

IL CALCOLO LETTERALE

I MONOMI

richiami della teoria

- Un'espressione **algebraica letterale** è un insieme di numeri, anche rappresentati da lettere, legati uno all'altro da segni di operazione;
- un **monomio** è un'espressione letterale in cui i numeri e le lettere sono legati tra loro solamente dall'operazione di moltiplicazione;
- il **segno di un monomio** è determinato dal segno del suo coefficiente; se non figura alcun coefficiente si considera come coefficiente l'**unità**, in particolare: **+1** se il monomio è preceduto dal segno più; **-1** se il monomio è preceduto dal segno meno;
- il **grado di un monomio rispetto ad una lettera** è l'esponente con cui questa vi figura;
- il **grado complessivo o totale** di un monomio è dato dalla somma degli esponenti delle varie lettere che in esso figurano;
- due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale;
- due monomi sono **opposti** se sono simili e hanno coefficienti opposti;
- due monomi sono **uguali** se sono simili e hanno lo stesso coefficiente.

COMPrensione DELLA TEORIA

- 1 Si chiama monomio un'espressione letterale in cui i numeri e le lettere sono legati tra loro solamente dalle operazioni di:
a. divisione; b. moltiplicazione; c. sottrazione; d. addizione.
- 2 Completa le seguenti regole:
a. il segno di un monomio è determinato dal;
b. il grado di un monomio rispetto ad una sua lettera è;
c. il grado complessivo di un monomio si ottiene sommando

APPLICAZIONE

3 *Esercizio Svolto*

Stabilisci le caratteristiche del monomio $-5x^2y$.

Il monomio $-5x^2y$ si può suddividere nella sua parte numerica (-5) e nella parte letterale (x^2y). In particolare:

- il coefficiente è -5 ;
- il grado complessivo è 3 ;
- il grado rispetto la lettera x è 2 ;
- il grado rispetto la lettera y è 1 .

- 4 Stabilisci le caratteristiche del monomio $+\frac{1}{4}x^3y^2z$.

Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali sostituendo a ciascuna lettera i valori numerici assegnati.

5 *Esercizio Suelto*

a. $+2a^2b - 3a + b^3$ per $a = +2$ e $b = -1$;

b. $\frac{+xy - 3x}{x + 2}$ per $x = -2$ e $y = +4$.

Sostituiamo alle lettere il valore numerico assegnato e poi eseguiamo il calcolo algebrico:

a. $2 \cdot (+2)^2 \cdot (-1) - 3 \cdot (+2) + (-1)^3 = 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + (-1) = -8 - 6 - 1 = -15$;

b. $\frac{-2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)}{-2 + 2} = \frac{-8 + 6}{0} = \frac{-2}{0} = ?$

Poiché il denominatore è 0 la nostra espressione perde significato in quanto, come sappiamo, non è possibile dividere un numero per 0.

6 $+3a - 2ab^3 + a^3$ per $a = 3$ e $b = -2$. [84]

7 $\frac{+2a^2 - b - 3ab}{b - 3}$ per $a = -3$ e $b = 3$. [impossibile]

8 $-3x + 2y - 2z$ per $x = 3$; $y = 2$ e $z = -15$. [25]

9 $\frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{4}a^3 + \frac{5}{2}ab^2$ per $a = -1$; $b = +2$. $\left[-\frac{33}{4}\right]$

10 $a^2b + \frac{2}{3}a - 3b$ per $a = -3$; $b = +1$. [4]

11 $\frac{4}{7}a^2bc + \frac{2}{3}ab^2 - c^2$ per $a = +2$; $b = -3$ e $c = 1$. $\left[\frac{29}{7}\right]$

12 $x^3y - 3x^2y^2 + 5$ per $x = +2$; $y = -1$. [-15]

LE OPERAZIONI CON I MONOMI

richiami della teoria

- La **somma algebrica** di due o più **monomi simili** è uguale ad un monomio simile ai monomi dati, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti;
- la **somma algebrica** di due o più monomi **non simili tra loro**, non si può effettuare;
- il **prodotto di due o più monomi** è un monomio avente per **coefficiente** il prodotto dei coefficienti e per **parte letterale** tutte le lettere presenti nei vari monomi, ciascuna scritta una sola volta, con esponente uguale alla somma degli esponenti della stessa lettera;
- il **quoziente di due monomi**, di cui il secondo non nullo, è un monomio avente per **coefficiente** il quoziente dei coefficienti e per **parte letterale** tutte le lettere presenti nel dividendo, ciascuna scritta una sola volta, con esponente uguale alla differenza fra gli esponenti della stessa lettera che compaiono nel dividendo e nel divisore;
- la **potenza di un monomio** è un monomio avente per **coefficiente** il coefficiente elevato all'esponente della potenza e per **parte letterale** tutte le lettere aventi per esponente il prodotto tra i loro esponenti e quello della potenza.

COMPRESIONE DELLA TEORIA

13 Completa le seguenti regole:

- a. il prodotto di due o più monomi è un monomio avente:
 - per coefficiente, dei coefficienti;
 - per parte letterale, presenti nei vari monomi, ciascuna e con esponente uguale alla della stessa lettera;
- b. il quoziente di due monomi, di cui il secondo non nullo, è un monomio avente:
 - per coefficiente,
 - per parte letterale, tutte le lettere presenti nel, ciascuna scritta una sola volta, con esponente uguale fra gli esponenti della stessa lettera che compaiono nel e nel
- c. la potenza di un monomio è di tanti monomi, tutti al monomio dato, quanti ne indica l'esponente; la potenza di un monomio è dunque un monomio avente:
 - per coefficiente, il coefficiente della potenza;
 - per parte letterale, tutte le lettere aventi per esponente tra i loro esponenti e quello della potenza.

APPLICAZIONE

Calcola il valore delle seguenti somme algebriche fra monomi.

14 *Esercizio Svolto*

a. $-2ab^3 + 3ab^3$; b. $+\frac{1}{2}xy^3z - \frac{1}{2}xy^3z$; c. $-4ab^3 + 7a^2b^3$.

- a. I due monomi sono simili (hanno infatti la stessa parte letterale); basta pertanto eseguire la somma algebrica fra i coefficienti: $(-2 + 3)ab^3 = +1ab^3$;
- b. i monomi sono opposti pertanto la loro somma algebrica è 0;
- c. i due monomi non sono simili; pertanto non si può effettuare alcun calcolo.

$$15 \quad \text{a. } -2xy - 3xy; \quad \text{b. } +\frac{2}{3}a^2b^3c - \frac{2}{3}a^3b^2c; \quad \text{c. } +\frac{5}{2}x^2y^3 - \frac{6}{7}x^2y^3.$$

$$16 \quad -\frac{3}{4}a^2b^3c + \frac{5}{3}a^3b - \frac{1}{2}a^2b^3c + \frac{5}{6}a^2b^3c - \frac{1}{6}a^3b. \quad \left[-\frac{5}{12}a^2b^3c + \frac{3}{2}a^3b \right]$$

$$17 \quad \frac{1}{5}x^2yz^2 - \frac{4}{3}x^4y^2 + 2x^2yz^2 - \frac{3}{2}x^4y^2 + \frac{2}{3}x^4y^2. \quad \left[\frac{11}{5}x^2yz^2 - \frac{13}{6}x^4y^2 \right]$$

$$18 \quad -\frac{7}{4}x^2y + \frac{4}{3}x^2y + \frac{1}{2}x^2y - 3x^2y + \frac{4}{3}x^2y - \frac{5}{2}x^2y - \frac{3}{4}x^2y. \quad \left[-\frac{29}{6}x^2y \right]$$

$$19 \quad \frac{3}{5}x^3z + \frac{3}{2}x^3z + ax + 2x^3z - \frac{1}{2}ax + \frac{2}{5}ax - \frac{1}{2}x^3z - \frac{5}{2}ax. \quad \left[\frac{18}{5}x^3z - \frac{8}{5}ax \right]$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di monomi.

20 *Esercizio Svolto*

$$\text{a. } (-4a^2b) \cdot (+2a) = (-4) \cdot (+2) \cdot a^{2+1}b^1 = -8a^3b;$$

$$\text{b. } \left(+\frac{2}{3}x^3yz\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}xy^2\right) = \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{5}\right) x^{3+1}y^{1+2}z^1 = +\frac{2}{5}x^4y^3z;$$

$$\text{c. } (-2ab^2) \cdot \left(-\frac{3}{2}a^2c^2\right) \cdot \left(+\frac{4}{5}ac^2\right) = +\frac{12}{5}a^4b^2c^4.$$

$$21 \quad \text{a. } \left(+\frac{3}{2}ab^3\right) \cdot \left(+\frac{2}{7}ab\right); \quad \text{b. } (+3x^2y^2z) \cdot \left(+\frac{1}{4}xy\right).$$

$$22 \quad \left(-\frac{4}{3}abc^3\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}abc^2\right) \cdot (+4ab^2). \quad [4a^3b^4c^5]$$

$$23 \quad \left(-\frac{3}{4}a^5b^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^3bc\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}a^5b^3c\right)^2. \quad \left[\frac{8}{3}a^{18}b^9c^3\right]$$

$$24 \quad (-3ab^2c) \cdot \left(\frac{1}{4}ab^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2c\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}a^3b\right) \cdot \left(\frac{12}{7}a^5b^2c^3\right). \quad \left[-\frac{12}{35}a^{12}b^8c^5\right]$$

$$25 \quad \left(-\frac{4}{5}abx\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2x\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}a^2b^2\right) \cdot (6ax^2) \cdot (-a^3x^4) \cdot (-a^4b^3). \quad [-4a^{13}b^6x^8]$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di monomi dopo aver sommato i monomi simili nelle parentesi.

26 *Esercizio Svolto*

$$\left(-\frac{3}{2}xy^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}x^2y + \frac{2}{5}x^2y - 2x^2y + x^2y\right).$$

Determiniamo prima la somma algebrica fra i monomi simili all'interno della parentesi tonda e poi eseguiamo la moltiplicazione:

$$\left(-\frac{3}{2}xy^2\right) \cdot \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 2 + 1\right)x^2y\right] = \left(-\frac{3}{2}xy^2\right) \cdot \left(-\frac{14}{15}x^2y\right) = +\frac{7}{5}x^3y^3.$$

$$27 \quad (-2a^3b^2) \cdot \left(+\frac{1}{4}a^2bc - \frac{1}{2}a^2bc + \frac{3}{4}a^2bc - a^2bc\right) \quad [a^5b^3c]$$

$$28 \quad \left(-\frac{3}{4}abc - 2abc + \frac{1}{2}abc\right) \cdot \left(\frac{3}{2}a^2b + \frac{1}{4}a^2b\right) \cdot \left(\frac{8}{15}ab^3 - \frac{1}{2}ab^3\right). \quad \left[-\frac{21}{160}a^4b^5c\right]$$

29 *Esercizio Guidato*

$$\left(-\frac{7}{3}a^2b + \frac{2}{9}a^2b\right) \cdot \left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{4}a\right) + \left(\frac{3}{6}ab - \frac{1}{4}ab + ab\right) \cdot \left(\frac{1}{4}a^2 - a^2\right).$$

Determiniamo la somma algebrica fra i monomi simili all'interno delle parentesi tonde:

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\frac{7}{3} + \frac{2}{9}\right) \dots\right] \cdot \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)a\right] + \left[\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{4} + 1\right)ab\right] \cdot \left[(\dots)a^2\right] = \\ & = \left(-\frac{19}{9}a^2b\right) \cdot \left(\frac{5}{4}a\right) + \left(\frac{5}{4}ab\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}a^2\right) = \left(-\frac{95}{36} \dots\right) + \left(-\frac{15}{16} \dots\right) = \\ & = \left(-\frac{95}{36} - \frac{15}{16}\right)a^3b = -\frac{515}{144}a^3b. \end{aligned}$$

$$30 \quad \left(-\frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{7}{4}a^3b^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3}a^2b - a^2b\right) + \left(\frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{6}ab^2\right) \cdot \left(\frac{1}{5}a^4b + a^4b\right). \quad \left[-\frac{7}{30}a^5b^3\right]$$

$$31 \quad \left(\frac{3}{4}a^2x - \frac{1}{3}a^2x\right) \cdot \left(ab^2 + \frac{2}{7}ab^2\right) + \left(\frac{1}{4}a^2bx - \frac{1}{2}a^2bx\right) \cdot \left(2ab + ab - \frac{3}{7}ab\right). \quad \left[-\frac{3}{28}a^3b^2x\right]$$

Esegui le seguenti divisioni fra monomi.

32 *Esercizio Svolto*

a. $(+4a^3b^2c) : (-2a^2b) = -2a^{3-2}b^{2-1}c = -2abc;$

b. $\left(-\frac{2}{3}x^5y^3\right) : \left(-\frac{2}{5}x^3y\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)x^{5-3}y^{3-1} = +\frac{5}{3}x^2y^2;$

c. $\left(+\frac{3}{2}a^3x^3c\right) : (-a^2c) = \left(+\frac{3}{2}\right) \cdot (-1)a^{3-2}x^3c^{1-1} = -\frac{3}{2}ax^3.$

$$33 \quad \text{a. } (+34x^4y^3z^2) : (-17x^2yz^2); \quad \text{b. } \left(-\frac{1}{2}x^4y\right) : \left(+\frac{3}{4}x^3y\right); \quad \text{c. } \left(+\frac{6}{5}a^3b^3\right) : (-2ab^2).$$

Esegui le seguenti divisioni di monomi dopo aver sommato i monomi simili nelle parentesi.

34 *Esercizio Guidato*

$$\left(-\frac{2}{3}a^4b^2c + \frac{7}{6}a^4b^2c - a^4b^2c\right) : \left(a^3c - \frac{4}{3}a^3c - \frac{1}{2}a^3c\right).$$

Determiniamo il valore della somma algebrica fra monomi simili all'interno delle parentesi tonde:

$$\left[\left(\frac{-\dots + \dots - \dots}{6}\right)a^4b^2c\right] : \left[\left(\frac{\dots - \dots - \dots}{6}\right)a^3c\right] = \left(-\frac{1}{2}a^4b^2c\right) : \left(-\frac{5}{6}a^3c\right) = \frac{3}{5}ab^2.$$

$$35 \quad \left(-\frac{5}{4}x^5y^3 + \frac{1}{2}x^5y^3\right) : \left(-\frac{3}{2}x^4y - \frac{1}{3}x^4y + x^4y\right). \quad \left[\frac{9}{10}xy^2\right]$$

$$36 \quad \left(-\frac{7}{6}x^7y^8z^4 + \frac{1}{2}x^7y^8z^4 + \frac{1}{3}x^7y^8z^4 - \frac{5}{4}x^7y^8z^4\right) : \left(\frac{1}{4}x^3y^2z\right). \quad \left[-\frac{19}{3}x^4y^6z^3\right]$$

$$37 \quad \left(\frac{1}{4}a^5b^3z^4 + \frac{5}{3}a^5b^3z^4\right) : \left(-\frac{1}{4}a^2bz + \frac{3}{2}a^2bz - \frac{5}{8}a^2bz\right). \quad \left[\frac{46}{15}a^3b^2z^3\right]$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni con i monomi.

38 *Esercizio Svolto*

$$\left(+\frac{1}{2}a^2b^3c + \frac{2}{3}a^2b^3c - \frac{5}{6}a^2b^3c\right) : \left(-\frac{3}{2}ab^2c\right) + \left(-\frac{7}{6}a^4b^2 + \frac{1}{3}a^4b^2\right) : (+a^3b).$$

Eseguiamo le somme algebriche all'interno delle parentesi tonde:

$$\begin{aligned} &= \left(+\frac{1}{3}a^2b^3c\right) : \left(-\frac{3}{2}ab^2c\right) + \left(-\frac{5}{6}a^4b^2\right) : (+a^3b) = \\ &= \left(-\frac{2}{9}ab\right) + \left(-\frac{5}{6}ab\right) = \left(-\frac{2}{9} - \frac{5}{6}\right)ab = -\frac{19}{18}ab \end{aligned}$$

$$39 \quad \left(+2x^3y^2 + \frac{2}{3}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^3y^2\right) : \left(+\frac{1}{4}x\right) + \left(\frac{2}{5}ax^2y^3 + \frac{1}{2}ax^2y^3 - ax^2y^3\right) : \left(+\frac{1}{2}ay\right). \quad \left[\frac{127}{15}x^2y^2\right]$$

$$40 \quad \left(\frac{5}{6}abx^2 + \frac{1}{4}abx^2 - \frac{5}{12}abx^2\right) : (4ab - 2ab) - \left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right). \quad \left[\frac{29}{60}x^2\right]$$

$$41 \quad \left(\frac{3}{4}x^3y^2z - \frac{2}{3}x^3y^2z\right) : (2xy^2) + \left(\frac{2}{3}x^2yz + \frac{1}{5}x^2yz - \frac{4}{15}x^2yz\right) : \left(\frac{3}{2}y\right). \quad \left[\frac{53}{120}x^2z\right]$$

$$42 \quad \left(-\frac{7}{10}a^4b^3c^2 + a^4b^3c^2\right) : \left(\frac{2}{5}a^2b^2c^2\right) + \left(-\frac{3}{2}x^2a^3b^3 + \frac{1}{3}x^2a^3b^3\right) : \left(-\frac{1}{2}x^2ab^2\right). \quad \left[\frac{37}{12}a^2b\right]$$

Calcola il valore delle seguenti potenze di monomi.

43 *Esercizio Svolto*

a. $(+4xy)^2 = (+4xy) \cdot (+4xy) = +16x^2y^2;$

b. $\left(-\frac{2}{3}x^2yz^2\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2yz^2\right) = -\frac{8}{27}x^6y^3z^6;$

c. $\left(-\frac{4}{3}a^3b^4c\right)^4 = +\frac{256}{81}a^{3 \cdot 4}b^{4 \cdot 4}c^{1 \cdot 4} = +\frac{256}{81}a^{12}b^{16}c^4.$

$$44 \quad \text{a. } (-2a^3c)^3; \quad \text{b. } \left(-\frac{1}{2}x^6y^4\right)^5; \quad \text{c. } \left(+\frac{3}{4}a^2b^3c^2\right)^4.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni contenenti potenze di monomi aventi la stessa base.

45 *Esercizio Svolto*

$$(-2a^2b^3c)^5 \cdot (-2a^2b^3c)^3 : (-2a^2b^3c)^6 = (-2a^2b^3c)^{5+3-6} = (-2a^2b^3c)^2 = +4a^4b^6c^2.$$

$$46 \quad (+4x^3y^2b)^6 : (+4x^3y^2b)^5 \cdot (+4x^3y^2b)^2. \quad [64x^9y^6b^3]$$

$$47 \quad (-2a^2b^2)^4 \cdot (-2a^2b^2)^3 : (-2a^2b^2)^5. \quad [4a^4b^4]$$

$$48 \quad \left(-\frac{5}{4}x^2y^3z\right)^6 : \left(-\frac{5}{4}x^2y^3z\right)^3 : \left(-\frac{5}{4}x^2y^3z\right)^2. \quad \left[-\frac{5}{4}x^2y^3z\right]$$

$$49 \quad \left(-\frac{1}{3}x^5y^2\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^5y^2\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}x^5y^2\right)^5. \quad \left[\frac{1}{9}x^{10}y^4\right]$$

$$50 \quad \left(+\frac{2}{5}a^3b^4c^2\right)^4 : \left(+\frac{2}{5}a^3b^4c^2\right)^3 \cdot \left(+\frac{2}{5}a^3b^4c^2\right). \quad \left[\frac{4}{25}a^6b^8c^4\right]$$

$$51 \quad \left(-\frac{7}{3}a^4c^2d\right)^2 \cdot \left(-\frac{7}{3}a^4c^2d\right)^4 \cdot \left(-\frac{7}{3}a^4c^2d\right)^3 : \left(-\frac{7}{3}a^4c^2d\right)^7. \quad \left[\frac{49}{9}a^8c^4d^2\right]$$

$$52 \quad \left[\left(-\frac{3}{4}ab^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}ab^2\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}ab^2\right)^7\right]^2. \quad \left[\frac{9}{16}a^2b^4\right]$$

$$53 \quad \left\{ \left[\left(+\frac{4}{7}x^2y \right) \cdot \left(+\frac{4}{7}x^2y \right)^2 \right]^4 : \left[\left(+\frac{4}{7}x^2y \right)^2 \cdot \left(+\frac{4}{7}x^2y \right)^2 \right]^3 \right\}^5 \quad [1]$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni contenenti potenze di monomi.

54 *Esercizio Svolto*

$$\begin{aligned} & (-3a^2b^3)^3 \cdot (+a^2bc) + (-4a^{10}b^{14}c) : (+2ab^2)^2 = \\ & = (-27a^6b^9) \cdot (+a^2bc) + (-4a^{10}b^{14}c) : (+4a^2b^4) = (-27a^8b^{10}c) + (-a^8b^{10}c) = -28a^8b^{10}c. \end{aligned}$$

$$55 \quad (+5x^2y^3z)^3 : (-x^2y^5) + (-6x^3y^2z^3)^2 : (+3x^2z^3). \quad [-113x^4y^4z^4]$$

$$56 \quad \left(-\frac{2}{3}a^3b^2c\right)^3 \cdot \left(+\frac{9}{8}bc\right) + \left(-\frac{1}{3}a^{11}b^7c^6\right) : (+ac)^2. \quad \left[-\frac{2}{3}a^9b^7c^4\right]$$

$$57 \quad \left(+\frac{3}{2}x^4y^3\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}xy^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^5y^4\right)^2 : \left(\frac{3}{5}x\right). \quad \left[\frac{2}{3}x^9y^8\right]$$

58 *Esercizio Guidato*

$$\begin{aligned} & \left[(-3a^2b^3)^3 + (2a^3)^2 \cdot (-3b^9) - (-2a^2b)^2 \cdot (-a^2b^7)\right] : \left[(-3ab^2) \cdot (-4a^2b^2)^2\right] = \\ & = \left[-27a^6b^9 + 4a^6 \cdot (-3b^9) - (+4a^4b^2) \cdot (-a^2b^7)\right] : \left[(-3ab^2) \cdot (+16a^4b^4)\right] = \\ & = (-27a^6b^9 - 12a^6b^9 + 4a^6b^9) : [-48a^5b^6] = \\ & = -12a^6b^9 : [-48a^5b^6] = \frac{12}{48}ab^3. \end{aligned}$$

$$59 \quad \left[(4x^2y^3) \cdot y^2 - (-2x^2y^2)^2 \cdot (xy) : (2x^3) + 2x \cdot (xy^5)\right] : \left[(-2x^2y)^2 : (x^2y)\right]. \quad [y^4]$$

$$60 \quad \left[\left(+\frac{1}{4}abx\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}ab^2\right) : \left(\frac{1}{4}ab^2x\right)^2\right]^3 : \left[-\left(\frac{5}{4}a - \frac{7}{12}a\right)\right]^2. \quad \left[-\frac{2}{3}a\right]$$

I POLINOMI

richiami della teoria

- Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi non simili tra loro;
- il **grado complessivo** di un polinomio è il maggiore fra i gradi dei monomi che costituiscono il polinomio stesso;
- il **grado relativo** di un polinomio rispetto ad una lettera è il massimo esponente con cui quella lettera compare nel polinomio;
- un **polinomio è ordinato** secondo le potenze decrescenti o crescenti di una lettera, se gli esponenti della lettera stessa si succedono in modo decrescente o crescente;
- un polinomio è **completo** rispetto a una lettera quando in esso compaiono tutti gli esponenti di quella lettera ordinati dal valore massimo a zero (o viceversa);
- un **polinomio è omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado;
- per **moltiplicare un polinomio per un monomio** basta moltiplicare ciascun termine del polinomio per il monomio ed eseguire la somma algebrica dei prodotti ottenuti;
- per **moltiplicare due polinomi** si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo e poi si esegue la somma algebrica dei prodotti ottenuti;
- per **moltiplicare più di due polinomi** si moltiplica, nell'ordine, il primo polinomio per il secondo, il prodotto ottenuto per il terzo polinomio, il prodotto ottenuto per il quarto polinomio e così via fino a moltiplicare l'ultimo polinomio. Dopo ogni prodotto è utile eseguire la somma algebrica dei prodotti ottenuti;
- per **dividere un polinomio per un monomio**, non nullo, si divide ciascun termine del polinomio per il monomio e poi si esegue la somma algebrica dei quozienti ottenuti.

COMPrensione della Teoria

61 Il polinomio è:

- a. la somma algebrica di più monomi non simili tra loro;
- c. la somma algebrica di più monomi simili tra loro;
- b. il prodotto di più monomi non simili tra loro.

62 Il grado complessivo del polinomio $+ \frac{3}{4}a^2b^2c - 5a^3b^2 + \frac{1}{4}a^2b^3c^2$ è:

- a. cinque;
- b. sette;
- c. diciassette.

63 Completa la seguente regola:

si dice grado relativo di un polinomio rispetto ad una lettera il con cui quella lettera compare nel polinomio.

64 Indica quale dei seguenti polinomi è ordinato, quale è completo e quale è omogeneo:

a. $+3a^4b + 5a^3bc^2 - \frac{1}{4}a^2b^2c^3 + \frac{3}{2}a + \frac{7}{8}$;

b. $-4xy^3 + \frac{5}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{2}{3}y^4$;

c. $+3a^5b - 2a^3b^2 - \frac{3}{5}ab^3 + b^6$.

APPLICAZIONE

Calcola le seguenti somme algebriche di polinomi.

65 *Esercizio Svolto*

$$\begin{aligned} & (-2a^3b^2 + 4a^2bx - 5a^3b^2) - (+6a^3b^2 + 2a^2bx - a^2bx) = \\ & = \underline{2a^3b^2} + \underline{4a^2bx} - \underline{5a^3b^2} - \underline{6a^3b^2} - \underline{2a^2bx} + \underline{a^2bx} = \\ & = (-2 - 5 - 6)a^3b^2 + (+4 - 2 + 1)a^2bx = -13a^3b^2 + 3a^2bx. \end{aligned}$$

$$66 \quad (-4x^3y^2z + 4x^2ay + 2x^2ay) - (+3x^3y^2z + 2x^2ay) + (-5x^3y^2z - 3x^2ay). \quad [-12x^3y^2z + x^2ay]$$

$$67 \quad -\left(\frac{2}{3}a^2b^3 + \frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{3}{2}a^3b - a^2b^3\right) - \left(\frac{1}{3}a^2b^3 - 2a^3b\right). \quad \left[-\frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{1}{2}a^3b\right]$$

$$68 \quad \left(\frac{1}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^2yz^2 - \frac{3}{4}x^3y + xz\right) - \left(\frac{2}{3}x^3y + \frac{3}{2}xz\right). \quad \left[-\frac{7}{6}x^3y + \frac{2}{3}x^2yz^2 - \frac{1}{2}xz\right]$$

$$69 \quad \left(-\frac{1}{4}ax^2 + \frac{2}{3}ax^2 - \frac{1}{4}ab + 2\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}ab - 5ax^2\right) - \left(\frac{15}{4}ax^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{6}{5}\right). \quad \left[\frac{5}{3}ax^2 + \frac{7}{12}ab - \frac{7}{10}\right]$$

Calcola il valore delle seguenti moltiplicazioni tra un monomio e un polinomio.

70 *Esercizio Svolto*

$$(-3a^2b^2c) \cdot (+2a + 4a^3b - 2ax^2) = -6a^3b^2c - 12a^5b^3c + 6a^3b^2cx^2.$$

$$71 \quad (+2x^2y^3z^2) \cdot (-2xy^3 + 3x^2y^2 + 4x^2z^2).$$

$$72 \quad \left(-\frac{4}{5}a^3b\right) \cdot \left(\frac{2}{3}ab^2 + \frac{2}{3}a^2b^3 - a\right).$$

$$73 \quad \left(-\frac{7}{3}x^2y^3z - 3x^2y^3 + \frac{2}{3}xz\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y\right).$$

$$74 \quad \left(\frac{3}{2}abx\right) \cdot \left(\frac{1}{4}ab - \frac{5}{3}a^2b + 2\right).$$

Calcola il valore delle seguenti moltiplicazioni di polinomi e riduci, eventualmente, i termini simili.

75 *Esercizio Svolto*

$$\begin{aligned} & (+3a^2b^3 - 2ab^2) \cdot (-2a^2b^2 + 4a^3b^3) = \underline{-6a^4b^5} + 12a^5b^6 + 4a^3b^4 - \underline{8a^4b^5} = \\ & = (-6 - 8)a^4b^5 + 12a^5b^6 + 4a^3b^4 = -14a^4b^5 + 12a^5b^6 + 4a^3b^4. \end{aligned}$$

$$76 \quad (-2a^2c^3 + 3a^3c) \cdot (+4ac^2 + 2a^2). \quad [-8a^3c^5 + 8a^4c^3 + 6a^5c]$$

$$77 \quad \left(\frac{3}{7}a^2x + b\right) \cdot \left(\frac{1}{4}a - 3b\right). \quad \left[\frac{3}{28}a^3x - \frac{9}{7}a^2bx + \frac{1}{4}ab - 3b^2\right]$$

$$78 \quad \left(\frac{3}{7}xy + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 3y\right). \quad \left[\frac{17}{14}x^2y + \frac{9}{7}xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 9xy\right]$$

$$79 \quad \left(\frac{1}{2}ab - \frac{1}{3}ac - a\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}a + 2ab\right). \quad \left[-\frac{11}{4}a^2b + a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2c - \frac{2}{3}a^2bc + \frac{3}{2}a^2\right]$$

$$80 \quad (2ab + 3x - y) \cdot (a - 2x + y).$$

$$[2a^2b - 4abx + 2aby + 3ax - 6x^2 + 5xy - ay - y^2]$$

81 *Esercizio Guidato*

$$\left(-\frac{1}{2}xz + 2xy\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}yz + \frac{1}{3}x\right).$$

Moltiplichiamo il primo polinomio per il secondo:

$$\left(-\frac{1}{3}x^2y - \frac{2}{3}xyz + \frac{4}{3}x^2y + \frac{8}{3}xy^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}yz + \frac{1}{3}x\right).$$

Nella prima parentesi ci sono due monomi simili; stabiliamo comunque di moltiplicare il risultato ottenuto per il terzo polinomio ed eseguire le somme algebriche dei monomi simili nel prossimo passaggio:

$$= +\frac{5}{6}x^2y^2z - \frac{1}{9}x^3y + \frac{5}{3}xy^2z^2 - \frac{2}{9}x^2yz - \frac{10}{3}x^2y^2z + \frac{4}{9}x^3y - \frac{20}{3}xy^3z + \frac{8}{9}x^2y^2 =$$

Effettuiamo la riduzione dei termini simili:

$$= \left(\frac{\dots - \dots}{6}\right)x^2y^2z + \left(\frac{-\dots + \dots}{\dots}\right)x^3y + \frac{5}{3}xy^2z^2 - \frac{2}{9}x^2yz - \frac{20}{3}xy^3z + \dots x^2y^2 =$$

$$= -\frac{5}{2}x^2y^2z + \frac{1}{3}x^3y + \frac{5}{3}xy^2z^2 - \frac{2}{9}x^2yz - \frac{20}{3}xy^3z + \frac{8}{9}x^2y^2.$$

$$82 \quad \left(\frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{4}ab + a\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a + b\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}ab + 3a\right).$$

$$\left[-\frac{1}{2}a^4b^2 + 3a^4b - \frac{3}{4}a^3b^3 + \frac{19}{4}a^3b^2 - \frac{11}{6}a^3b + 2a^3 + \frac{3}{8}a^2b^3 - \frac{11}{4}a^2b^2 + 3a^2b\right]$$

Calcola il quoziente della seguente divisione tra un polinomio e un monomio.

83 *Esercizio Svolto*

$$(12a^4b^2 + 9a^3b^5 - 27a^4b^4) : (-3a^3b^2) =$$

$$= [(+12) : (-3)]a^{4-3}b^{2-2} + [(+9) : (-3)]a^{3-3}b^{5-2} + [(-27) : (-3)]a^{4-3}b^{4-2} = -4a - 3b^3 + 9ab^2.$$

$$84 \quad (7x^4y^5 - 21x^3y^5 + 49x^3y^3z) : (+7x^2y^3).$$

$$85 \quad \left(\frac{5}{3}a^2b^3c - \frac{4}{9}a^3b^4c^2 + 2a^4c^5\right) : \left(\frac{3}{2}a^2c\right).$$

$$86 \quad \left(\frac{1}{5}x^4y^3z^2 + \frac{3}{5}x^5y^4 - \frac{4}{3}x^3y^4\right) : \left(-\frac{2}{3}x^3y^3\right).$$

$$87 \quad \left(\frac{3}{8}a^2b^3 - \frac{7}{6}a^5b^2x - \frac{4}{3}a^4b^2 + \frac{8}{5}a^3b^4 - a^2b\right) : \left(\frac{1}{2}a^2b\right).$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni con i polinomi.

88 *Esercizio Svolto*

$$(a - b) \cdot (2a + 3b) - (3a - b) \cdot (2a - 2b) =$$

$$= (2a^2 + 3ab - 2ab - 3b^2) - (6a^2 - 6ab - 2ab + 2b^2) = (2a^2 + ab - 3b^2) - (6a^2 - 8ab + 2b^2) =$$

$$= 2a^2 + ab - 3b^2 - 6a^2 + 8ab - 2b^2 = -4a^2 + 9ab - 5b^2.$$

$$89 \quad (2x - y) \cdot (3x - 2y) + (x - 3y) \cdot (-x + y).$$

$$[5x^2 - 3xy - y^2]$$

90 *Esercizio Guidato*

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (3a - 4b) - (a + b) \cdot (-a + 3b) + \frac{2}{3} \cdot (3a + b) &= a - \dots b - (-a^2 + 3ab - \dots + 3b^2) + 2a + \dots b = \\ &= a - \dots b + a^2 - 3ab + \dots - 3b^2 + 2a + \dots b = \dots a - \dots b + a^2 - \dots ab - 3b^2. \end{aligned}$$

$$91 \quad -\frac{3}{4} \cdot (a - 2b) - \frac{1}{2} \cdot (-2a - 2b) + (a - b) \cdot (3 + 2b).$$

$$\left[\frac{13}{4}a - \frac{1}{2}b - 2b^2 + 2ab \right]$$

$$92 \quad \left(\frac{1}{4}a - 2b \right) \cdot (a - 3) - a^2 + 3a \cdot (b + 1) + \left(2a^2 + \frac{3}{2}ab \right) : \left(-\frac{4}{5}a \right).$$

$$\left[-\frac{3}{4}a^2 + ab - \frac{1}{4}a + \frac{33}{8}b \right]$$

I PRODOTTI NOTEVOLI

richiami della teoria

- Il **prodotto della somma di due monomi per la loro differenza** è uguale al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio;
- il **quadrato di un binomio** è uguale al quadrato del primo monomio, più il doppio prodotto del primo monomio per il secondo monomio, più il quadrato del secondo monomio;
- il **cubo di un binomio** è uguale al cubo del primo monomio, più il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo monomio, più il triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo monomio, più il cubo del secondo monomio.

COMPrensione della Teoria

- 93** Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale:
- a. al quadrato del primo monomio più il quadrato del secondo monomio;
 - b. al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio;
 - c. al primo monomio meno il secondo monomio.

- 94** Il quadrato di un binomio è uguale:
- a. al quadrato del primo termine più il doppio prodotto del primo termine per il secondo termine, più il quadrato del secondo termine;
 - b. al quadrato del primo termine più il prodotto del primo termine per il secondo termine, più il quadrato del secondo termine;
 - c. al quadrato del primo termine più il quadrato del secondo termine.

- 95** Qual è il valore di $(x - y)^3$?
- a. $x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3$;
 - b. $x^3 - 3x^2y^2 + 3xy^3 - y^3$;
 - c. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

APPLICAZIONE

Calcola il valore del prodotto delle seguenti somme di due monomi per le loro differenze.

96 *Esercizio Svolto*

$$\text{a. } (2ab - 3b) \cdot (2ab + 3b) = 4a^2b^2 - 9b^2; \quad \text{b. } \left(\frac{1}{2}a - 2b^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a + 2b^2\right) = \frac{1}{4}a^2 - 4b^4.$$

$$\text{97 a. } (2xy + 3x^2) \cdot (2xy - 3x^2); \quad \text{b. } (2ab - x) \cdot (2ab + x).$$

$$\text{98 a. } \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}xz\right) \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}xz\right); \quad \text{b. } \left(-\frac{1}{3}a - 2a^3b\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}a + 2a^3b\right).$$

$$\text{99 a. } \left(-2x^3y + \frac{1}{2}xy\right) \cdot \left(-2x^3y - \frac{1}{2}xy\right); \quad \text{b. } \left(\frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^3\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{4}a^3\right).$$

Calcola il valore dei seguenti quadrati di binomi.

100 *Esercizio Svolto*

$$\text{a. } (3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2; \quad \text{b. } \left(\frac{4}{5}x^2y^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{16}{25}x^4y^4 - \frac{4}{5}x^3y^2 + \frac{1}{4}x^2.$$

101 a. $(4a + 5ab)^2$; b. $\left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{5}b^3\right)^2$.

102 a. $\left(\frac{1}{2}a^2b + \frac{3}{4}a\right)^2$; b. $\left(-2x + \frac{3}{2}xy\right)^2$.

103 a. $\left(\frac{3}{5}a^3x - \frac{2}{3}xy^2\right)^2$; b. $\left(-3ab^2 - \frac{3}{2}a^2\right)^2$.

Calcola il valore dei seguenti cubi di binomi.

104 *Esercizio Guidato*

a. $(-a + 2b)^3 = -a^3 + 6... - 12... + 8b^3$; b. $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}y\right)^3 = ...x^6 + ...x^4y + ...x^2y^2 + ...y^3$.

105 a. $\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)^3$; b. $\left(-\frac{1}{3}ab^2 + 2a\right)^3$.

Calcola il valore delle seguenti espressioni con i prodotti notevoli.

106 *Esercizio Guidato*

$$\left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 + (a + 2b) \cdot (a - 3) + \left(\frac{1}{3}a + b\right) \cdot \left(\frac{1}{3}a - b\right).$$

Come prima operazione svolgiamo i prodotti notevoli:

$$= \left(\frac{1}{4}a^2 + \dots + \dots\right) + (a + 2b) \cdot (a - 3) + \left(\frac{1}{9}a^2 - \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + ab + \dots + a^2 - 3a + \dots - 6\dots + \frac{1}{9}a^2 - \dots = \frac{49}{36}a^2 + 3ab - 3a - 6b.$$

107 $(x + 2y)^3 + (x + 2y) \cdot (xy - y^2)$.

$[x^3 + 6y^3 + 7x^2y + 13xy^2]$

108 $(2x + 3y) \cdot (2x - 3y) - (2x - 3y)^2 + 3y \cdot (y - 3x)$.

$[3xy - 15y^2]$

109 $(a^2 - 1)^2 \cdot (a^2 + 1)^2 - (a - 2)^2 \cdot (a + 2)^2 - 3a \cdot (-a)^3$.

$[a^8 + 8a^2 - 15]$

110 $(x + 1)^2 - 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) + (x - 3)^2 - 4 \cdot (x - 1)^2$.

$[-4x^2 + 8x + 12]$

111 $\left\{ \left[\left(\frac{1}{5}a - \frac{3}{2}b \right)^2 - \left(\frac{1}{5}a + \frac{3}{2}b \right)^2 \right]^2 - \left(\frac{6}{5}ab + \frac{3}{5}a^2b^2 \right) \right\} : \left(-\frac{9}{5}ab \right)$.

$\left[-\frac{7}{15}ab + \frac{2}{3} \right]$

112 $\left(a - \frac{2}{3}b \right) \cdot \left(\frac{2}{3}b + a \right) - \left(\frac{1}{3}b + a \right)^2 - \left(-\frac{1}{3}a^2b^2 \right) : \left(\frac{4}{3}ab \right)$.

$\left[-\frac{5}{9}b^2 - \frac{5}{12}ab \right]$

113 $\left\{ \left[\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y \right)^2 - \left(\frac{2}{3}y - \frac{3}{2}x \right)^2 \right]^2 - (2x^2 + y)^2 + (2x^2 - y)^2 \right\} - [(2x - y)^2 - (y - 2x)^2]^2$.

$[16x^2y^2 - 8x^2y]$

114 $[(a + b)^3 + (a - b)^3 + 6a \cdot (a + b) \cdot (a - b) - 7a^3 + 1]^2 - (a^3 - 1)^2$.

$[4a^3]$

115 $\left(\frac{3}{4}a - b \right)^2 + (a - 2b)^3 - \left(\frac{3}{4}a - 2b \right) \cdot \left(\frac{3}{4}a + 2b \right) - a^3 + 8b^3$.

$\left[5b^2 - \frac{3}{2}ab - 6a^2b + 12ab^2 \right]$