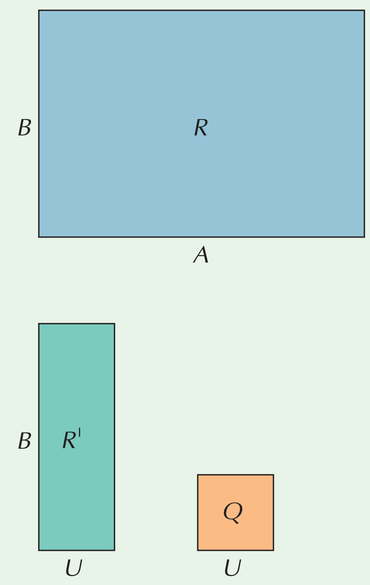
La dimostrazione del teorema sull'area del rettangolo

Teorema. La misura dell'area di un rettangolo è uguale al prodotto della misura della sua base per quella della sua altezza.

Dimostrazione.

Consideriamo un rettangolo R di base A e altezza B (indichiamo con le lettere maiuscole i segmenti e con quelle minuscole corrispondenti le loro misure) e costruiamo un rettangolo ausiliario R' che abbia per base un segmento congruente all'unità di misura U scelta per le lunghezze e come altezza il segmento B; costruiamo poi anche il quadrato Q di lato congruente ad U (***figura 1***).

Figura 1



I due rettangoli R e R', avendo le altezze congruenti, sono proporzionali alle rispettive basi e possiamo quindi scrivere che

$$R : R' = A : U$$

R' e Q, avendo le stesse basi, sono invece proporzionali alle rispettive altezze e possiamo scrivere che

$$R' : Q = B : U$$

Sappiamo inoltre che se quattro grandezze sono in proporzione, lo sono anche le loro misure, quindi, se indichiamo con r, r' e 1 rispettivamente le aree di R, R', e Q e con a, b e 1 le misure rispettivamente dei segmenti A, B e U, le precedenti proporzioni fra grandezze valgono anche fra le loro misure e quindi

$$r : r' = a : 1 \qquad \text{e} \qquad r' : 1 = b : 1$$

da cui, applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche, si ottiene

$$r' \cdot a = r \qquad \text{e} \qquad r' = b$$

Confrontando queste ultime relazioni otteniamo poi che

$$r = b \cdot a$$

cioè la misura dell'area del rettangolo R è data dal prodotto della misura della sua base per quella della sua altezza. ◀