Le serie numeriche

Le definizioni

Consideriamo la successione di numeri reali $a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad ....., \quad a_n, \quad ....$
e costruiamo un'altra successione i cui termini s_n sono le somme degli a_i fino all'n-esimo:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \end{aligned}$$

Ciascun elemento s_n di questa nuova successione si può indicare sinteticamente con: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Immaginiamo adesso di sommare tutti i termini della successione $\{a_n\}$, cioè che n tenda a $+\infty$; diamo la seguente definizione.

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, chiamiamo **serie numerica** la somma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

I termini $a_0, a_1, a_2, ...a_n, ...$ rappresentano i **termini della serie**.

I valori $s_0, s_1, s_2, ...s_n, ...$ sono le **somme parziali** o **ridotte** della serie.

I esempio

Consideriamo la successione il cui termine generale è $a_n = \dfrac{7}{10^n}$; la serie ad essa associata è $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{7}{10^k}$ e la successione delle sue somme parziali è:

$$s_0 = \frac{7}{10^0} = 7$$

$$s_1 = 7 + \frac{7}{10^1} = 7 + \frac{7}{10} = 7{,}7$$

$$s_2 = 7 + \frac{7}{10^1} + \frac{7}{10^2} = 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} = 7{,}77$$

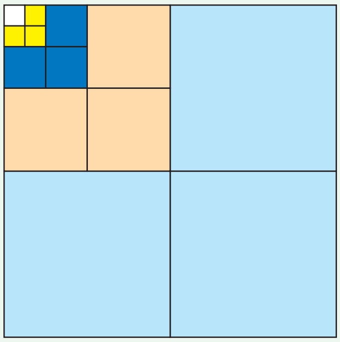
$$s_3 = 7 + \frac{7}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} = 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} = 7{,}777$$

e così via.
È facile intuire che questa serie dà origine al numero periodico $7{,}\overline{7}$.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

II esempio

Consideriamo un quadrato di lato 1 e dividiamolo in quattro quadrati uguali mediante i punti medi dei suoi lati; dividiamo poi uno di essi in altri quattro quadrati uguali e così via come in figura.



L'area del quadrato, che vale 1, può essere vista come la somma delle aree dei seguenti quadrati:

3 azzurri + 3 arancio + 3 blu + 3 gialli + ...

Ciascun quadrato azzurro ha lato $\frac{1}{2}$, ciascun quadrato arancio ha lato $\frac{1}{4}$, ciascun quadrato blu ha lato $\frac{1}{8}$, ciascun quadrato giallo ha lato $\frac{1}{16}$ e così via; l'area del quadrato è quindi data dalla somma

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{8}\right)^2+3\left(\frac{1}{16}\right)^2+........3\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+.....=3\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2=3\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}$$

Poiché l'area del quadrato è 1, possiamo dire che:

$$3\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}=1 \qquad \text{cioè} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{3}$$

Il carattere di una serie

I problemi che hanno a che vedere con le serie riguardano la loro valutazione; in particolare, dobbiamo cercare di dare una risposta alle seguenti domande:

- una somma di infiniti termini ha sempre un valore finito oppure no?
- se ha un valore finito, come è possibile calcolarlo?

Nei due precedenti esempi siamo stati in grado di dire che le due serie avevano somma finita e siamo anche stati in grado di individuare il valore della serie; ma questo è possibile sempre?
Per dare una risposta a queste domande dobbiamo studiare il comportamento del termine s_n quando $n \to +\infty$.
I casi che si possono presentare sono i seguenti:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = L$ con L valore finito

Diciamo in questo caso che la serie è **convergente** ed ha per somma L.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$

Diciamo allora che la serie è **divergente** rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ non esiste

Diciamo che la serie è **indeterminata** o anche **oscillante**.

Di una successione che converge oppure diverge diciamo anche che è **regolare**.
Una condizione necessaria per la convergenza di una serie è espressa dal seguente teorema.

Teorema. Data la successione $\{a_n\}$, affinché la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ converga è necessario che sia:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Sottolineiamo che il tendere a zero del termine generale della successione che dà origine alla serie è una condizione necessaria per la convergenza, ma non sufficiente; in altre parole:

- se a_n non tende a zero, la serie non converge
- se a_n tende a zero, non è però garantita la convergenza anche se questa è possibile.

I esempio

Le due serie dei precedenti esempi sono entrambe convergenti: la prima, in cui $a_n = \frac{7}{10^n}$ ed è $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{10^n} = 0$, ha per somma $7,\overline{7}$, la seconda, in cui $a_n = \frac{1}{2^{2n}}$ ed è $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 0$, ha per somma $\frac{1}{3}$.

II esempio

La serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k$ è generata dai termini della successione il cui termine generale è 2^n ed ha come somma parziale

$$s_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$$

Poiché: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ la serie diverge a $+\infty$.

III esempio

La serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^n$ ha come somma parziale: $s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...(-1)^n$

Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ non esiste, la serie né converge, né diverge ed è irregolare.

Casi particolari

Stabilire se una serie converge e in questo caso qual è la sua somma non è, in generale, una cosa immediata. Ci sono tuttavia alcune situazioni in cui è possibile dare una risposta in modo semplice.

Chiamiamo **serie geometrica** di ragione q, con $q \in R$, la serie: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$

Poiché sappiamo lavorare con le progressioni geometriche è facile trovare l'espressione delle somme parziali s_n:

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \text{con } q \neq 1$$

Per stabilire il carattere della serie analizziamo il limite di s_n. Si possono presentare i seguenti casi:

- $|q| < 1$ cioè $-1 < q < 1$

  poiché $q^n \to 0$ se $n \to +\infty$, si ha che: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$

  La successione è quindi convergente ed ha somma $S = \frac{1}{1 - q}$

- $|q| > 1$ cioè $q < -1 \vee q > 1$

  questa volta $q^n \to \infty$ e perciò: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \infty$

  La serie è divergente.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

- $|q| = 1$ cioè $q = \pm 1$

  Se $q = 1$ abbiamo una somma costituita da infiniti termini uguali a 1: la serie diverge.

  Se $q = -1$ abbiamo una somma costituita da infiniti termini uguali a 1 e infiniti termini uguali a -1 che si alternano: la serie né converge, né diverge ed è irregolare.

Riassumendo:

una serie geometrica di ragione q:

- converge se $|q| < 1$ ed ha somma $S = \dfrac{1}{1-q}$;
- diverge se $|q| > 1$ e se $q = 1$;
- è irregolare se $q = -1$.

I esempio

La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge perché $q = \dfrac{1}{2}$ ed è: $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$.

II esempio

La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^k$ diverge a $+\infty$ perché $q = \dfrac{5}{3}$.

Un'altra serie di semplice interpretazione è la seguente.

Consideriamo una successione $\{b_n\}$ e sia: $a_n = b_n - b_{n-1}$ (o anche, a seconda della convenienza, $a_n = b_{n+1} - b_n$)

La successione $\{a_n\}$ che si viene a generare è definita quindi dalla differenza di due termini consecutivi della successione $\{b_n\}$.

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ in cui ogni termine può essere visto come la differenza tra due termini consecutivi di un'altra successione viene detta **serie telescopica**.

In questo caso le somme parziali s_n sono date da:

$$s_n = b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + \dots\dots\dots + b_2 - b_1 + b_1 - b_0 = b_n - b_0$$

Il calcolo della serie si riduce quindi alla valutazione del limite della successione $\{b_n\}$ per $n \to +\infty$.
Si dimostra che vale il seguente teorema.

Una serie telescopica:

- converge se e solo se: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

  In tal caso: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \ell - b_0$
- diverge se: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$
- è oscillante se: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$ non esiste.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

I esempio

Se $b_n = \ln n$ allora $a_n = \ln n - \ln(n-1)$ cioè $a_n = \ln \dfrac{n}{n-1}$.

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \dfrac{k}{k-1}$ è una serie telescopica.

Inoltre, poiché: $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ la serie diverge a $+\infty$.

II esempio

Consideriamo la serie: $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2+3k+2}$.

Il suo termine generale può essere scritto come differenza di due frazioni in questo modo:

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} - \frac{B}{k+2} = \frac{k(A-B)+2A-B}{(k+1)(k+2)}$$

Affinché sussista l'uguaglianza deve quindi essere: $\begin{cases} A-B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$

perciò: $\dfrac{1}{k^2+3k+2} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$.

Possiamo considerare la successione $\{b_n\}$ il cui termine generale è $b_n = -\dfrac{1}{n}$ definita per $n \geq 1$.

In questo modo: $b_{n+2} = -\dfrac{1}{n+2}$ $\quad b_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}$

e si ha che: $\dfrac{1}{k^2+3k+2} = b_{n+2} - b_{n+1} = \left(-\dfrac{1}{k+2}\right) - \left(-\dfrac{1}{k+1}\right)$

Poiché: $\lim_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ ed è: $b_1 = -1$

la serie converge ed è: $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2+3k+2} = 0 - (-1) = 1$.

Esercizi

Le definizioni

Scrivi i primi cinque termini delle seguenti serie numeriche.

1 $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$

2 $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2k}{k+1}$

3 $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k}{3^k}$

4 $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k+1}{k^2+1}$

5 $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2+k}$

6 $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sqrt{k}+k\right)$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Serie geometriche

Determina il carattere delle seguenti serie geometriche calcolandone la somma nel caso in cui sono convergenti.

7 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ **8** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\left[S=\frac{7}{6};\ S=2\right]$

9 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ **10** $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ $\left[S=\frac{5}{2};\ S=\frac{1}{30}\right]$

11 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ **12** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^n$ [diverge; diverge]

13 $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}$ **14** $\sum_{n=0}^{+\infty}3^n$ $[S=2;$ diverge$]$

15 $\sum_{n=0}^{+\infty}3^{-n}$ **16** $\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}$ $\left[S=\frac{3}{2};\ S=\frac{e}{e-1}\right]$

17 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^{-n}$ **18** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ $\left[S=\frac{2}{3};\ S=\frac{5}{4}\right]$

Determina per quali valori reali di x le seguenti serie geometriche sono convergenti.

19 $\sum_{n=0}^{+\infty}(5x)^n$ **20** $\sum_{n=0}^{+\infty}(2x+1)^n$ $\left[-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5};\ -1<x<0\right]$

21 $\sum_{n=0}^{+\infty}(3-2x)^n$ **22** $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n$ $[1<x<2;\ x>1]$

23 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{2x-1}\right)^n$ **24** $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^n$ $[x<-2,\ x>3;\ -1<x<0]$

25 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sin x)^n$ **26** $\sum_{n=0}^{+\infty}e^{3nx}$ $\left[x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z;\ x<0\right]$

27 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\ln x-1)^n$ **28** $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^n$ $\left[1<x<e^2;\ x<-4\ \vee\ x>-\frac{2}{3}\right]$

29 $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{2x}-1}\right)^n$ **30** $\sum_{n=0}^{+\infty}(2^{x-1}-3)^n$ $\left[x>\frac{\ln 2}{2};\ 2<x<3\ \wedge\ x\neq\frac{\ln 6}{\ln 2}\right]$

Serie telescopiche

Studia il carattere delle seguenti serie telescopiche e, per quelle convergenti, determina la somma.

31 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$ [convergente; $S=-1$]

32 $\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(k+1)^2-k^2\right]$ [divergente]

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

33 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{k+1}{k+2}-\frac{k}{k+1}\right)$ [convergente; $S=1$]

34 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$ [divergente]

35 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2+k}$ [convergente; $S=1$]

36 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^2+5k+6}$ $\left[\text{convergente; } S=\frac{1}{2}\right]$

37 $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3k^2+15k+18}$ $\left[\text{convergente; } S=\frac{1}{6}\right]$

38 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ [convergente; $S=1$]

© Istituto Italiano Edizioni Atlas