

Concetti chiave e regole

Le equazioni differenziali e le caratteristiche

Un'equazione differenziale è un'equazione che ha come incognita una funzione $y = f(x)$ e nella quale, oltre alla variabile indipendente x , compaiono la funzione stessa e le sue derivate.

Le funzioni $y = f(x)$ che soddisfano un'equazione differenziale costituiscono il suo **integrale generale**. Tali funzioni sono, di solito, in numero infinito; tuttavia, se sono note ulteriori informazioni sulla funzione f , per esempio il passaggio per un punto, si ottiene una sola funzione che costituisce un **integrale particolare** dell'equazione.

Un'equazione differenziale si dice poi:

- del **primo ordine** se ha la forma $F(x, y, y') = 0$, cioè se contiene al massimo la derivata prima della funzione; in questo caso l'integrale generale dipende da una sola costante
- del **secondo ordine** se ha la forma $F(x, y, y', y'') = 0$, cioè se contiene al massimo la derivata seconda della funzione; in questo caso l'integrale generale dipende da due costanti.

Le equazioni del primo ordine

Fra le equazioni differenziali del primo ordine abbiamo considerato quelle:

- **della forma $y' = f(x)$**

l'integrale generale è una primitiva della funzione $f(x)$: $y = \int f(x) dx + c$

- **a variabili separabili** riconducibili alla forma: $\frac{y'}{h(y)} = g(x)$

l'integrale generale si ottiene calcolando l'integrale dei due membri: $\int \frac{y'}{h(y)} dy = \int g(x) dx$

- **lineari omogenee** $y' + p(x)y = 0$

l'integrale generale è: $y = k \cdot e^{-\int p(x) dx}$

- **lineari non omogenee** $y' + p(x)y = q(x)$

l'integrale generale ha la forma: $y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \right]$

Le equazioni del secondo ordine

Fra le equazioni differenziali del secondo ordine abbiamo considerato quelle:

- **della forma $y'' = f(x)$**

l'integrale generale si ottiene integrando due volte la funzione

- **lineari omogenee a coefficienti costanti** $y'' + py' + qy = 0$

considerata l'equazione caratteristica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ e indicato con Δ il suo discriminante, si ha che:

– se $\Delta > 0$, indicate con λ_1 e λ_2 le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

– se $\Delta = 0$, indicata con λ_1 la soluzione dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è

$$y = e^{\lambda_1 x} (c_1 + c_2 x)$$

– se $\Delta < 0$, poste uguali a $\alpha \pm i\beta$ le soluzioni dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

• **lineari non omogenee a coefficienti costanti** $y'' + py' + qy = r(x)$

indicato con y_0 un integrale particolare dell'equazione e con y_1 l'integrale generale dell'equazione omogenea ad essa associata, l'integrale generale è $y = y_0 + y_1$

L'integrale y_0 dipende dalla forma di $r(x)$ e si ha che:

– se $r(x)$ è un polinomio di grado $n \rightarrow y_0$ è un polinomio che ha grado:

- n se $q \neq 0$
- $n + 1$ se $q = 0 \wedge p \neq 0$
- $n + 2$ se $q = 0 \wedge p = 0$

– se $r(x)$ è del tipo $s(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s(x)$ è un polinomio di grado n :

- $y_0 =$
- $t(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $t(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$
se α non è soluzione dell'equazione caratteristica associata
 - $x \cdot t(x) \cdot e^{\alpha x}$ con $t(x)$ polinomio dello stesso grado di $s(x)$
se α è soluzione dell'equazione caratteristica associata e questa ha soluzioni reali distinte
 - $x^2 t(x) e^{\alpha x}$
se α è soluzione dell'equazione caratteristica associata e questa ha soluzioni reali coincidenti

– se $r(x)$ è del tipo $h \sin \beta x + k \cos \beta x$:

- $y_0 =$
- $a \cos \beta x + b \sin \beta x$ se $i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica associata
 - $x(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ se $i\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica associata