Le isometrie nel piano

Matematica in laboratorio

1. Isometrie con GeoGebra

Gli strumenti per eseguire trasformazioni geometriche si trovano nella nona icona. Nelle esercitazioni che seguono cercheremo di riconoscere le principali proprietà delle isometrie, con particolare riguardo alle simmetrie assiali.

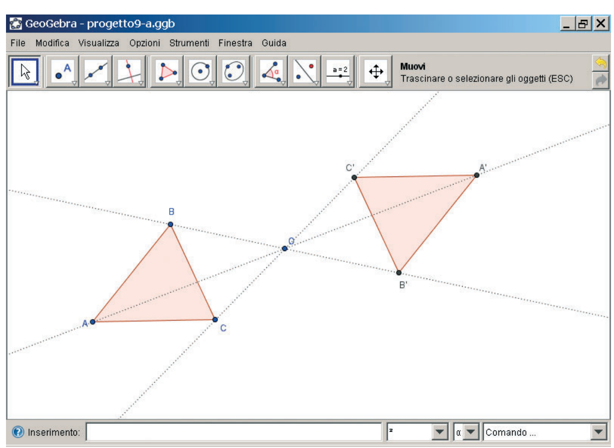
Esercitazione 1. **Simmetrie, traslazioni e rotazioni**

Disegniamo un triangolo ABC nel piano euclideo e troviamo:

1. il suo simmetrico rispetto a un punto O del piano;
2. il suo simmetrico rispetto a una retta a che assumiamo come asse di simmetria;
3. il suo corrispondente nella traslazione di un vettore $\vec{v}$ assegnato;
4. il suo corrispondente in una rotazione di ampiezza α attorno a un punto P.

Punto 1. Simmetria centrale

Disegniamo un triangolo ABC e un punto O; mediante il Menu contestuale visualizziamo poi le lettere in corrispondenza dei vertici.
Per costruire il triangolo simmetrico di ABC rispetto ad O usiamo lo strumento *9-Simmetrico rispetto a un punto*; la breve guida a lato della barra degli strumenti grafici ci dice che dobbiamo cliccare prima sull'oggetto da trasformare, nel nostro caso il triangolo ABC, e poi sul centro di simmetria, nel nostro caso il punto O.
Subito viene disegnato il triangolo $A'B'C'$; notiamo che i punti che si corrispondono vengono indicati con la stessa lettera munita di un apice.
Per meglio evidenziare la procedura di costruzione, tracciamo le rette che passano per i punti simmetrici: tali rette evidentemente passano tutte per O (in figura abbiamo modificato lo stile del tratto scegliendo la rappresentazione a puntini).
Scegliendo adesso un punto qualsiasi sul lato AB e troviamo il suo simmetrico rispetto ad O; dal menu contestuale di questi due punti spuntiamo la voce **Traccia attiva**. Se adesso facciamo scorrere il primo punto su AB, anche il suo simmetrico scorre su $A'B'$ e delle successive posizioni dei due punti rimane traccia sul foglio di lavoro.
Evidenziamo adesso gli angoli dei due triangoli con lo strumento *8-Angolo*, cliccando prima su un triangolo e



poi sull'altro (degli angoli viene indicata anche la misura in gradi e da essa possiamo già anticipare la congruenza degli angoli corrispondenti).
Individuiamo le proprietà di questa trasformazione usando il comando *10-relazione tra due oggetti*:

- cliccando su una coppia di angoli corrispondenti, per esempio su quelli di vertici A e A' ci viene comunicato che i due angoli sono uguali (non viene usato in GeoGebra il termine "congruenti");
- cliccando su una coppia di segmenti corrispondenti, per esempio su AB e $A'B'$ ci viene comunicato che i due segmenti hanno la stessa lunghezza (nella versione attuale viene detto che i due segmenti non sono uguali ma che hanno la stessa lunghezza, versioni successive potrebbero aver corretto questo errore);
- cliccando sui due triangoli, ci viene comunicato che sono uguali.

In modo del tutto analogo si deve procedere per soddisfare alle altre richieste; diamo solo alcuni cenni sui passi da seguire, ricordando che si deve poi mostrare, tracciando opportuni segmenti, la procedura di costruzione.

Punto 2. Simmetria rispetto a una retta *a*

- Si disegna la retta a asse di simmetria.
- Si attiva lo strumento *9-Simmetrico rispetto a una retta* e si clicca prima sul triangolo ABC e poi sulla retta a.

Punto 3. Traslazione di vettore $\vec{v}$

- Si disegna un vettore con lo strumento *3-Vettore tra due punti*.
- Si attiva lo strumento *9-Trasla di un vettore* e si clicca prima sul triangolo ABC e poi sul vettore.

Punto 4. Rotazione di ampiezza α attorno a un punto *P*

- Si attiva lo strumento *9-Ruota intorno a un punto di un angolo*.
- Si clicca sul triangolo ABC e poi sul punto P centro della rotazione.
- Nella finestra di dialogo che si apre, si indica l'ampiezza dell'angolo e si sceglie il verso di rotazione orario oppure antiorario.

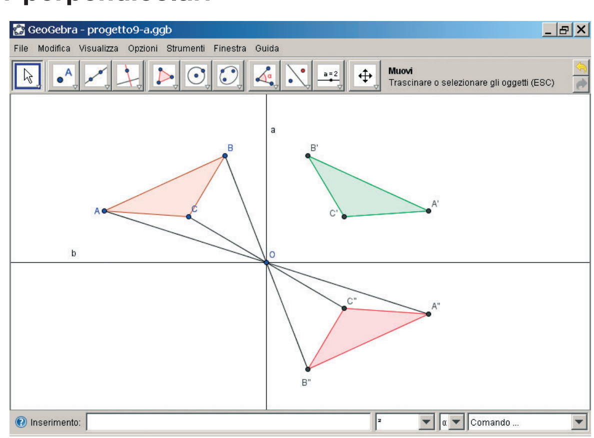
Esercitazione 2. Prodotto di isometrie

Dopo aver disegnato un triangolo ABC studiamo a che cosa equivale il prodotto di:

1. due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari
2. due simmetrie assiali con gli assi paralleli
3. due simmetrie assiali con gli assi fra loro incidenti in modo qualsiasi
4. due simmetrie centrali.

Punto 1. Prodotto di simmetrie assiali con gli assi perpendicolari

Disegnato il triangolo ABC e due rette a e b tra loro perpendicolari che si intersecano in O, troviamo il simmetrico di ABC rispetto alla retta a; successivamente il simmetrico del triangolo $A'B'C'$ ottenuto rispetto alla retta b. Tracciamo adesso i segmenti che uniscono i punti A e A'', B e B'', C e C''; tutti questi segmenti passano per O che è anche il loro punto medio (si può verificare con lo strumento *2-Punto medio*). I due triangoli ABC e $A''B''C''$ sono quindi simmetrici rispetto al punto O.
Questo conferma che: **il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari equivale ad una simmetria centrale avente centro nel punto di intersezione degli assi.**



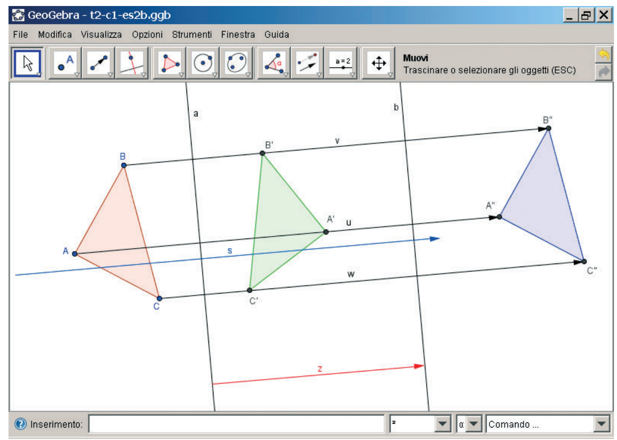
Punto 2. Prodotto di simmetrie assiali con gli assi paralleli

In una nuova finestra grafica disegniamo un altro triangolo *ABC* e due rette *a* e *b* tra loro parallele; troviamo poi il triangolo simmetrico di *ABC* rispetto ad *a* e poi il simmetrico di quest'ultimo rispetto a *b*.
Tracciamo ora i vettori che congiungono i punti omologhi *A* e *A″*, *B* e *B″*, *C* e *C″*. Usiamo lo strumento *10-Relazione tra due oggetti* e clicchiamo prima sul vettore *AA″* e poi su *BB″*; la finestra di dialogo che si apre ci comunica che i due vettori sono uguali. La stessa cosa capita quando clicchiamo su *BB″* e poi su *CC″*.
Possiamo allora concludere che *ABC* e *A″B″C″* si corrispondono in una traslazione di vettore *AA″*.
Per comprendere se esiste una relazione fra questo vettore e i due assi di simmetria, tracciamo il vettore che esprime la distanza tra le due rette parallele:

- da un punto di *a* tracciamo la perpendicolare ad *a* e determiniamo il punto di intersezione con *b*
- tracciamo il vettore $\vec{z}$ che unisce questi due punti con verso dalla retta *a* alla retta *b*.

Costruiamo adesso un vettore $\vec{s}$ che sia uguale al doppio del vettore $\vec{z}$:

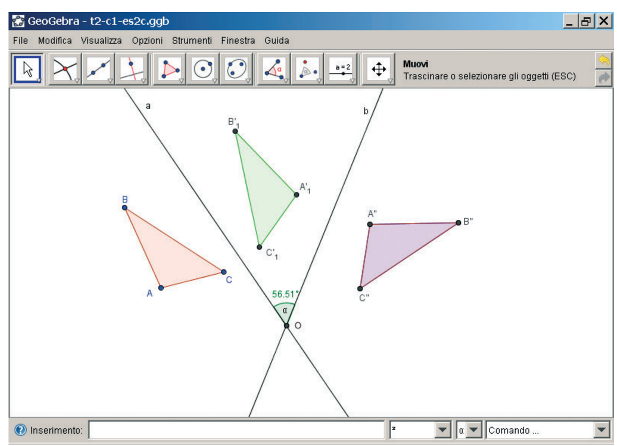
- nella barra di inserimento scriviamo $s = 2 * z$
- confermiamo con INVIO.



Nella Vista Grafica viene visualizzato il vettore $\vec{s}$.
Usando lo strumento *10-Relazione tra due oggetti* confrontiamo il vettore $\vec{s}$ con uno qualunque dei vettori *AA″*, *BB″*, *CC″*: i due vettori sono uguali.
Dunque:
il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli equivale ad una traslazione di vettore perpendicolare agli assi e di modulo doppio della loro distanza.

Punto 3. Prodotto di simmetrie assiali con gli assi fra loro incidenti in modo qualsiasi

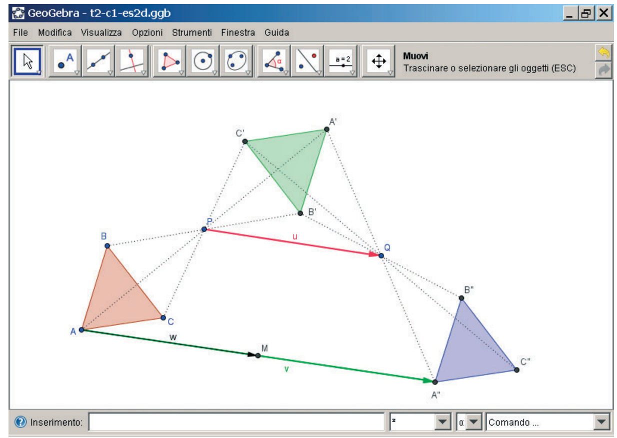
Disegniamo due rette *a* e *b* incidenti in un punto *O* ma non perpendicolari ed eseguiamo le due simmetrie, prima rispetto alla retta *a* e poi alla retta *b*.
Definiamo adesso l'angolo α fra le due rette (orientato da *a* verso *b*) ed eseguiamo una rotazione del triangolo *ABC* attorno ad *O* di ampiezza pari a 2α (il verso di rotazione è orario oppure antiorario a seconda di come si sono scelte le rette *a* e *b*; nella figura il verso è orario).
Nella rotazione il triangolo *ABC* corrisponde di nuovo al triangolo *A″B″C″*.
Abbiamo così verificato che:
il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi incidenti in *O* e che formano un angolo di ampiezza α è equivalente a una rotazione di ampiezza 2α e centro *O*.



Punto 4. Prodotto di simmetrie centrali

Dopo aver di nuovo costruito un triangolo *ABC*, fissiamo due punti *P* e *Q* che rappresentano i centri delle due simmetrie. Costruiamo il simmetrico di *ABC* rispetto al punto *P* e poi il simmetrico di quest'ultimo rispetto al punto *Q*.
Per evidenziare le due simmetrie tracciamo anche i segmenti che uniscono i punti omologhi dei triangoli che si corrispondono e, per evitare possibili confusioni, usiamo il Menu contestuale per modificare lo stile del tratto (nella figura che segue abbiamo scelto la linea a puntini).

Per capire in quale trasformazione si corrispondono il triangolo ABC e il triangolo $A''B''C''$, usando lo strumento *3-Vettore tra due punti*, tracciamo il vettore $\overrightarrow{PQ}$ e il vettore $\overrightarrow{AA''}$ (nella figura abbiamo modificato lo stile attraverso il Menu contestuale e li abbiamo evidenziati rispettivamente in rosso e in verde con un tratto di spessore più marcato).
Troviamo poi il punto medio M del segmento AA'' e definiamo il vettore $\overrightarrow{AM}$.
Mediante lo strumento *10-relazione tra due oggetti* verifichiamo che i due vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{AM}$ sono uguali.
Abbiamo così verificato che:
il prodotto di due simmetrie centrali equivale a una traslazione di vettore doppio della distanza tra i due centri.



ESERCIZI

1. Verifica che il prodotto di due rotazioni di centro O rispettivamente di ampiezza α e β equivale a una rotazione dello stesso centro e ampiezza $\alpha + \beta$.

2. Disegna un qualunque triangolo ABC e costruisci il suo simmetrico rispetto alla retta del lato AC; indicato con B' il corrispondente del vertice B, costruisci il simmetrico del triangolo ottenuto rispetto alla retta del lato $B'C$. Individua:
a. gli elementi uniti nella prima e nella seconda simmetria
b. in quale trasformazione si corrispondono il primo ed il terzo triangolo.

3. Verifica che la simmetria assiale è una trasformazione involutoria, mentre la rotazione non lo è.

4. Disegna un triangolo e due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$; applica al triangolo la traslazione di vettore $\vec{v}$ e, al suo trasformato, la traslazione di vettore $\vec{w}$. Verifica che il prodotto delle due traslazioni equivale a una traslazione che ha come vettore $\vec{v} + \vec{w}$.

6. Disegna un triangolo ABC isoscele sulla base BC e traccia la retta dell'altezza AH; individua il suo corrispondente nella simmetria avente per asse AH. Quali osservazioni puoi fare? Ci sono punti e rette unite?

8. Disegna un triangolo ABC e applica ad esso la simmetria avente per asse la retta di AB; al triangolo ottenuto applica la simmetria avente per asse la retta di BC. Individua la trasformazione nella quale si corrispondono ABC e l'ultimo triangolo ottenuto.

9. Disegna due segmenti congruenti e paralleli AB e CD e individua le simmetrie nelle quali essi si corrispondono.