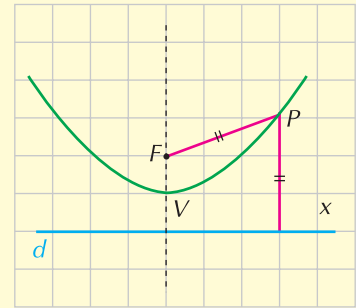


## LA PARABOLA

### Rivedi la teoria

#### La parabola e la sua equazione

La parabola è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto fisso chiamato *fuoco* e da una retta fissa chiamata *direttrice*. Il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta che passa per il fuoco ed è perpendicolare alla direttrice; il punto di intersezione della parabola con il suo asse di simmetria si chiama *vertice*.



#### Equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

L'equazione canonica di questa parabola è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

con  $a, b, c$  coefficienti reali e  $a \neq 0$ . Essa ha:

- vertice nel punto  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- fuoco nel punto  $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
- per asse di simmetria la retta di equazione  $x = -\frac{b}{2a}$
- per direttrice la retta di equazione  $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

essendo  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Inoltre:

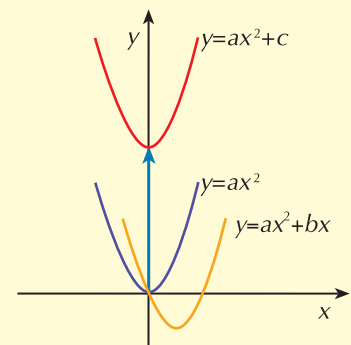
- se  $a > 0$  la parabola è concava verso l'alto
- se  $a < 0$  la parabola è concava verso il basso.

Nel caso particolare in cui il vertice si trovi nell'origine, la parabola assume la forma:  $y = ax^2$ .

#### Casi particolari

In corrispondenza di determinati valori dei coefficienti  $b$  e  $c$  dell'equazione si evidenziano posizioni particolari della parabola nel piano cartesiano:

- se  $c = 0$  l'equazione assume la forma  $y = ax^2 + bx$ .  
La parabola passa per l'origine (infatti le coordinate dell'origine, entrambe nulle, soddisfano la sua equazione).
- se  $b = 0$  l'equazione assume la forma  $y = ax^2 + c$ .  
L'ascissa del vertice è zero, perciò esso appartiene all'asse delle ordinate.
- se  $b = c = 0$  la parabola assume la forma che già conosciamo  $y = ax^2$ .



## ESERCIZIO GUIDA

Date le seguenti parabole, troviamo le coordinate del vertice e del fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice; costruiamone poi il grafico.

a.  $y = \frac{3}{2}x^2$                       b.  $y = x^2 - 4x + 3$

a. La parabola ha vertice nell'origine ed è  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = c = 0$ ; essendo  $a > 0$ , la parabola è concava verso l'alto.

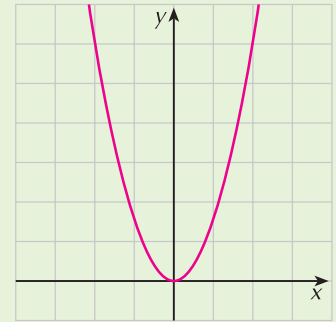
Per rispondere alle altre richieste calcoliamo prima di tutto il valore di  $\Delta$  :

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$$

Il fuoco ha coordinate:  $F\left(0, \frac{1-0}{4 \cdot \frac{3}{2}}\right) \rightarrow F\left(0, \frac{1}{6}\right)$

L'asse di simmetria è l'asse  $y$ .

La direttrice ha equazione:  $y = -\frac{1+0}{4 \cdot \frac{3}{2}} \rightarrow y = -\frac{1}{6}$



Per costruire il grafico, oltre al vertice, è necessario conoscere le coordinate di qualche altro punto; attribuiamo ad  $x$  valori che si trovano tutti alla destra del vertice e consideriamo poi i loro simmetrici:

• se  $x = 1$   $y = \frac{3}{2} \rightarrow \left(1, \frac{3}{2}\right)$                       • se  $x = 2$   $y = 6 \rightarrow (2, 6)$

I loro simmetrici rispetto all'asse della parabola sono i punti  $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$  e  $(-2, 6)$ .

Il grafico è in figura.

b. In questo caso è  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 3$ ; la parabola è concava verso l'alto ed è  $\Delta = 16 - 12 = 4$ .

Vertice:  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$        $y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1 \rightarrow V(2, -1)$

Fuoco:  $x = 2$                        $y = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-4}{4 \cdot 1} = -\frac{3}{4} \rightarrow F\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

Asse:  $x = 2$

Direttrice:  $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+4}{4 \cdot 1} \rightarrow y = -\frac{5}{4}$

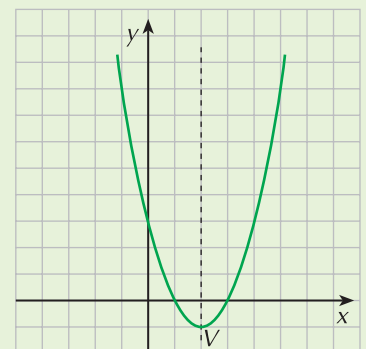
Per trovare l'ordinata del vertice, si può applicare la formula oppure sostituire il valore calcolato dell'ascissa nell'equazione della parabola:

$x_v = 2$                        $y_v = 4 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

Per tracciare il grafico di questa parabola è sufficiente disegnare il vertice, l'asse di simmetria e trovare le coordinate di qualche punto; completa la tabella:

$x$	0	1	-1
$y$	...	...	...

e trova i punti simmetrici rispetto all'asse della parabola. Il grafico è nella figura a lato.



## PROVA TU

Trova vertice, fuoco, asse e direttrice della parabola  $y = -3x^2 + 6x - 1$  e costruiscine il grafico.

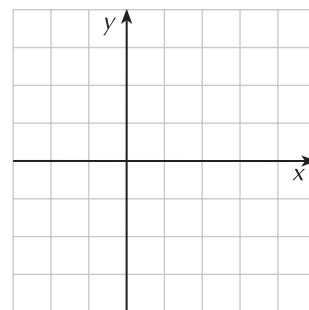
Calcola  $\Delta$ :  $\Delta = \dots\dots\dots$

Trova il vertice:  $x_V = \dots\dots\dots$   $y_V = \dots\dots\dots$   $V(\dots\dots\dots)$

Trova il fuoco:  $x_F = \dots\dots\dots$   $y_F = \dots\dots\dots$   $F(\dots\dots\dots)$

Trova l'asse:  $x = \dots\dots\dots$

Trova la direttrice:  $y = \dots\dots\dots$   $\left[ V(1, 2); F\left(1, \frac{23}{12}\right); x = 1; y = \frac{25}{12} \right]$



## Fai gli esercizi

- 1** Trova le coordinate del fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice e costruisci il grafico delle seguenti parabole aventi vertice nell'origine:

a.  $y = -x^2$   $\left[ F\left(0, -\frac{1}{4}\right), x = 0, y = \frac{1}{4} \right]$

b.  $y = 4x^2$   $\left[ F\left(0, \frac{1}{16}\right), x = 0, y = -\frac{1}{16} \right]$

c.  $y = \frac{1}{3}x^2$   $\left[ F\left(0, \frac{3}{4}\right), x = 0, y = -\frac{3}{4} \right]$

d.  $y = -\frac{5}{4}x^2$   $\left[ F\left(0, -\frac{1}{5}\right), x = 0, y = \frac{1}{5} \right]$

- 2** Trova le coordinate del vertice e del fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice e costruisci il grafico delle seguenti parabole:

a.  $y = -x^2 + 3x$   $\left[ V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), F\left(\frac{3}{2}, 2\right), x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2} \right]$

b.  $y = 2x^2 - x + 1$   $\left[ V\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right), F\left(\frac{1}{4}, 1\right), x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4} \right]$

c.  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$   $\left[ V(0, 1), F\left(0, \frac{1}{2}\right), x = 0, y = \frac{3}{2} \right]$

d.  $y = x^2 - 3$   $\left[ V(0, -3), F\left(0, -\frac{11}{4}\right), x = 0, y = -\frac{13}{4} \right]$

e.  $y = -2x^2 + 4x$   $\left[ V(1, 2), F\left(1, \frac{15}{8}\right), x = 1, y = \frac{17}{8} \right]$

## Rivedi la teoria

### Equazione della parabola con asse parallelo all'asse $x$

L'equazione canonica della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  è

$$x = ay^2 + by + c$$

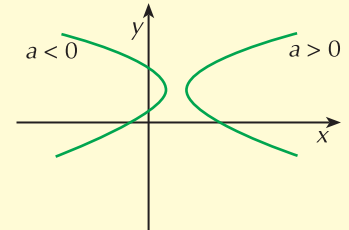
con  $a, b, c$  coefficienti reali e  $a \neq 0$ .

Essendo simmetrica della parabola  $y = ax^2 + bx + c$  rispetto alla bisettrice  $y = x$  questa parabola ha:

- vertice nel punto  $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
- fuoco nel punto  $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$
- per asse di simmetria la retta di equazione  $y = -\frac{b}{2a}$
- per direttrice la retta di equazione  $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Inoltre:

- se  $a > 0$  la parabola volge la concavità nella direzione del semiasse positivo delle ascisse
- se  $a < 0$  la parabola volge la concavità nella direzione del semiasse negativo delle ascisse.



Nel caso particolare in cui il vertice si trovi nell'origine, la parabola assume la forma:  $x = ay^2$ .

### Casi particolari

In corrispondenza di determinati valori dei coefficienti  $b$  e  $c$  dell'equazione si evidenziano posizioni particolari della parabola nel piano cartesiano:

- se  $c = 0$  l'equazione assume la forma  $x = ay^2 + by$   
La parabola passa per l'origine (le coordinate dell'origine soddisfano l'equazione della parabola).
- se  $b = 0$  l'equazione assume la forma  $x = ay^2 + c$   
L'ordinata del vertice è zero, perciò esso appartiene all'asse delle ascisse.
- se  $b = c = 0$  la parabola assume la forma  $x = ay^2$  che già conosciamo.

## ESERCIZIO GUIDA

Troviamo le coordinate del vertice e del fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice e costruiamo il grafico della parabola di equazione  $x = -y^2 + 4y - 2$ .

In questo caso  $a = -1$ ,  $b = 4$  e  $c = -2$ . Poichè  $a < 0$  la parabola volge la concavità nella direzione del semiasse negativo delle ascisse.

Calcoliamo il valore di  $\Delta$ :  $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8$

Possiamo allora dire che:

$$\text{vertice: } x = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8}{4 \cdot (-1)} = 2 \quad y = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2 \quad \rightarrow \quad V(2, 2)$$

$$\text{fuoco: } x = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-8}{4 \cdot (-1)} = +\frac{7}{4} \quad y = 2 \quad \rightarrow \quad F\left(\frac{7}{4}, 2\right)$$

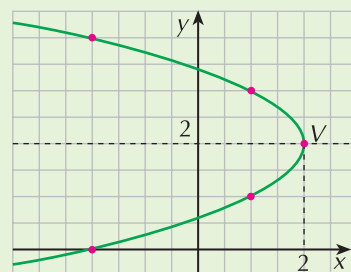
$$\text{asse: } y = 2$$

$$\text{direttrice: } x = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+8}{4 \cdot (-1)} = \frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{9}{4}$$

Per trovare l'ascissa del vertice si può applicare la formula, oppure si può sostituire il valore calcolato dell'ordinata nell'equazione della parabola.

Per costruire il grafico troviamo le coordinate di qualche punto attribuendo valori di nostra scelta alla  $y$  e calcolando il corrispondente valore di  $x$ :

$x$	...	...
$y$	0	1



## PROVA TU

Individua tutte le caratteristiche della parabola  $x = 2y^2 - 6y + 3$  e costruiscine il grafico.

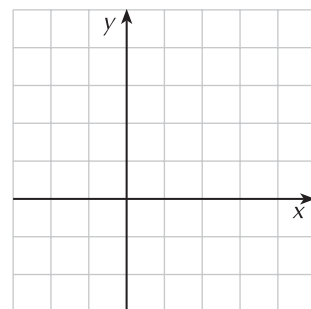
Calcola  $\Delta$ :  $\Delta = \dots\dots\dots$

Trova il vertice:  $x_V = \dots\dots\dots$   $y_V = \dots\dots\dots$   $V(\dots\dots\dots)$

Trova il fuoco:  $x_F = \dots\dots\dots$   $y_F = \dots\dots\dots$   $F(\dots\dots\dots)$

Trova l'asse:  $y = \dots\dots\dots$

Trova la direttrice:  $x = \dots\dots\dots$



$$\left[ V\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); F\left(-\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right); y = \frac{3}{2}; x = -\frac{13}{8} \right]$$

## Fai gli esercizi

3 Trova le coordinate del vertice e del fuoco, l'equazione dell'asse e della direttrice delle seguenti parabole e costruiscine poi il grafico:

a.  $x = y^2 + 3y$

$$\left[ V\left(-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right), F\left(-2, -\frac{3}{2}\right), y = -\frac{3}{2}, x = -\frac{5}{2} \right]$$

b.  $x = -2y^2 + 4y - 1$

$$\left[ V(1, 1), F\left(\frac{7}{8}, 1\right), y = 1, x = \frac{9}{8} \right]$$

c.  $x = y^2 - 4$

$$\left[ V(-4, 0), F\left(-\frac{15}{4}, 0\right), y = 0, x = -\frac{17}{4} \right]$$

## Rivedi la teoria

### Come determinare l'equazione di una parabola

Risolviamo insieme alcuni problemi relativi alla determinazione dell'equazione di una parabola; affinché ciò sia possibile dobbiamo disporre di tre condizioni indipendenti perchè tre sono i coefficienti (cioè  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) dell'equazione da determinare.

### I Problema: determinare l'equazione di una parabola conoscendo le coordinate di tre suoi punti

Sfruttando la condizione di appartenenza di un punto ad una curva impostiamo un sistema di tre equazioni (tre sono i punti per cui passa la parabola), in tre incognite (i coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dell'equazione).

## ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che passa per i punti  $A(1, -1)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(4, -2)$ .

L'equazione generale della parabola è  $y = ax^2 + bx + c$

La condizione di appartenenza di un punto ad una curva impone che le sue coordinate soddisfino l'equazione della curva; possiamo quindi sostituire l'ascissa di ciascun punto al posto di  $x$ , l'ordinata al posto di  $y$  e risolvere il sistema nelle tre incognite  $a$ ,  $b$ ,  $c$  così ottenuto

appartenenza del punto  $A$ :  $-1 = a + b + c$

appartenenza del punto  $B$ :  $0 = 4a + 2b + c$

appartenenza del punto  $C$ :  $-2 = 16a + 4b + c$

Risolvi il sistema ottenuto e trova i coefficienti della parabola.

$$\left[ y = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{10}{3} \right]$$

## PROVA TU

Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che passa per i punti  $A(2, 0)$ ,  $B(6, -1)$ ,  $C(0, 1)$ .

L'equazione della parabola è del tipo  $x = ay^2 + by + c$ .

Imponi il passaggio per i tre punti: 
$$\begin{cases} 2 = \dots\dots\dots & \leftarrow A \\ 6 = \dots\dots\dots & \leftarrow B \\ \dots = \dots\dots\dots & \leftarrow C \end{cases}$$

Risolvi adesso il sistema ottenuto.

$$[x = y^2 - 3y + 2]$$

## Rivedi la teoria

### Il Problema: determinare l'equazione di una parabola conoscendo le coordinate del vertice

Il problema si può risolvere in due modi.

#### I modo.

L'equazione della parabola si può scrivere in funzione delle coordinate  $(x_0, y_0)$  del vertice nella forma:

- $y - y_0 = a(x - x_0)^2$  se l'asse di simmetria è parallelo all'asse  $y$
- $x - x_0 = a(y - y_0)^2$  se l'asse di simmetria è parallelo all'asse  $x$

Perchè il problema sia determinato è sufficiente aggiungere un'altra informazione indipendente che permetta di calcolare il valore di  $a$ .

#### II modo.

Le formule per il calcolo del vertice ci consentono di scrivere due equazioni nelle incognite  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

- a seconda che la parabola abbia l'asse di simmetria parallelo all'asse  $x$  oppure all'asse  $y$ , porre l'ascissa o l'ordinata del vertice uguale a  $-\frac{b}{2a}$

- imporre il passaggio della parabola per il vertice.

Anche in questo caso occorre aggiungere una informazione che permetta di scrivere la terza equazione del sistema.

## ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha vertice in  $V(2, -1)$  e passa per il punto  $A(0, 2)$ .

### I modo.

- L'equazione della parabola è del tipo:  $y - y_0 = a(x - x_0)^2$
- Sostituiamo in essa le coordinate del vertice:  $y + 1 = a(x - 2)^2$
- Nell'equazione ottenuta imponiamo il passaggio per  $A$  e troviamo il valore di  $a$ :

$$2 + 1 = a \cdot (0 - 2)^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

La parabola ha quindi equazione:  $y + 1 = \frac{3}{4}(x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$

### II modo.

- L'equazione della parabola ha la forma:  $y = ax^2 + bx + c$
- L'ascissa del vertice è uguale a 2:  $-\frac{b}{2a} = 2$
- La parabola passa per il vertice:  $-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \quad \rightarrow \quad 4a + 2b + c = -1$
- La parabola passa per  $A$ :  $2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \rightarrow \quad c = 2$

Scriviamo il sistema delle tre equazioni ottenute e risolviamolo:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ c = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

La parabola ha quindi equazione:  $y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$ .

## PROVA TU

Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che ha vertice in  $V(3, -2)$  e interseca l'asse  $x$  nel punto di ascissa 1.

### I modo.

Scrivi l'equazione in funzione del vertice:  $x - \dots = a(y - \dots)^2$

La successiva informazione ci dice che la parabola passa per il punto di coordinate  $(1, 0)$ . Imponi il passaggio per tale punto e trova il valore di  $a$ :

$$\dots = a \cdot \dots \quad \rightarrow \quad a = \dots$$

Completa adesso l'equazione della parabola.

### Il modo.

L'equazione ha la forma:  $x = ay^2 + by + c$ .

Imponi che l'ordinata del vertice, che è  $-\frac{b}{2a}$ , sia uguale a  $-2$ : ..... =  $-2$

Imponi il passaggio per il vertice:  $3 = \dots\dots\dots$

Imponi il passaggio per il punto  $(1, 0)$ : ..... = ....

Risolvi il sistema ottenuto.

$$\left[ x = -\frac{1}{2}y^2 - 2y + 1 \right]$$

## Rivedi la teoria

### III Problema: determinare l'equazione di una parabola conoscendo le coordinate del fuoco

Anche in questo caso si sfruttano le formule che esprimono le coordinate del fuoco; affinché il problema sia determinato è poi necessaria un'ulteriore informazione.

## ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha fuoco in  $F\left(1, -\frac{63}{8}\right)$  e passa per il punto  $A(3, 0)$ .

Scriviamo le prime due equazioni sfruttando le coordinate del fuoco:

- l'ascissa del fuoco deve essere uguale a  $1$ :  $-\frac{b}{2a} = 1$
- l'ordinata del fuoco deve essere uguale a  $-\frac{63}{8}$ :  $\frac{1-\Delta}{4a} = -\frac{63}{8} \rightarrow \frac{1-b^2+4ac}{4a} = -\frac{63}{8}$

Imponiamo il passaggio per  $A$ :  $0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \rightarrow 9a + 3b + c = 0$

Scriviamo il sistema delle tre equazioni e risolviamolo: 
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ \frac{1-b^2+4ac}{4a} = -\frac{63}{8} \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Il sistema è di secondo grado e ha due soluzioni:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{32} \\ b = \frac{1}{16} \\ c = \frac{3}{32} \end{cases}$$

Esistono quindi due parabole che soddisfano alle condizioni richieste; le loro equazioni sono:

$$y = 2x^2 - 4x - 6 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{3}{32}$$



## PROVA TU

Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che ha fuoco in  $F\left(-\frac{5}{4}, 2\right)$  e passa per il punto  $A(-1, 2)$ .

L'equazione della parabola ha la forma:  $x = ay^2 + by + c$ .

Imponi che l'ascissa del fuoco sia uguale a  $-\frac{5}{4}$ : ..... =  $-\frac{5}{4}$

Imponi che l'ordinata del fuoco sia uguale a 2: ..... = 2

Imponi il passaggio per  $A$ : ..... = ....

Risolvi il sistema e scrivi l'equazione richiesta.

$$[x = -y^2 + 4y - 5]$$

### Fai gli esercizi

- 4 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che passa per i punti di coordinate  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 6)$ .

$$[y = x^2 - 3x + 2]$$

- 5 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  e vertice nell'origine che passa per il punto  $P(3, -2)$ .

$$[y = -\frac{2}{9}x^2]$$

- 6 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  e vertice nell'origine, sapendo che la direttrice ha equazione  $y = \frac{2}{3}$ .

$$[y = -\frac{3}{8}x^2]$$

- 7 Scrivi l'equazione della parabola che ha per asse di simmetria la retta di equazione  $x = 2$  e passa per i punti di coordinate  $(0, 1)$  e  $(3, 4)$ .

$$[y = -x^2 + 4x + 1]$$

- 8 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che passa per i punti  $A(1, 0)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $C(1, 2)$ .

$$[x = y^2 - 2y + 1]$$

- 9 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che ha vertice in  $V(3, -2)$  e che passa per  $A(1, 0)$ .

$$[x = -\frac{1}{2}y^2 - 2y + 1]$$

- 10 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che ha vertice in  $V(-2, 1)$  e fuoco in  $F\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ .

$$[x = \frac{1}{2}y^2 - y - \frac{3}{2}]$$

- 11 Scrivi l'equazione della parabola che ha vertice in  $V(0, 1)$  e direttrice di equazione  $y = -2$ .

$$[y = \frac{1}{12}x^2 + 1]$$

- 12 Scrivi l'equazione della parabola che ha fuoco in  $F\left(\frac{3}{4}, 2\right)$  e direttrice di equazione  $x = \frac{5}{4}$ .

$$[x = -y^2 + 4y - 3]$$

- 13 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha fuoco in  $F\left(\frac{3}{4}, -1\right)$  e passa per l'origine.

$$[y = 2x^2 - 3x, y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{3}x]$$

14 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che taglia l'asse  $y$  nel punto di ordinata  $-1$  e passa per i punti  $A\left(1, -\frac{5}{2}\right)$  e  $B(2, -3)$ .  $\left[ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 \right]$

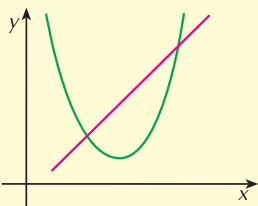
15 Scrivi l'equazione della parabola che passa per i punti  $A(-2, 1)$  e  $B(-4, 3)$  e ha direttrice di equazione  $x = -\frac{3}{2}$ .  $\left[ x = -\frac{1}{2}y^2 + y - \frac{5}{2}, x = -y^2 + 3y - 4 \right]$

## Rivedi la teoria

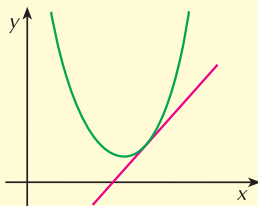
### Posizioni reciproche di una parabola e una retta

Per determinare la **posizione di una retta rispetto a una parabola** si deve:

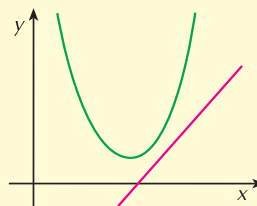
- impostare il sistema retta-parabola
- determinare l'equazione risolvente di secondo grado nella variabile  $x$  (oppure  $y$  a seconda del tipo di parabola)
- calcolare il discriminante  $\Delta$  di questa equazione:
  - se  $\Delta > 0$  la retta è secante la parabola
  - se  $\Delta = 0$  la retta è tangente alla parabola
  - se  $\Delta < 0$  la retta non interseca la parabola



a.  $\Delta > 0$  la retta è secante



b.  $\Delta = 0$  la retta è tangente



c.  $\Delta < 0$  la retta è esterna

## ESERCIZIO GUIDA

a. Troviamo, se esistono, le intersezioni tra la parabola di equazione  $y = x^2 - 3x$  e la retta di equazione  $2x - y = 0$ .

Scriviamo il sistema delle due equazioni: 
$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo  $y$  dalla seconda equazione e sostituiamo: 
$$\begin{cases} 2x = x^2 - 3x \\ y = 2x \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione in  $x$ :  $x^2 - 5x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$

Soluzioni del sistema:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$

Possiamo così concludere che la retta e la parabola si intersecano nei punti di coordinate  $(0, 0)$  e  $(5, 10)$ .

b. Verifichiamo che la retta di equazione  $y = 2x - 1$  è tangente alla parabola di equazione  $y = -x^2 + 6x - 5$  e troviamo le coordinate del punto di tangenza.

Scriviamo il sistema formato dalle due equazioni: 
$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di  $y$  nella prima equazione: 
$$\begin{cases} 2x - 1 = -x^2 + 6x - 5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione in  $x$ :  $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

Il sistema ammette due soluzioni coincidenti 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Possiamo così concludere che la retta e la parabola sono tangenti nel punto di coordinate  $(2, 3)$ .

c. Verifichiamo che la retta di equazione  $y = x - 7$  non interseca la parabola di equazione  $y = 3x^2$ .

Scriviamo il sistema retta-parabola e troviamo l'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = 3x^2 \end{cases} \rightarrow 3x^2 = x - 7 \rightarrow 3x^2 - x + 7 = 0$$

Poiché  $\Delta = 1 - 84 = -83 < 0$ , la retta non interseca la parabola.

## PROVA TU

Determina la posizione della parabola di equazione  $y = x^2 - x - 6$  rispetto alle seguenti rette e trovanne gli eventuali punti di intersezione.

a.  $y = x + 2$

b.  $y = 2x - 9$

c.  $y = x - 7$

a. Imposta il sistema retta-parabola: 
$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Trova l'equazione risolvente e determinane le soluzioni:  $x = \dots\dots\dots$

La retta interseca la parabola in due punti distinti. Prosegui la risoluzione del sistema e trova le coordinate dei punti.

Ripeti la stessa procedura con le altre due rette.

[a.  $(-2, 0)$ ;  $(4, 6)$ ; b. non si intersecano; c. tangente in  $(1, -6)$ ]

## Fai gli esercizi

Trova, se esistono, le coordinate dei punti di intersezione delle seguenti parabole con le rette date.

16  $y = x^2 - x + 1$

$y = x - 3$

[nessun punto di intersezione]

17  $y = -2x^2 + 8x$

$y = x + 3$

$\left[ A\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right); B(3, 6) \right]$

18  $y = x^2 + 2x - 2$

$x + 2y + 1 = 0$

$\left[ A(-3, 1); B\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \right]$

19  $y = x^2 - 4x$

$y = 2x - 9$

[ $A(3, -3)$ ]

## Rivedi la teoria

### Come trovare la retta tangente a una parabola

Dato un punto  $P(x_0, y_0)$ , vogliamo scrivere le equazioni delle rette tangenti alla parabola  $y = ax^2 + bx + c$  (oppure  $x = ay^2 + by + c$ ) che passano per  $P$ .

Per risolvere il problema:

- scriviamo l'equazione della retta per  $P$ :  $y - y_0 = m(x - x_0)$
- scriviamo il sistema retta-parabola
- troviamo l'equazione risolvente
- calcoliamo il discriminante e imponiamo che sia uguale a zero:  $\Delta = 0$ .

Se il punto  $P$  appartiene alla parabola, oltre a questo metodo se ne possono usare due più semplici nel calcolo.

- Troviamo il coefficiente angolare della retta con la formula:

$$m = 2ax_0 + b \quad \text{se la parabola è } y = ax^2 + bx + c$$

$$m = \frac{1}{2ay_0 + b} \quad \text{se la parabola è } x = ay^2 + by + c$$

Scriviamo poi l'equazione della retta per  $P$  di coefficiente angolare  $m$ .

- Usiamo le formule di sdoppiamento ponendo nell'equazione della parabola, a seconda della forma:

$$x_0x \quad \text{al posto di } x^2$$

$$y_0y \quad \text{al posto di } y^2$$

$$\frac{1}{2}(x_0 + x) \quad \text{al posto di } x$$

$$\frac{1}{2}(y_0 + y) \quad \text{al posto di } y$$

## ESERCIZIO GUIDA

- a. Data la parabola  $y = x^2 - 4$ , vogliamo trovare le equazioni delle rette ad essa tangenti che passano per il punto  $P(1, -6)$ .

Il punto  $P$  non appartiene alla parabola (le sue coordinate non ne soddisfano l'equazione).

Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro  $P$ :  $y + 6 = m(x - 1)$

Mettiamo in sistema l'equazione della parabola con quella del fascio di rette

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y + 6 = m(x - 1) \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di  $y$  ricavata dall'equazione della retta e troviamo l'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = m(x - 1) - 6 \\ m(x - 1) - 6 = x^2 - 4 \end{cases} \quad \text{equazione risolvente} \quad x^2 - mx + m + 2 = 0$$

Condizione di tangenza  $\Delta = 0$

$$m^2 - 4(m + 2) = 0$$

Risolviendo questa equazione troviamo

$$m = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

Le rette tangenti sono due ed hanno equazione

$$y = (2 - 2\sqrt{3})(x - 1) - 6 \quad \text{cioè} \quad y = (2 - 2\sqrt{3})x - 8 + 2\sqrt{3}$$

$$y = (2 + 2\sqrt{3})(x - 1) - 6 \quad \text{cioè} \quad y = (2 + 2\sqrt{3})x - 8 - 2\sqrt{3}$$

- b. Scriviamo l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione  $y = -x^2 + 4x - 4$  passante per il suo punto  $P$  di ascissa 1.

L'ordinata del punto di ottiene sostituendo 1 nell'equazione della parabola:

$$y = -1 + 4 - 4 = -1 \quad \rightarrow \quad P(1, -1)$$

**I metodo.**

Troviamo il coefficiente angolare:  $m = 2ax_0 + b = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 4 = 2$

Scriviamo l'equazione della retta:  $y + 1 = 2(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 2x - 3$

**II metodo.**

Applichiamo le formule di sdoppiamento:

$$x_0x = 1 \cdot x = x \quad \frac{1}{2}(x + x_0) = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \frac{1}{2}(y + y_0) = \frac{1}{2}(y - 1)$$

Sostituiamo nell'equazione della parabola:

$$y = -x^2 + 4x - 4 \quad \text{diventa} \quad \frac{1}{2}(y - 1) = -x + 4 \cdot \frac{1}{2}(x + 1) - 4$$

Svolgendo i calcoli otteniamo  $y = 2x - 3$ .

- c. Scriviamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che passa per i punti  $A(0, -2)$  e  $B(-1, -6)$  ed è tangente alla retta di equazione  $y = x - 1$ .

Imponiamo il passaggio per  $A$ :  $c = -2$

Imponiamo il passaggio per  $B$ :  $-6 = a - b + c$

Per ottenere la condizione di tangenza scriviamo il sistema parabola-retta, troviamo l'equazione risolvente e imponiamo che sia  $\Delta = 0$ :

$$\text{sistema: } \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 1 \end{cases}$$

equazione risolvente:  $ax^2 + x(b - 1) + c + 1 = 0$

condizione di tangenza ( $\Delta = 0$ ):  $(b - 1)^2 - 4a(c + 1) = 0$

$$\text{Scriviamo ora il sistema formato dalle tre equazioni: } \begin{cases} c = -2 \\ -6 = a - b + c \\ (b - 1)^2 - 4a(c + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Risolvendolo otteniamo: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = -9 \\ b = -5 \\ c = -2 \end{cases}$$

Il problema ammette due soluzioni, le parabole di equazioni:

$$y = -x^2 + 3x - 2 \quad \text{e} \quad y = -9x^2 - 5x - 2$$

## PROVA TU

a. Scrivi l'equazione delle rette tangenti alla parabola  $y = x^2 - x - 2$  uscenti dal punto  $P(3, -1)$ .

Il punto  $P$  non appartiene alla parabola.

Scrivi l'equazione della retta per  $P$ :  $(y - \dots) = m(x - \dots)$

Trova l'equazione risolvendo il sistema retta-parabola:  $\dots$

Imponi la condizione di tangenza e trova il valore di  $m$ :  $\dots$

$$[m = 5 \pm 2\sqrt{5}]$$

b. Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che passa per  $A(2, 0)$  e che è tangente alla retta  $y = 2x + 1$  nel suo punto  $B$  di ascissa 1.

Trova l'ordinata del punto di tangenza:  $\dots$

La parabola passa quindi anche per il punto  $B(1, \dots)$ .

Imponi il passaggio per  $A$ :  $\dots$

Imponi il passaggio per  $B$ :  $\dots$

Usa la condizione di tangenza  $m = 2ax_0 + b$  con  $m = 2$  (il coefficiente angolare della retta tangente).

Risolvi il sistema ottenuto e scrivi l'equazione della parabola.

$$[y = -5x^2 + 12x - 4]$$

## Fai gli esercizi

20 Scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto  $P$  assegnato e tangenti alla parabola data.

a.  $y = x^2 - 2x - 3$   $P(0, -3)$

$$[y = -2x - 3]$$

b.  $y = x^2 + 2x + 4$   $P(-1, 0)$

$$[y = 2\sqrt{3}(x+1), y = -2\sqrt{3}(x+1)]$$

c.  $y = \frac{1}{4}x^2$   $P(4, 4)$

$$[y = 2x - 4]$$

d.  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$   $P\left(2, \frac{7}{4}\right)$

$$[4y - 8x + 9 = 0]$$

21 Scrivi l'equazione della parabola avente per asse la retta  $y = -1$  che passa per il punto  $A(-3, 0)$  ed è tangente alla retta  $x - 4y + 4 = 0$ .

$$[x = y^2 + 2y - 3]$$

22 Trova l'equazione della retta tangente alla parabola  $y = 2x^2 - 4x$  che è parallela alla retta di equazione  $y = -2x + 3$ .

$$\left[y = -2x - \frac{1}{2}\right]$$

23 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che passa per i punti  $A(0, 1)$  e  $B(1, -1)$  e che è tangente alla retta  $y = x - 3$ .

$$[y = x^2 - 3x + 1; y = 9x^2 - 11x + 1]$$

24 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha vertice in  $V(2, 0)$  ed è tangente alla retta  $y = x - 1$ .

$$\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1\right]$$

# Verifica del recupero

**1** La parabola di equazione  $y = x^2 - 6x + 3$  ha vertice e fuoco rispettivamente nei punti:

a.  $V(-6, 3)$        $F\left(-\frac{23}{4}, 3\right)$

b.  $V(3, -6)$        $F\left(3, -\frac{23}{4}\right)$

c.  $V(3, 3)$        $F\left(3, -\frac{5}{4}\right)$

d.  $V(3, -6)$        $F(3, 29)$

10 punti

**2** La parabola di equazione  $x = \frac{1}{2}y^2 + y - 4$  ha vertice e asse di simmetria che sono:

a.  $V\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$        $y = -\frac{5}{2}$

b.  $V\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$        $x = -1$

c.  $V\left(-\frac{9}{2}, -1\right)$        $y = -1$

d.  $V\left(-\frac{9}{2}, -1\right)$        $x = -\frac{9}{2}$

10 punti

**3** Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $x$  che passa per i punti di coordinate  $(-2, 1)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(4, -1)$ .

15 punti

**4** Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse  $y$  che ha vertice in  $V(0, 3)$  e passa per  $A(2, 0)$ .

15 punti

**5** Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola  $y = -x^2 + 2x$  e che è perpendicolare alla retta  $y = -\frac{3}{4}x + 2$ . Trova poi il punto di tangenza.

20 punti

**6** Scrivi l'equazione della parabola avente per asse la retta  $x = 1$  che è tangente in  $A(2, 1)$  ad una retta di coefficiente angolare  $-1$ .

20 punti

# Soluzioni

1 b.

2 c.

3  $x = y^2 - 3y$

4  $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

5  $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{9}; \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right)$

6  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Esercizio	1	2	3	4	5	6	
Punteggio							

Punteggio

Voto:  $\frac{\text{punteggio}}{10} + 1 =$