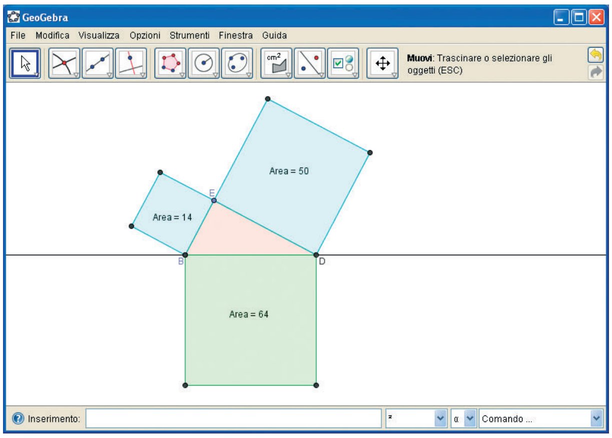
Il teorema di Pitagora con Geogebra

1 La dimostrazione del teorema di Pitagora

La procedura per dimostrare il teorema di Pitagora con GeoGebra è molto più semplice rispetto a quella utilizzata con Cabri. Per verificare il teorema di Pitagora si deve:

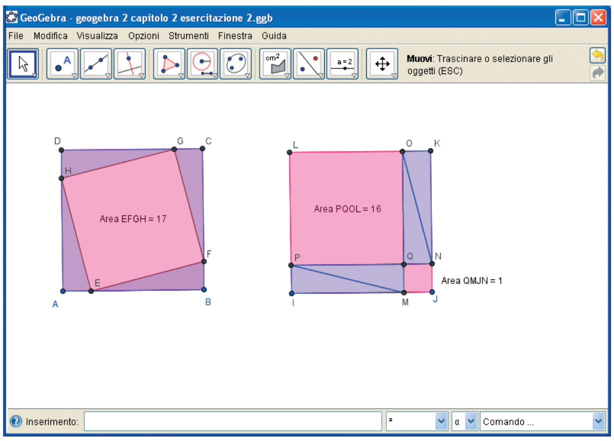


– costruire un triangolo rettangolo secondo la procedura ampiamente descritta nelle esercitazioni del volume 1;
– attivare lo strumento **Poligono regolare** e cliccare sugli estremi dei lati del triangolo indicando poi il numero dei lati (4 nel nostro caso) nella finestra che si apre;
– selezionare il comando **Area** per determinare l'area dei tre quadrati;
– è facile verificare con un semplice calcolo che il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti;
– dopo aver cliccato con il tasto destro del mouse su un oggetto qualunque della costruzione ed attivato il comando **Proprietà**, colorare i tre quadrati mediante lo strumento **Colore**.

2 La dimostrazione geometrica del teorema di Pitagora

In questa esercitazione ci proponiamo di realizzare la costruzione che permette la dimostrazione geometrica del teorema di Pitagora. Per realizzare la costruzione del primo quadrato si deve:

– disegnare un segmento *AB* e, dopo aver attivato il comando **Poligono regolare**, cliccare sugli estremi *A* e *B* del segmento; si apre una finestra in cui si deve digitare il numero 4;
– segnare un punto *E* sul lato *AB* mediante lo strumento **Nuovo Punto**;
– generare, mediante il comando **Compasso** tre circonferenze cliccando prima sul segmento di raggio *AE* quindi sui centri *B*, *C* e *D*;
– determinare i punti *F*, *G* e *H* appartenenti rispettivamente ai lati *BC*, *CD* e *DA* del quadrato e tali che $AE = BF = CG = DH$;
– generare mediante il comando **Poligono** i triangoli rettangoli congruenti *EBF*, *FCG*, *GDH* e *HEA* e il quadrato *EFGH*;
– nascondere gli oggetti non utili alla costruzione mediante il comando **Mostra/Nascondi oggetto**;
– colorare i quattro triangoli rettangoli congruenti e il quadrato.



Per la realizzazione del secondo quadrato congruente ad *ABCD* si deve:

– tracciare una retta passante per un generico punto *I*;
– calcolare la posizione del punto *J* mediante lo strumento **Compasso** cliccando nell'ordine sui punti *A*, *B* e *I*;
– costruire il segmento *IJ* congruente ad *AB* mediante lo strumento **Segmento tra due punti**;
– utilizzare lo strumento **Poligono regolare** per costruire il quadrato *IJKL*;

- mediante il comando **Compasso** costruire sui lati *IJ* e *IL* i segmenti *IM* e *IP* congruenti rispettivamente ad *EB* e *AE*;
- con lo strumento **Retta parallela** costruire la retta parallela ad *IJ* passante per *P* e la retta parallela ad *IL* passante per *M*;
- individuare i seguenti punti di intersezione: *O* (retta parallela al lato *IL* con il lato *LK*), *N* (retta parallela al lato *IJ* con il lato *JK*) e *Q* (segmento *PN* con il segmento *MO*);
- nascondere gli oggetti inutili mediante il comando **Mostra/Nascondi oggetto**;
- generare mediante il comando **Poligono** i triangoli rettangoli congruenti *IMP*, *MQP*, *QNO* e *OKN* e i quadrati *MQNJ* e *PQOL*;
- agire sulle **Proprietà** per colorare le figure ottenute;
- mediante il comando **Area** calcolare le aree dei tre quadrati in figura;
- verificare che l'area del quadrato *EFGH* è uguale alla somma delle aree dei quadrati *PQOL* e *MJNQ*.

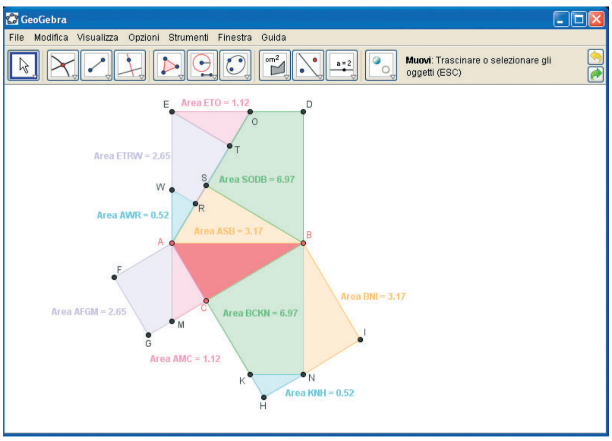
3 Un'altra sorprendente dimostrazione del teorema di Pitagora

Un'importante e sorprendente dimostrazione del teorema di Pitagora è stata proposta da Ozanam nel 1778 e consiste nella costruzione di figure equivalenti nei quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa del triangolo rettangolo quasi come in un "puzzle".
Per suddividere i quadrati costruiti sui cateti si deve:

- utilizzare la costruzione della prima esercitazione così da avere già pronti il triangolo ed i quadrati costruiti sui lati avendo cura di cancellare tutti i dati numerici relativi alle aree dei quadrati e di eliminare il colore delle aree;
- utilizzare le lettere *A*, *B* e *C* per i vertici del triangolo;
- mediante lo strumento **Retta perpendicolare** tracciare le due rette passanti per *A* e *B* perpendicolari all'ipotenusa *AB*;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** individuare l'intersezione fra i lati dei quadrati costruiti sui cateti con le due rette e indicare tali punti con le lettere *M* e *N*;
- mandare, mediante lo strumento **Retta parallela** la retta parallela all'ipotenusa passante per il punto *N*;
- individuare l'intersezione di tale retta con il lato del quadrato ed indicare tale punto con la lettera *K*;
- definire i poligoni costruiti nei quadrati dei cateti *BC* e *AC* con lo strumento **Poligono**;
- determinare le singole aree con lo strumento **Area**;
- agire sulla **Proprietà** del poligono per colorare le aree dei poligoni ottenuti nella scomposizione dei quadrati costruiti sui cateti;
- selezionare il comando **Mostra/Nascondi oggetto** e nascondere gli oggetti inutili.

Per suddividere il quadrato costruito sull'ipotenusa si deve:

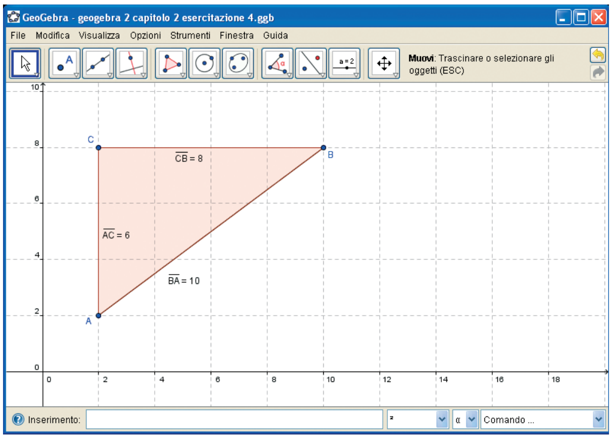
- selezionare lo strumento **Compasso** e cliccare nell'ordine nei punti *A*, *M* e *E* in modo da prendere sul lato *ED* un punto *O* tale che $EO = AM$;
- con lo stesso strumento cliccare sui punti *K*, *N* ed *A* e prendere il punto *W* sul lato *AE* tale che $AW = KN$;
- tracciare il segmento *AO*;
- mandare, mediante lo strumento **Retta perpendicolare**, le rette per *W*, per *E* e per *B* perpendicolari al segmento *AO*;
- chiamare i punti ottenuti con le lettere *R*, *T* e *S*;
- generare con lo strumento **Poligono** i poligoni *WRTE* e *SBDO* ed i triangoli *ARW*, *ETO* e *ASB*;
- mediante lo strumento **Area** determinare le aree dei cinque poligoni;
- agire sulle **Proprietà** per colorare i poligoni ottenuti;
- mediante il comando **Mostra/Nascondi oggetto** è possibile nascondere gli oggetti che non fanno strettamente parte della figura.



4 La distanza tra due punti nel piano cartesiano

Per determinare la distanza tra due punti qualunque nel primo quadrante del piano cartesiano si deve:

– cliccare con il tasto destro del mouse in un punto qualsiasi e selezionare il comando **Assi**;
– sempre con il tasto destro del mouse attivare la griglia mediante il comando **Griglia**;
– segnare due punti *A* e *B* di ascissa e ordinata diverse nel piano cartesiano;
– tracciare mediante il comando **Segmento tra due punti** la distanza tra i punti *A* e *B*;
– attivare il comando **Distanza o lunghezza** e misurare la distanza tra i due punti;
– costruire i segmenti paralleli agli assi cartesiani che permettono la costruzione del triangolo rettangolo di ipotenusa *AB*;
– calcolare la lunghezza dei segmenti *AC* e *BC*;
– verificare che vale la relazione del teorema di Pitagora.



Esercizi

1 Disegna un triangolo ottusangolo. Sui lati del triangolo costruisci i quadrati e calcola l'area. Verifica se anche in questi tipi di triangoli vale la relazione pitagorica.

2 Disegna un triangolo acutangolo. Sui lati del triangolo costruisci i quadrati e calcola l'area. Verifica se anche in questi tipi di triangoli vale la relazione pitagorica.

3 Disegna un triangolo rettangolo e costruisci i quadrati sui cateti e sull'ipotenusa. Dopo aver determinato l'area dei quadrati, verifica la relazione del teorema di Pitagora.

4 Verifica che in un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sul cateto minore è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa diminuita dell'area del quadrato costruito sul cateto maggiore.

5 Disegna un triangolo rettangolo. Dopo aver calcolato il punto medio di ciascun lato costruisci tre circonferenze con centro nei tre punti medi e raggio pari a metà del rispettivo lato cui appartiene il centro. Verifica la relazione del teorema di Pitagora valutando le aree dei tre cerchi.

6 Sia *ABC* un triangolo rettangolo. Verifica che il triangolo equilatero costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei triangoli equilateri costruiti sui cateti.

7 Sia *ABC* un triangolo rettangolo. Verifica che la somma degli esagoni regolari costruiti sui cateti è equivalente all'esagono regolare costruito sull'ipotenusa.

8 Verifica che l'equivalenza stabilita dal teorema di Pitagora vale ancora se al posto dei quadrati si costruisce sui lati di un triangolo rettangolo un qualsiasi poligono regolare.