Concetti chiave e regole

La funzione radice e i radicali

Nell'insieme R_0^+ dei numeri reali positivi o nulli l'operazione di elevamento a potenza si può invertire e l'operazione inversa è l'estrazione di radice.
Dato un qualunque numero reale $a \geq 0$, si dice **radice *n*-esima di *a*** il numero non negativo b per il quale $b^n = a$.
La radice n-esima di a si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.

La proprietà invariantiva

I radicali in R_0^+ godono della fondamentale **proprietà invariantiva**:

- se l'indice della radice e l'esponente del radicando vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero intero positivo, si ottiene un radicale che ha lo stesso valore di quello dato: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad \forall p \in Z^+$

Grazie a questa proprietà si possono eseguire le seguenti operazioni:

- semplificare un radicale dividendo indice della radice ed esponente del radicando per il loro *M.C.D.*
- ridurre due o più radicali allo stesso indice che è il *m.c.m.* fra gli indici delle radici
- moltiplicare o dividere due radicali se questi hanno lo stesso indice:

  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

  $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

- portar dentro o portar fuori dal simbolo di radice i possibili fattori.

Quando due radicali non hanno lo stesso indice, per trovare il loro prodotto o quoziente si devono prima ricondurre allo stesso indice.

Radicali e moduli

Quando si eseguono delle operazioni sui radicali, si deve prestare attenzione a che:

- il dominio dell'espressione che si ottiene come risultato sia lo stesso di quello dell'espressione data
- il segno dell'espressione che si ottiene come risultato sia lo stesso di quello dell'espressione data.

In caso contrario, si deve valutare di quali fattori è necessario considerare il modulo al fine di mantenere lo stesso dominio e lo stesso segno.

Operazioni con i radicali

- **Moltiplicazione e divisione:** si possono eseguire solo tra radicali dello stesso indice.

Radicali quadratici	Radicali cubici
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$

- **Addizione e sottrazione:** si possono eseguire solo tra radicali simili.

Radicali quadratici	Radicali cubici
$\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$	$2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$

- **Potenza:** si eleva a potenza l'argomento del radicale: $\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3}$

I radicali quadratici doppi

Un radicale quadratico doppio è un radicale che ha la forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

Se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto, il radicale si può trasformare nella somma o differenza di due radicali semplici con la formula:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

La razionalizzazione

Razionalizzare una frazione che ha un denominatore che contiene dei radicali significa scriverla in modo che il denominatore diventi un'espressione razionale. Per fare questo si devono moltiplicare il numeratore e il denominatore della frazione per un opportuno **fattore razionalizzante** che ha una forma diversa a seconda dei casi:

- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{a}$
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^k}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{a^{3-k}}$ con $k < 3$
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$
- se la frazione è del tipo $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ il fattore razionalizzante è $\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$

Le potenze ad esponente razionale

Un radicale di argomento $a \geq 0$ si può scrivere sotto forma di potenza ad esponente razionale con la seguente corrispondenza: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Alle potenze ad esponente frazionario si possono applicare proprietà analoghe a quelle delle potenze ad esponente intero.

Le equazioni della forma $x^n = k$

Per risolvere equazioni di questa forma si applica la definizione di radicale; in particolare:

- $x^2 = k$ ha soluzione $x = \pm\sqrt{k}$ se $k \geq 0$
  è impossibile se $k < 0$
- $x^3 = k$ ha soluzione $x = \sqrt[3]{k}$ $\forall k \in R$