Gli insiemi *Q* e *R*

L'insieme Q

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

L'insieme *Q*. Un numero razionale si può scrivere sotto forma di numero decimale, finito o periodico, oppure sotto forma di frazione. Per passare da una forma all'altra si devono seguire alcune regole:

- se il numero è dato sotto forma di frazione, si esegue la divisione del numeratore per il denominatore; ad esempio

  $\dfrac{27}{8} = 27 : 8 = 3{,}375$ $\qquad$ $\dfrac{4}{3} = 4 : 3 = 1{,}\overline{3}$

- se il numero è decimale finito si scrive il numero senza la virgola al numeratore della frazione e al denominatore si scrive 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali; si semplifica poi eventualmente la frazione ottenuta; ad esempio

  $2{,}6 = \dfrac{26}{10} = \dfrac{13}{5}$ $\qquad$ $0{,}14 = \dfrac{14}{100} = \dfrac{7}{50}$

- se il numero è decimale periodico, al numeratore si scrive il numero senza la virgola meno la parte che viene prima del periodo, al denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo; in seguito, se possibile, si semplifica la frazione ottenuta; ad esempio

  $1{,}\overline{25} = \dfrac{125-1}{99} = \dfrac{124}{99}$ $\qquad$ $3{,}1\overline{5} = \dfrac{315-31}{90} = \dfrac{284}{90} = \dfrac{142}{45}$

2 Trasforma in numeri decimali le seguenti frazioni:

$\dfrac{7}{8} \qquad \dfrac{12}{13} \qquad \dfrac{5}{9} \qquad \dfrac{11}{5} \qquad \dfrac{23}{4} \qquad \dfrac{16}{21}$

3 Scrivi in forma frazionaria i seguenti numeri decimali:

a. $1{,}35 \qquad 0{,}4 \qquad 0{,}035 \qquad 15{,}75 \qquad 2{,}0098 \qquad 0{,}0001$

b. $2{,}\overline{3} \qquad 0{,}3\overline{4} \qquad 0{,}0\overline{2} \qquad 1{,}0\overline{3} \qquad 1{,}23\overline{4} \qquad 0{,}2\overline{56}$

4 **ESERCIZIO GUIDATO**

Esegui le seguenti operazioni con i numeri razionali:

a. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 5 \cdot 2}{12} = \ldots\ldots\ldots$

Il denominatore comune è il *m.c.m.* (4, 2, 6)

b. $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{9}_{3}}\right) = \dots\dots\dots$

Quando è possibile devi cercare di semplificare un numeratore con un denominatore.

c. $\left(-\frac{12}{5}\right) : \frac{3}{20} = -\frac{12}{5} \cdot \frac{20}{3} = \dots\dots$

La divisione si esegue moltiplicando la prima frazione per il reciproco della seconda.

d. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right)$

e. $\left(+\frac{10}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{7}{2} - \left(-\frac{1}{7}\right)$

f. $\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{7}{6}\right) : \frac{1}{12} + \left[\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}+4\right)\right] \cdot \frac{3}{4}$

5 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le potenze. Sappiamo che la scrittura 2^4 è un modo abbreviato di scrivere il prodotto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; in generale, qualunque sia il numero a (naturale, intero o razionale), si ha che:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots\dots\dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ $\qquad \forall n$ intero maggiore di 1

Ad esempio: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

Si pone poi

- $a^0 = 1$ se $a \neq 0$
- $a^1 = a$

Non si attribuisce invece alcun significato alla scrittura 0^0.

6 Completa, se è possibile, le seguenti uguaglianze in modo che risultino vere.

a. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\dots} = \frac{1}{16}$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{\dots} = \frac{9}{16}$ **c.** $\left(\frac{7}{6}\right)^{\dots} = -\frac{49}{36}$ **d.** $\left(-\frac{5}{2}\right)^{\dots} = -\frac{125}{8}$

e. $\left(+\frac{1}{3}\right)^{\dots} = -\frac{1}{27}$ **f.** $\left(-\frac{3}{2}\right)^{\dots} = 1$ **g.** $\left(-\frac{5}{6}\right)^{\dots} = +\frac{25}{36}$ **h.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{\dots} = +\frac{8}{27}$

7 Calcola i valori delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze dovunque è possibile:

a. $\left(-\frac{4}{9}\right)^7 : \left(-\frac{4}{9}\right)^5 \cdot \left[\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right]^0$

b. $\left[\left(+\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right)^4 : \left(+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 : \left\{\left[\left(+\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\right\}^2$

c. $\left\{\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^0 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^6\right\}^2 : \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^8 : \left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$

d. $\left\{\left[\left(+\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 : \left(+\frac{1}{5}\right)^6\right\}^2 \cdot \left[\left(+\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 : \left(+\frac{1}{5}\right)^4$

8 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le potenze con esponente negativo. Sappiamo che la potenza con esponente intero negativo di un numero razionale è uguale alla potenza di esponente positivo del reciproco del numero dato. Ad esempio

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = (-2)^2 \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3} \qquad (-5)^{-3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3$$

Si deve poi prestare attenzione alle operazioni fra gli esponenti quando si applicano le proprietà delle potenze; ad esempio

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2+(-3)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$

b. $\left(-\frac{1}{6}\right)^3 : \left(-\frac{1}{6}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{3-(-4)} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{3+4} = \left(-\frac{1}{6}\right)^7$

c. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

9 Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} \cdot \left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2\right\}^3$

b. $\left(+\frac{3}{5}\right)^{-2} : \left(+\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left[\left(+\frac{3}{5}\right)^3\right]^{-1} \cdot \left\{\left[\left(+\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^2$

c. $\left[-\left(+\frac{3}{7}\right)^2\right]^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^2 : \left[\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}\right]^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4$

L'insieme *R*

10 **ESERCIZIO GUIDATO**

L'insieme *R*. Sappiamo che esistono numeri decimali illimitati non periodici come i numeri $\sqrt{2} = 1{,}414213....$ e $\pi = 3{,}141592....$ Tali numeri sono detti **irrazionali**. L'insieme dei numeri reali è costituito dai numeri razionali ed irrazionali.

Tenendo presente quanto ricordato, stabilisci quali dei seguenti numeri sono razionali e quali irrazionali:

a. -12 **b.** $\sqrt{9}$ **c.** $\sqrt{3}$ **d.** $-\frac{7}{8}$ **e.** $\sqrt{11}$

11 Individua quali fra i seguenti sono numeri irrazionali:

a. 2,03040506....... **b.** $\frac{9}{8}$ **c.** $2,3\overline{4}$ **d.** $\sqrt{12}$

e. $6,\overline{34}$ **f.** 3,75 **g.** $-\sqrt{\frac{9}{4}}$ **h.** 0,1020304

Risultati di alcuni esercizi.

2. 0,875; $0,\overline{923076}$; $0,\overline{5}$; 2,2; 5,75; $0,\overline{761904}$.

3. **a.** $\frac{27}{20}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{200}$; $\frac{63}{4}$; $\frac{10049}{5000}$; $\frac{1}{10000}$; **b.** $\frac{7}{3}$; $\frac{31}{90}$; $\frac{1}{45}$; $\frac{31}{30}$; $\frac{1111}{900}$; $\frac{127}{495}$.

4. **a.** $\frac{13}{12}$; **b.** $-\frac{1}{6}$; **c.** -16; **d.** $\frac{3}{80}$; **e.** $-\frac{9}{14}$; **f.** $-\frac{15}{8}$.

6. **a.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; **b.** $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; **c.** impossibile; **d.** $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$; **e.** impossibile; **f.** $\left(-\frac{3}{2}\right)^0$; **g.** $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; **h.** impossibile.

7. **a.** $+\frac{16}{81}$; **b.** $+\frac{1}{4}$; **c.** 1; **d.** $\frac{1}{25}$.

9. **a.** $\frac{1}{4}$; **b.** $\left(+\frac{5}{3}\right)^5$; **c.** $+\frac{49}{9}$.

10. razionali: **a.**, **b.**, **d.**; irrazionali: **c.**, **e.**

11. **a.**, **d.**, **h.**