere 30 anni se l'età media degli abitanti con più di 60 anni è inferiore a 75]

CORSO DI ORDINAMENTO - SESSIONE ORDINARIA 2006

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza ℓ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.
a. Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b. la somma delle due aree sia minima?
c. la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Traccia di soluzione

a. Indicata con x una dimensione del rettangolo, con $0 < x < \frac{\ell}{2}$, l'altra è $\frac{\ell}{2} - x$ e l'area è quindi espressa dalla funzione $A(x) = x\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$. Si tratta di una parabola con la concavità verso il basso che ha il suo massimo nel vertice, cioè in $x = \frac{1}{4}\ell$.

L'aiuola di area massima, come del resto è noto, ha forma quadrata.

Si indica adesso con x una delle due parti in cui il filo rimane diviso (con $0 \leq x \leq \ell$); l'altra è quindi $\ell - x$. Il lato dell'aiuola quadrata è $\frac{1}{4}x$, il raggio di quella circolare è $\frac{\ell - x}{2\pi}$. Di conseguenza la somma delle aree delle due aiuole è espressa dalla funzione $S(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{(\ell - x)^2}{4\pi}$ che, essendo continua e limitata nell'intervallo $[0, \ell]$, per il teorema di Weierstrass ammette sicuramente il massimo e il minimo assoluti.

La derivata della funzione somma è $S'(x) = \frac{1}{8}x + \frac{x - \ell}{2\pi} = \frac{(4 + \pi)x - 4\ell}{8\pi}$.

b. Il minimo assoluto si trova in corrispondenza del minimo relativo della funzione, cioè in $x = \frac{4\ell}{4 + \pi}$.

c. Il massimo assoluto si trova in corrispondenza di uno degli estremi dell'intervallo $[0, \ell]$ e poichè si ha che $S(0) = \frac{\ell^2}{4\pi} \approx 0{,}0796\ell^2$ e $S(\ell) = \frac{\ell^2}{16} = 0{,}0625\ell^2$, la somma delle due aree è massima quando $x = 0$, cioè quando si costruisce solo l'aiuola circolare.

Per quanto riguarda l'ultimo punto, indicate con a, b, c le dimensioni del parallelepipedo, quelle del solido più grande hanno dimensione rispettivamente

$$a + \frac{1}{10}a = \frac{11}{10}a \qquad b + \frac{1}{10}b = \frac{11}{10}b \qquad c + \frac{1}{10}c = \frac{11}{10}c$$

I due volumi sono quindi: $V_1 = abc \qquad V_2 = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc$

e la loro differenza è $V_2 - V_1 = \left[\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1\right] abc = 0{,}331abc$

L'aumento percentuale è quindi del 33,1%.

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$ essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

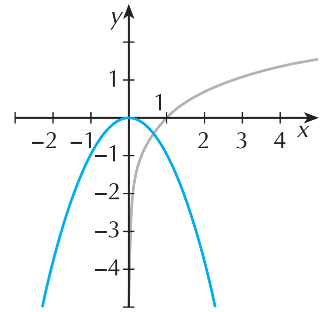
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g, dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Traccia di soluzione

1. La funzione $g(x)$ rappresenta:

- per $a < 0$ una parabola con la concavità verso il basso e, in questo caso, l'equazione ammette una sola soluzione compresa fra 0 e 1; l'unicità della soluzione è garantita dal teorema degli zeri in quanto, in $[0,\ 1]$: la funzione f è crescente e la funzione g è decrescente, $f(1) = 0$ e $g(1) < 0$
- per $a = 0$ l'asse delle ascisse che interseca la funzione $f(x)$ nel punto di coordinate $(1,\ 0)$
- per $a > 0$ una parabola con la concavità verso l'alto che può o meno intersecare la funzione $f(x)$ a seconda del valore di a.



Le due curve sono tangenti nel punto in cui le due derivate sono uguali (con $x > 0$ per l'esistenza della funzione $\log x$):

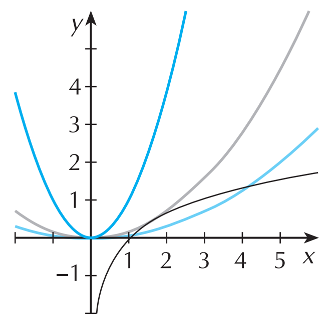
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(x) = 2ax \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x} = 2ax \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Nel punto di tangenza le due funzioni assumono lo stesso valore:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \log \frac{1}{\sqrt{2a}} \qquad g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \log \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2e}$$

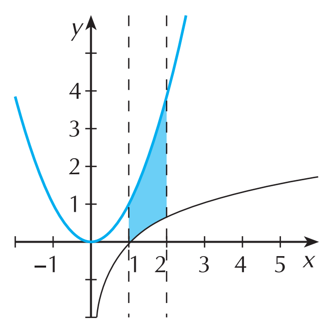
Di conseguenza, essendo g una funzione crescente:

- se $0 < a < \dfrac{1}{2e}$ l'equazione ammette due soluzioni distinte
- se $a = \dfrac{1}{2e}$ le due curve sono tangenti e si hanno due soluzioni coincidenti
- se $a > \dfrac{1}{2e}$ non si hanno soluzioni.



2. Per $a = 1$ le due funzioni non si intersecano e l'area da calcolare si ottiene dall'integrale:

$$\int_1^2 (x^2 - \log x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\log x + x\right]_1^2 = \frac{10}{3} - 2\log 2$$



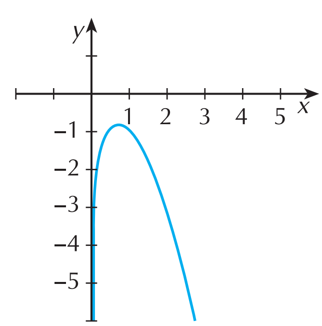
3. Conviene studiare la funzione per $a = 1$: $h(x) = \log x - x^2$

Dominio di $h(x)$: $(0,\ +\infty)$

Segno: dal grafico precedente si deduce che la funzione h è sempre negativa

Si ha poi che: $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

quindi l'asse y è un asintoto verticale destro.



Derivata prima: $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1 - 2x^2}{x}$

la funzione ha un punto di massimo in $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Derivata seconda: $h''(x) = -\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}$

la funzione ha sempre la concavità rivolta verso il basso.

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1 000 chicchi pesino circa 38 grammi, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

$\left[\text{Numero totale dei chicchi } = \sum_{n=0}^{63} 2^n = 2^{64} - 1\text{; il peso in tonnellate è } 38 \cdot \frac{2^{64}-1}{10^9} \approx 701 \text{ miliardi di tonnellate}\right]$

2. I poliedri regolari, noti anche come solidi platonici, sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3. Un foglio di carta deve contenere; un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

$\left[\text{Se } x \text{ e } \frac{50}{x} \text{ sono i lati dell'area di stampa, si deve rendere minima la funzione } f(x) = (x+4)\left(\frac{50}{x}+8\right);\right.$
$\left.\text{il minimo si ha in } x = 5\text{; il foglio di carta ha dimensioni 9 cm} \times \text{18 cm}\right]$

4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

$\left[\text{La diagonale del cubo inscritto è il diametro della sfera, quindi il lato del cubo è } \frac{1}{\sqrt{3}}m, \text{ il volume è } \frac{1}{3\sqrt{3}}m^3,\right.$
$\left.\text{la capacità è } \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot 10^3 \text{ litri} \approx 192{,}45 \text{ litri}\right]$

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

$\left[(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i\text{; posto } a = b = 1\text{, si ottiene che } 2^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right]$

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

$\left[\text{Le funzioni } y = \cos 2x \text{ e } y = \frac{5k-2}{k}\text{, con } 30° < 2x < 90°\text{, si intersecano se } \frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}\right]$

7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

$\left[\text{Si deve risolvere l'equazione } 3x^2 - 4x = -1\text{; la soluzione accettabile è } \xi = \frac{1}{3}\right]$

8. La funzione $f(x) = \tan x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

[$f(x)$ non si annulla in I, ma ciò non contraddice il teorema degli zeri perché essa non è continua in I]

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

$\left[\text{Deve essere } \frac{f'(x)}{f(x)} = 1\text{, cioè } \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int dx\text{, da cui } \ln f(x) = x + c \rightarrow f(x) = e^{x+c};\right.$
$\left.\text{essendo poi } f(0) = 1\text{, si ottiene che } f(x) = e^x\right]$

10. La funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4}{3}\pi$ ed è $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica qual è il periodo di $f(x)$.

$[a = \sqrt{3},\ b = 1;\ \text{il periodo è } 2\pi]$

P.N.I. - SESSIONE ORDINARIA 2006

PROBLEMA 1

Il problema è uguale al problema 1 della sessione ordinaria.

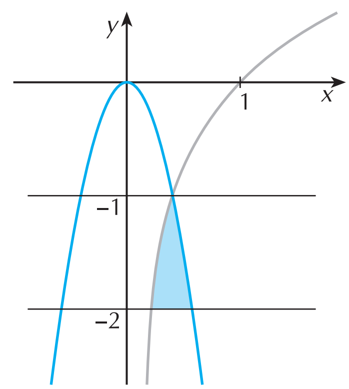
PROBLEMA 2

Il problema è uguale al problema 2 della sessione ordinaria eccettuato il punto 2 che riportiamo di seguito:

2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano delimitata dalle rette d'equazioni $y = -1$ e $y = -2$.

Traccia di soluzione

Occorre determinare le intersezioni delle due curve $y = \ln x$ e $y = -e^2x^2$ con le rette $y = -1$ e $y = -2$; le due curve e la la retta $y = -1$ si intersecano in $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$; gli altri punti di intersezione hanno coordinate $\left(\frac{\sqrt{2}}{e}, -2\right)$ e $(e^{-2}, -2)$.



L'area richiesta è data da: $\displaystyle\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} (\ln x + 2)dx + \int_{e^{-1}}^{\frac{\sqrt{2}}{e}} (-e^2x^2 + 2)dx$

Il primo integrale si calcola per parti e il valore complessivo dell'area è: $e^{-2} + \dfrac{4\sqrt{2} - 5}{3e}$.

QUESTIONARIO

(alcuni quesiti sono uguali al tema dei corsi di ordinamento e di essi non sono riportate le soluzioni)

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64ª casella. Assumendo che 1 000 chicchi pesino circa 38 grammi, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2. I poliedri regolari, noti anche come solidi platonici, sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

[Detto B' il simmetrico di B rispetto a r e D il punto d'intersezione di AB' con r, il cammino più breve è la spezzata ADB]

4. Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altressì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

[Confrontando i grafici delle funzioni $y = \sin x$ e $y = x - 1$ si osserva che esiste una sola soluzione compresa fra $\frac{\pi}{2}$ e π (per l'unicità si può utilizzare il teorema degli zeri); applicando il metodo di bisezione si trova che $\alpha \approx 1{,}934$]

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.

6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7. *Bruno De Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda "*che cos'è la probabilità?*" era solito rispondere: "*la probabilità non esiste!*". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? E' possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

8. Un tiratore spara ripetutamente a un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?

[$p(E) = 0{,}3$; $p(\overline{E}) = 0{,}7$; la probabilità di fare almeno un centro su n tiri è $1 - 0{,}7^n$ e deve essere $1 - 0{,}7^n \geq 0{,}99$; risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq -\frac{2}{\log 0{,}7}$, cioè 13 tiri]

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10. Tenuto conto che: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

[Costruito il grafico della funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$, con il metodo dei rettangoli: $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$; per $n = 5$ si ottiene che $2{,}935 < \pi < 3{,}335$]