

I primi elementi



Matematica in laboratorio

1. GEOGEBRA

Geogebra è un software di matematica dinamica prodotto da un gruppo diretto da Markus Hohenwarter in cui geometria e algebra condividono lo stesso ambiente di lavoro.

La versione base e tutti gli aggiornamenti sono del tutto gratuiti e si trovano sul sito

www.GeoGebra.org/cms/

Cliccando sulla voce *Download* nell'elenco sulla sinistra della pagina di apertura del sito si può scaricare il software agendo sul comando

GeoGebra WebStart

Viene così garantito l'utilizzo dell'ultima versione disponibile e si crea in modo automatico un'icona sul desktop per accedere al programma anche quando non si è connessi alla rete.

GeoGebra utilizza Java ed è quindi necessario che sul computer sia stato precedentemente installato questo programma; nella pagina di GeoGebra c'è comunque la possibilità di accedere al sito **www.java.com** per lo scaricamento gratuito.

Una volta che GeoGebra è stato installato, sul desktop compare l'icona



GeoGebra

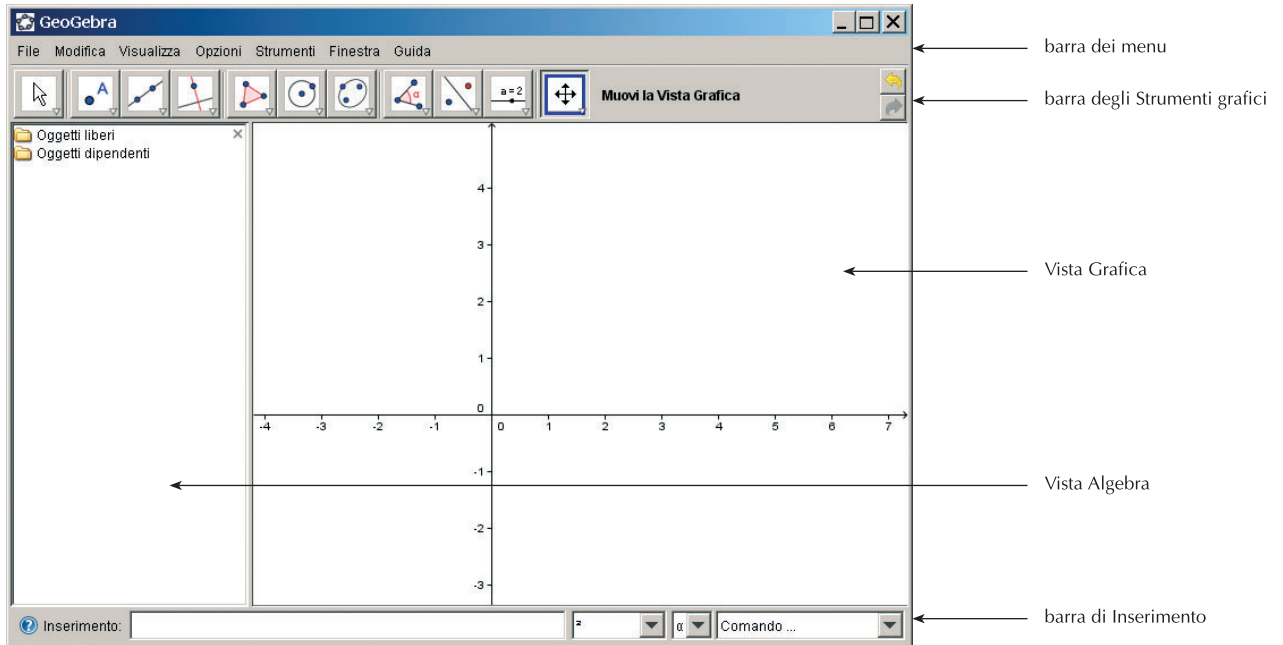
Con un doppio clic su di essa si accede alla pagina principale del programma (figura a pagina seguente).

In essa distinguiamo:

- la barra dei menu (File, Modifica, Visualizza, ecc)
- la barra degli Strumenti di Disegno rappresentati da undici icone, con i pulsanti Annulla e Ripristina sul lato destro
- la finestra di Algebra nella parte sinistra (Vista Algebra)
- la finestra di Geometria con un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nella parte destra (Vista Grafica)
- la barra di Inserimento nella parte inferiore della pagina.

Con GeoGebra si possono costruire punti, rette, segmenti, poligoni, cerchi e associare ad essi coordinate ed equazioni; viceversa, si possono inserire coordinate di punti ed equazioni di curve alle quali vengono associate le corrispondenti rappresentazioni geometriche in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Di uno stesso oggetto si ha in questo modo una *visualizzazione algebrica* e una *visualizzazione geometrica*. Le due finestre di Algebra e di Geometria sono collegate fra loro e ogni modifica che viene fatta in una delle due produce un effetto di aggiornamento sull'altra.



Ciascuna icona della barra degli strumenti di Disegno ha un piccolo triangolo nella parte inferiore di destra; cliccando su di esso si apre l'elenco degli strumenti di costruzione disponibili.

Nelle esercitazioni che faremo con GeoGebra, per indicare un comando selezionabile dalla riga dei menu, scriveremo il nome del menu e il comando separati da una barra; per esempio:

File/Nuovo

Per indicare un particolare strumento useremo la notazione che indica, nell'ordine, il numero progressivo di icona e lo strumento grafico separati da un trattino orizzontale; per esempio, riferendoci ancora alla figura precedente, scriveremo:

3-Segmento tra due punti

Per selezionare uno strumento basta cliccare su di esso; una volta fatta la scelta, a fianco della barra degli strumenti viene indicato il nome dello strumento e una breve guida su come si utilizza.

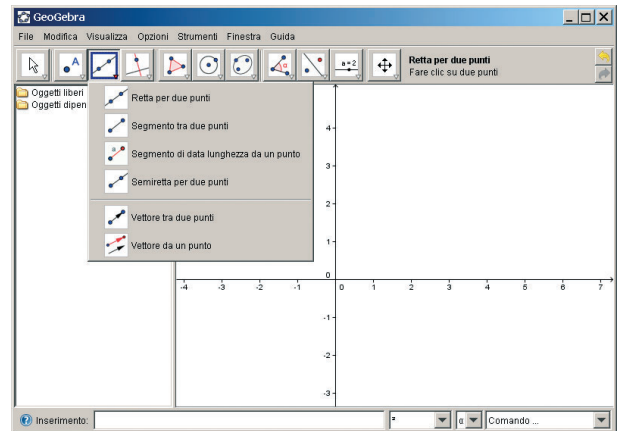
Il disegno che compare in ogni icona è inizialmente relativo al primo strumento della lista, ma viene aggiornato ad ogni scelta successiva ed è sempre riferito all'ultimo selezionato.

Nella finestra di disegno è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali che può essere mostrato o nascosto attraverso il menu *Visualizza*. Normalmente sono visualizzati solo gli assi cartesiani (c'è un segno di spunta sul comando), ma è anche possibile visualizzare la griglia (cliccare sul comando) in modo da valutare con più facilità le coordinate dei punti.

Tutti gli oggetti che vengono disegnati nella Vista Grafica hanno un nome identificato da un'etichetta; vengono usate lettere maiuscole dell'alfabeto per i punti, lettere minuscole per rette, segmenti e linee in genere, lettere greche per gli angoli, tutte in ordine progressivo. La visibilità delle etichette si può regolare con il comando

Opzioni/Etichettatura

scegliendo poi l'opzione desiderata.



Esercitazione 1. Punti, segmenti, rette

Rappresentiamo tre punti A , B , C nel foglio di disegno, quindi tracciamo:

1. il segmento AB
2. la retta AC
3. la semiretta BC di origine B .

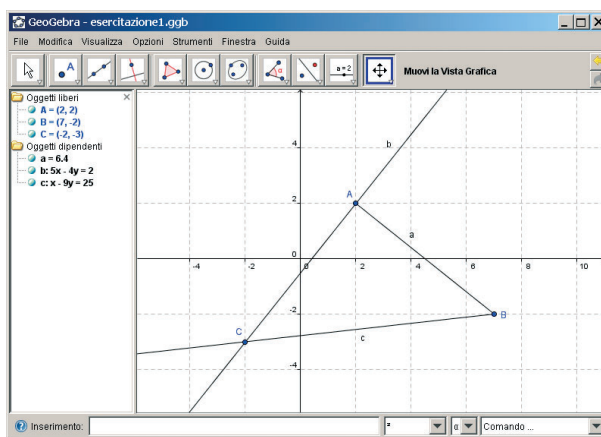
In questa esercitazione conveniamo che nella pagina video siano attive la Vista Grafica e la Vista Algebra. Per disegnare un punto si deve:

- selezionare lo strumento *2-Nuovo punto*;
- cliccare in un punto della finestra grafica.

Osserviamo che la posizione del mouse viene segnalata dalle coordinate cartesiane del punto su cui si trova in quel momento; tali coordinate non vengono più indicate quando si elimina il riferimento cartesiano dal menu **Visualizza**. Selezioniamo dunque i tre punti richiesti; ad essi viene dato il nome A , B , C .

Rispondiamo adesso alle richieste.

1. Dopo aver selezionato lo strumento *3-Segmento tra due punti*, clicchiamo su A e poi su B (o viceversa, l'ordine dei punti che rappresentano gli estremi del segmento non ha importanza); al segmento viene attribuito il nome di default a .
2. Con lo strumento *3-Retta per due punti*, clicchiamo su A e poi su C (anche in questo caso l'ordine dei punti non ha importanza); alla retta viene attribuito il nome b .
3. Con lo strumento *3-Semiretta per due punti*, clicchiamo prima su B e poi su C (questa volta l'ordine dei punti è importante e indica che B è l'origine della semiretta); alla semiretta viene dato nome c .



Osserviamo quello che contemporaneamente accade nella finestra di Algebra.

Gli oggetti disegnati sono distribuiti in due gruppi:

- gli **oggetti liberi**, nel nostro caso i tre punti A , B , C dei quali vengono indicate le coordinate;
- gli **oggetti dipendenti**, nel nostro caso il segmento AB , che viene indicato con a e del quale viene data la lunghezza, la retta AC (indicata con b) e la semiretta BC (indicata con c) delle quali viene data l'equazione.

Un oggetto è **libero** se non viene costruito in dipendenza da altri oggetti, è **dipendente** in caso contrario; i tre punti, che sono stati creati in modo arbitrario, sono quindi liberi, mentre gli altri oggetti sono dipendenti perché legati ad A , B , C .

Proviamo adesso a spostare i punti. Dopo aver selezionato lo strumento *1-Muovi*, sposta il mouse sul punto A ; il puntatore, che normalmente ha la forma di una croce, quando punta ad un oggetto si trasforma in una freccia. Per trascinare il punto in un'altra posizione, usa il tasto sinistro del mouse e, tenendolo premuto, sposta A nella nuova posizione. Durante lo spostamento le coordinate del punto nella finestra di Algebra vengono aggiornate alla posizione occupata dal punto in quell'istante e contemporaneamente cambiano anche la lunghezza di AB (segmento a) e l'equazione della retta AC (retta b), mentre non muta l'equazione di CB (retta c) che è rimasta fissa. Con la stessa procedura è possibile muovere segmenti e rette.

Osserviamo di nuovo la finestra di Algebra. Ciascun oggetto, libero o dipendente che sia, ha un cerchietto colorato alla sua sinistra; cliccando su di esso il cerchio diventa chiaro e l'oggetto viene nascosto nella vista grafica. Un nuovo clic del mouse lo rende di nuovo visibile.

Con questa procedura è possibile nascondere gli oggetti grafici; essi non vengono però cancellati. Per eliminare un oggetto si deve invece cliccare su di esso e usare il tasto CANC, oppure usare il comando **Modifica/Elimina**.

Se per errore si cancella un oggetto, si può usare il comando **Modifica/Ripristina** oppure usare i pulsanti con le due frecce all'estremità destra della barra degli strumenti di disegno:

- il pulsante **Annulla**, annulla l'ultima operazione fatta.
- il pulsante **Ripristina**, riesegue l'ultimo comando.

Si possono anche cancellare più oggetti in una sola volta: in modalità *1-Muovi*, riquadrare gli oggetti tenendo premuto il tasto sinistro del mouse e poi usare il tasto CANC.

Se vogliamo, possiamo salvare il file con il comando **File/Salva con nome**; l'estensione che caratterizza i file di GeoGebra è **.ggb**.

Esercitazione 2. Gli angoli

Per questa seconda esercitazione e per quelle successive, conveniamo di lavorare solo nella pagina grafica escludendo il sistema di riferimento cartesiano in modo da operare nel piano euclideo.

Dal menu **Visualizza** togliamo quindi il segno di spunto dalla voce **Assi** e chiudiamo anche la **Vista Algebra**.

Nel piano euclideo eseguiamo le seguenti costruzioni geometriche:

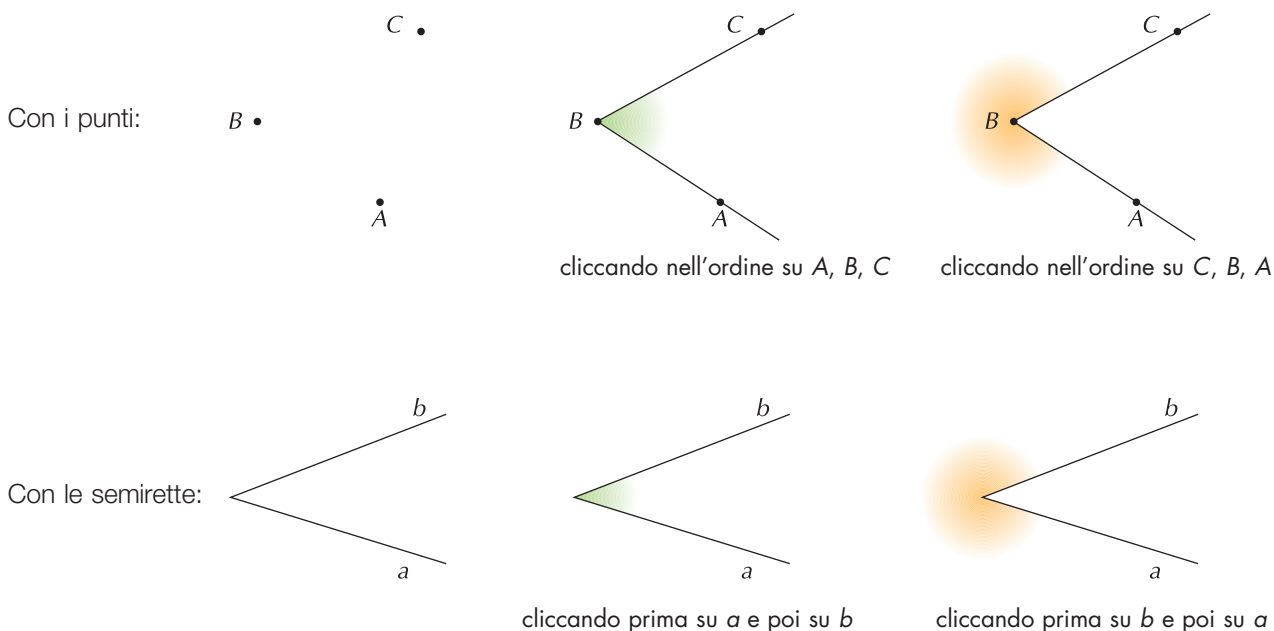
- 1 disegniamo un angolo acuto, un angolo ottuso e un angolo concavo
- 2 disegniamo due angoli opposti al vertice
- 3 tracciamo le bisettrici degli angoli al punto 2.

Punto 1

Per disegnare un angolo si usa lo strumento *8-Angolo*; la breve spiegazione a lato della barra degli strumenti indica che si deve cliccare su tre punti oppure su due rette.

Se si vuole definire l'angolo mediante tre punti, dei quali il secondo rappresenta il vertice, non è necessario che essi siano già presenti nel piano, si possono costruire nel mentre con un semplice clic del mouse nella posizione desiderata; se lo si vuole definire mediante due rette o semirette, queste devono invece essere già disegnate.

Per default gli angoli vengono creati con un orientamento antiorario, quindi per disegnare un angolo \widehat{ABC} che sia acuto oppure ottuso (entrambi sono angoli convessi) si deve prestare attenzione a come vengono posizionati i punti oppure le rette; le figure che seguono e qualche prova direttamente con il software possono chiarire i dubbi.



In questa esercitazione useremo i tre punti.

Per rendere più "visibili" gli angoli si possono poi tracciare i segmenti che uniscono il vertice con gli altri punti (in realtà dovremmo tracciare delle semirette, usiamo segmenti per evitare che i disegni si sovrappongano).

Le caratteristiche di un oggetto grafico possono essere modificate attraverso il **Menu contestuale** che si apre con un clic del tasto destro del mouse sull'oggetto.

Apriamo questo menu sul primo angolo disegnato.

La riga in alto è la descrizione dell'oggetto; le voci successive permettono di:

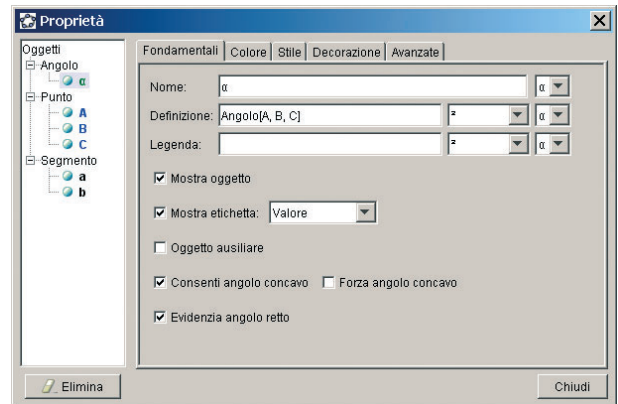
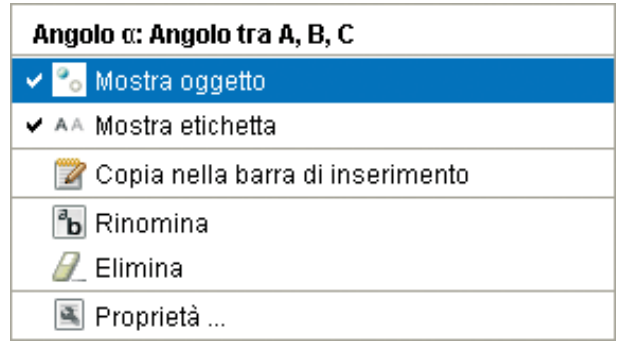
- mostrare o nascondere l'oggetto a seconda se è presente o meno il simbolo di spunta
- mostrare o nascondere l'etichetta
- copiare la definizione dell'oggetto nella Barra di Inserimento
- rinominare l'oggetto
- eliminarlo.

Cliccando sulla voce *Proprietà* è poi possibile definire le caratteristiche grafiche tramite le varie schede disponibili.

In particolare, togliendo il segno di spunta dalla voce *Consenti angolo concavo* della scheda *Fondamentali*, tutti gli angoli vengono disegnati convessi indipendentemente dall'ordine con cui vengono presi i punti. Usando le varie schede, cerca ora di modificare il colore con cui sono stati definiti gli angoli (scheda *Colore*), i segni con cui vengono rappresentati (scheda *Decorazione*), lo spessore delle linee e la gradazione del colore (scheda *Stile*).

Le lettere in corrispondenza dei punti o le misure degli angoli, che sono date in gradi, che non sono ben visibili (a volte si sovrappongono al disegno) possono essere poi trascinate con il mouse con lo strumento *1-Muovi*.

Al di sotto di ciascuna figura possiamo poi inserire un testo usando lo strumento *10-Inserisci testo*; dopo aver selezionato lo strumento, clicca nel punto della finestra grafica dove il testo deve essere inserito e digitalo nella finestra di dialogo che si apre; attraverso la finestra delle proprietà del Menu contestuale si possono poi modificare le caratteristiche del testo (nella figura alla pagina successiva abbiamo usato un colore rosso).



Punto 2

Per disegnare due angoli opposti al vertice occorre prima disegnare due rette che si intersecano. Successivamente:

- trovare il punto di intersezione con lo strumento *2-Intersezione di due oggetti* e cliccando prima su una retta e poi sull'altra (avvicinando il mouse a un oggetto grafico, questo appare più marcato)
- definire i quattro angoli usando la procedura descritta al punto 1.

Dalla figura ottenuta possiamo fare le seguenti osservazioni:

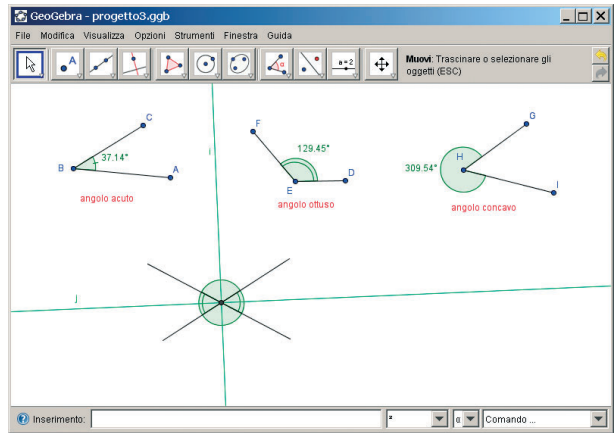
- i punti da noi scelti per definire gli angoli sono in colore blu perché sono oggetti liberi, il punto di intersezione, che è un oggetto dipendente, appare in colore nero;

- gli angoli opposti al vertice hanno la stessa misura, a conferma del teorema che afferma che angoli opposti al vertice sono congruenti.

A figura ultimata, usando il menu contestuale, conviene nascondere le ampiezze degli angoli e i punti blu deselegionando le voci *Mostra etichetta* sull'angolo e *Mostra Oggetto* sui punti.

Punto 3

Le bisettrici si costruiscono con lo strumento *4-Bisettrice*. E' sufficiente cliccare sulle due rette che sono servite per la costruzione degli angoli perché le due bisettrici vengano entrambe disegnate.



Gli strumenti definiti dall'utente e il trasporto dei segmenti

Il programma GeoGebra permette di costruire nuovi strumenti di disegno e di inserirli nella Barra degli strumenti in modo temporaneo oppure permanente.

Visto che capita frequentemente di dover trasportare segmenti, per esempio per eseguire confronti, somme o differenze, costruiamo uno strumento che esegua il **trasporto di un segmento su una retta**.

Per eseguire questa costruzione ci serviremo anche di una circonferenza; gli strumenti che riguardano le circonferenze si trovano nel gruppo 6 e sono i seguenti:

- *Circonferenza di dato centro*: disegna una circonferenza cliccando sul centro e su un altro punto che ne definisce il raggio
- *Circonferenza dati centro e raggio*: disegna una circonferenza cliccando sul centro e indicando la misura del raggio
- *Compasso*: disegna una circonferenza cliccando su un segmento che rappresenta il raggio (o sui punti suoi estremi) e sul centro
- *Circonferenza per tre punti*: disegna la circonferenza che passa per tre punti.

Noi utilizzeremo lo strumento *Compasso*.

Esercitazione 3. Lo strumento di trasporto dei segmenti

La procedura è la seguente:

- 1 disegniamo un segmento AB (il segmento da trasportare);
- 2 disegniamo una retta a (retta su cui deve essere trasportato il segmento);
- 3 mediante lo strumento *2-Nuovo punto*, individuiamo un punto C su a (primo estremo del segmento trasportato):
 - spostiamo il puntatore sulla retta (la retta appare di spessore ingrossato)
 - selezioniamo il punto e diamogli nome C (voce *Rinomina* dal Menu contestuale);
- 4 disegniamo la circonferenza di centro C e raggio AB :
 - attiviamo lo strumento *6-Compasso*
 - selezioniamo il segmento AB (è il raggio della circonferenza)
 - selezioniamo il punto C (è il centro della circonferenza);
- 5 mediante lo strumento *2-Intersezione di due oggetti*, troviamo i punti E e F di intersezione della circonferenza con la retta r ;
- 6 disegniamo il segmento CE oppure CF a seconda di come vogliamo orientare il segmento.

Abbiamo in questo modo costruito un segmento congruente ad AB .

Per creare lo strumento grafico che esegua in modo automatico il trasporto, utilizziamo il comando **Strumenti/Crea nuovo strumento**, che attiva una finestra di dialogo con le tre schede *Oggetti finali*, *Oggetti iniziali*, *Nome e icona*.

Compiliamo le schede:

■ *Oggetti finali*

Per inserire il segmento trasportato, supponiamo CE , facciamo clic sul triangolino che apre l'elenco degli oggetti e scegliamo il segmento CE e i suoi estremi.

■ *Oggetti iniziali*

Vengono già proposti alcuni oggetti; nel nostro caso dobbiamo accettare i punti A e B estremi del segmento dato, eliminiamo invece gli altri usando il tasto contrassegnato con il simbolo χ ; apriamo poi l'elenco degli oggetti e inseriamo, facendo clic su di essi, la retta a e il punto C su a . Questi saranno gli oggetti da usare nell'applicazione dello strumento.

■ *Nome e icona*

La casella *Nome strumento* rappresenta il nome che vogliamo dare allo strumento e che comparirà nella Barra degli strumenti.

La casella *Nome comando* indica invece il nome dato al comando che comparirà nell'elenco dei comandi posto a lato della riga di inserimento (non ci occupiamo per il momento di questi comandi).

Digitando "Trasporto di un segmento" nella prima casella, anche la seconda viene compilata con lo stesso nome (volendo può essere variato).

Nella casella *Guida rapida strumento* possiamo dare indicazioni su come deve essere usato lo strumento; tali indicazioni sono quelle che compariranno nella riga in alto dello schermo, a lato della Barra degli strumenti. Scriviamo quindi: "Fare clic sui punti estremi del segmento dato, sulla retta e sul primo estremo del nuovo segmento".

Nella stessa finestra è possibile scegliere l'immagine dell'icona che comparirà nella Barra degli strumenti; si può accettare quella proposta oppure scegliere un'immagine presente nel disco del computer (eventualmente una creata con GeoGebra).

Dopo aver controllato di aver inserito correttamente tutti gli oggetti, facciamo clic sul pulsante *Fine*. Se le operazioni sono state eseguite correttamente, la finestra di informazione ci avverte che lo strumento è stato creato correttamente e l'icona scelta è visibile nella Barra degli strumenti.

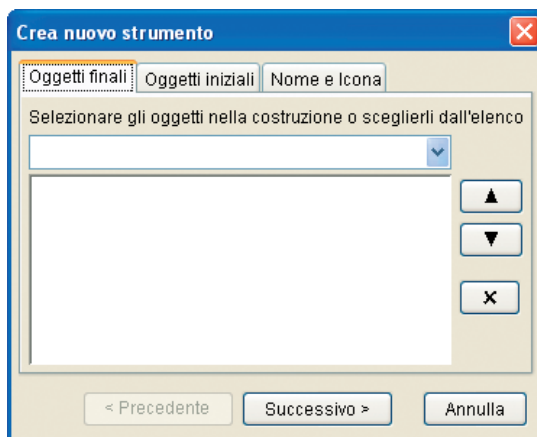
Il nuovo strumento è ora utilizzabile nella sessione di lavoro corrente come qualunque altro predefinito di GeoGebra; esso è ancora accessibile se si apre una nuova finestra grafica con il comando **File/Nuovo**, ma non è più disponibile se si usa il comando **File/Nuova finestra** oppure se, dopo aver chiuso il programma, si apre una nuova sessione di lavoro.

Per poter utilizzare un nuovo strumento in altre costruzioni è necessario salvarlo come file:

- attiviamo il comando **Strumenti/Organizza strumenti**
- diamo allo strumento il nome "*Trasporto di un segmento*"
- facciamo clic sul pulsante *Salva con nome*
- diamo al file il nome "*Trasporto_segmento*" e salviamolo (conviene creare una cartella degli strumenti di GeoGebra).

I nuovi strumenti vengono salvati con estensione **.ggt**, per distinguerli dai file propri di GeoGebra che, come già detto, hanno invece estensione **.ggb**.

A questo punto lo strumento, dopo averlo eventualmente caricato con il comando **File/Apri**, è disponibile per qualunque applicazione.



ESERCIZI

1. Disegna due segmenti consecutivi e due segmenti adiacenti.
 2. Disegna un segmento AB e trova il suo punto medio indicandolo con M ; trova poi i punti medi dei segmenti AM e MB e indicali rispettivamente con P e Q . Verifica che i quattro segmenti che si ottengono sono congruenti.
 3. Disegna quattro punti A, B, C, D non allineati e traccia:
 - a. da A e da C le rette parallele a BD ;
 - b. da B e da D due rette incidenti alle due parallele a BD ;
 - c. trova i punti di intersezione di tutte le rette disegnate.
 4. Disegna tre segmenti $AB, BC,$ e CD che siano adiacenti e congruenti; trova il punto medio M del segmento AD e verifica che è anche punto medio di BC .
 5. Disegna due angoli consecutivi e definisci poi l'angolo somma.
 6. Disegna due angoli adiacenti; traccia le loro bisettrici e verifica che sono perpendicolari.
 7. Disegna due angoli opposti al vertice e verifica che sono congruenti.
 8. Disegna due segmenti e, utilizzando lo strumento di trasporto dei segmenti, costruisci la loro somma e la loro differenza.
 9. Disegna un segmento AB e una retta r ; prendi un punto C su r e costruisci il segmento $CD \cong 4AB$.
 10. A differenza di Cabri, Geogebra non ha uno strumento per il trasporto degli angoli; creane uno che permetta il trasporto di un angolo (in senso antiorario) quando è assegnato un lato.
 11. Disegna due angoli e, utilizzando lo strumento di trasporto di un angolo, costruisci l'angolo somma e l'angolo differenza.
 12. Dato un angolo α , costruisci un angolo di ampiezza 2α avente un lato su una semiretta assegnata.
-