Ripasso e integrazioni

1. Le equazioni razionali

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

1.1 Le equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado ridotta in forma normale ha sempre la forma

$ax^2 + bx + c = 0$ dove si suppone che sia $a \neq 0$

e le sue soluzioni si trovano applicando la formula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se b è un numero pari si può applicare la formula $\dfrac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

Se l'equazione non è completa si possono applicare metodi alternativi, come si può vedere negli esempi che seguono.

ESEMPI

1. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ applicando la formula risolutiva si ottiene

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

quindi l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

2. $5x^2 - 6x + 7 = 0$ applicando la formula ridotta si ottiene

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-35}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{-26}}{5}$$

quindi l'equazione non ha soluzioni reali.

3. $4x^2 + 12x + 9 = 0$ applicando la formula ridotta si ottiene

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{4} = -\frac{3}{2}$$

quindi l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.

4. $9x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x = \pm\dfrac{1}{3}$

5. $3x^2 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x(3x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \dfrac{2}{3}$

1.2 Le equazioni di grado superiore al secondo

Non avendo a disposizione formule per la risoluzione dell'equazione $P(x) = 0$ quando $P(x)$ è di grado superiore al secondo, la sola possibilità che abbiamo di trovarne le radici è quella di scomporre $P(x)$ in fattori al più di secondo grado ed applicare poi la legge di annullamento del prodotto. Se $P(x)$ non si può scomporre, non abbiamo la possibilità di risolvere algebricamente l'equazione $P(x) = 0$.

Legge di annullamento del prodotto:

$$A(x) \cdot B(x) = 0$$

se e solo se

$$A(x) = 0 \lor B(x) = 0$$

ESEMPI

1. $6x^3 - 11x^2 - 5x + 12 = 0$

Per scomporre il polinomio al primo membro ricerchiamo i possibili binomi divisori della forma $(x - a)$ dove a è un divisore di 12 :

$P(1) = 6 - 11 - 5 + 12 = 2$ non è divisibile per $(x - 1)$

$P(-1) = -6 - 11 + 5 + 12 = 0$ è divisibile per $(x + 1)$

Applichiamo lo schema di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 6 & -11 & -5 & 12 \\ -1 & & -6 & 17 & -12 \\ \hline & 6 & -17 & 12 & 0 \end{array}$$

L'equazione che dobbiamo risolvere è: $(x + 1)(6x^2 - 17x + 12) = 0$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

- una soluzione è $x = -1$
- le altre si ottengono annullando il secondo fattore: $6x^2 - 17x + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{3} \lor x = \frac{3}{2}$

2. $2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0$

Per scomporre il polinomio effettuiamo dei raccoglimenti a fattor comune:

$$2x^2(x - 3) - (x - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 3)(2x^2 - 1) = 0$$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

- $x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$
- $2x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. LE DISEQUAZIONI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 18

2.1 Le disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado assume la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

con $a \neq 0$ e nella quale, cambiando eventualmente i segni e il verso, possiamo sempre supporre che sia $a > 0$.

La procedura per risolvere questa disequazione è la seguente:

- si risolve l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ad essa associata
- si rappresenta la parabola $y = ax^2 + bx + c$ evidenziando soltanto la sua posizione rispetto all'asse delle ascisse
- si individuano gli intervalli in corrispondenza dei quali la parabola assume rispettivamente valori positivi oppure negativi.

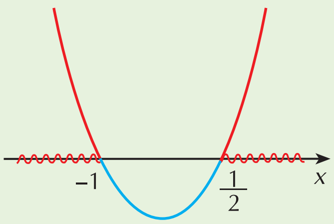
ESEMPI

1. $2x^2 + x - 1 > 0$

Consideriamo la parabola di equazione $y = 2x^2 + x - 1$ ad essa associata che ha concavità rivolta verso l'alto; le sue intersezioni con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione $2x^2 + x - 1 = 0$, cioè i punti di ascissa -1 e $\frac{1}{2}$ (***figura 1***). I valori di x che rendono positivo il trinomio sono quelli esterni all'intervallo da essi individuato, quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è dato dagli intervalli

$$x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2}$$

Figura 1

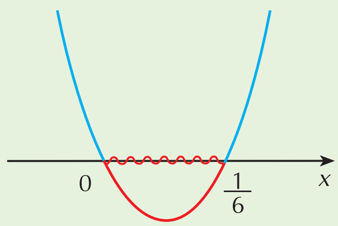


2. $6x^2 - x < 0$

La parabola associata al binomio, che ha equazione $y = 6x^2 - x$, interseca l'asse x nei punti di ascissa 0 e $\frac{1}{6}$ ed ha concavità rivolta verso l'alto (***figura 2***). Dal grafico deduciamo allora che l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato dall'intervallo

$$0 < x < \frac{1}{6}$$

Figura 2

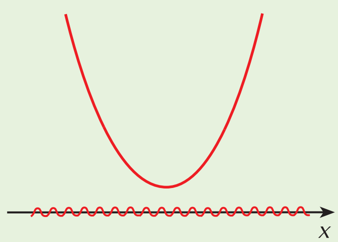


3. $4x^2 - 12x + 10 > 0$

L'equazione $4x^2 - 12x + 10 = 0$ non ha soluzioni reali perché ha un discriminante negativo: $\frac{\Delta}{4} = 36 - 40 = -4$.

Questo significa che la parabola di equazione $y = 4x^2 - 12x + 10$, che volge la concavità verso l'alto, non interseca l'asse x ed assume sempre valori positivi; l'insieme delle soluzioni è dunque R.

Figura 3



2.2 Le disequazioni di grado superiore al secondo e frazionarie

Una disequazione di questo tipo, una volta sviluppati i calcoli, si può sempre scrivere nella forma

$E(x) \gtrless 0$ se è intera $\qquad\qquad \frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0$ se è frazionaria

dove $E(x)$, $A(x)$, $B(x)$ sono polinomi di grado anche superiore al secondo.

Le soluzioni si trovano in questo modo:

- si scompongono in fattori al più di secondo grado i polinomi della disequazione
- si studia il segno di ogni fattore ottenuto ponendo ciascuno di essi maggiore di zero
- si costruisce la tabella dei segni (una riga per ogni fattore di cui si è studiato il segno)
- si deduce il segno complessivo
- si scelgono gli intervalli delle soluzioni.

Ricordiamo poi che, nelle disequazioni frazionarie, **non è possibile eliminare i denominatori che contengono l'incognita** perché di essi non è noto il segno.

ESEMPI

1. $x^3 + 2x - 3x^2 - 6 \geq 0$

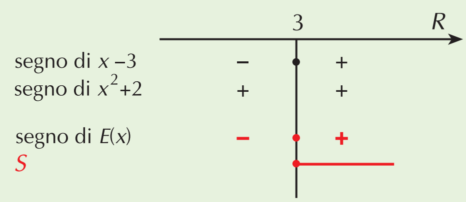
Scomponiamo in fattori il polinomio $E(x)$ al primo membro ottenendo la disequazione equivalente

$$(x-3)(x^2+2) \geq 0$$

Studiamo il segno di ogni fattore del prodotto chiedendoci quando ciascuno di essi è positivo o nullo:

$x - 3 \geq 0$ se $x \geq 3$

$x^2 + 2 \geq 0$ $\forall x \in R$



E' evidente che, dove un polinomio non è positivo o nullo, è negativo. Riportiamo allora sulla retta dei numeri reali il segno di ciascun fattore come nella tabella a lato (una linea di segni per ogni fattore); osserva il pallino nero in corrispondenza del 3 per indicare che il polinomio $x - 3$ si annulla per tale valore. Dall'analisi della tabella risulta che il polinomio $E(x)$ è positivo se è $x > 3$, nullo se è $x = 3$, negativo se è $x < 3$.
La disequazione data chiede di stabilire quando il polinomio è positivo o nullo, l'insieme delle soluzioni è quindi dato dall'intervallo:

$$x \geq 3$$

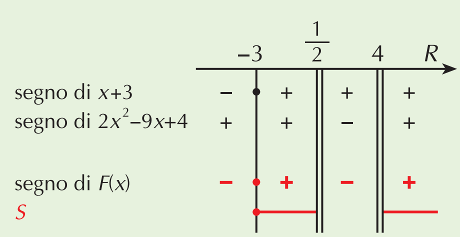
2. $\dfrac{x+3}{2x^2 - 9x + 4} \geq 0$

Poiché deve essere $2x^2 - 9x + 4 \neq 0$, il dominio della disequazione è l'insieme $D = R - \left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$.

Studiamo la variazione dei segni dei polinomi che la compongono, tenendo presente che stiamo ricercando anche i valori di x che annullano la frazione

$x + 3 \geq 0$ se $x \geq -3$

$2x^2 - 9x + 4 > 0$ se $x < \frac{1}{2} \vee x > 4$



Nella tabella dei segni mettiamo una linea doppia in corrispondenza dei valori esclusi dal dominio.
Dall'analisi della tabella deduciamo le soluzioni:

$$-3 \leq x < \frac{1}{2} \vee x > 4$$

2.3 I sistemi di disequazioni

Risolvere un sistema di disequazioni significa chiedersi quando tutte le disequazioni del sistema sono verificate contemporaneamente. La soluzione di un sistema si determina quindi calcolando l'intersezione degli insiemi soluzione delle disequazioni che lo compongono.
Tale intersezione può essere facilmente individuata mediante una tabella in cui vengano riportati gli intervalli soluzione di ciascuna disequazione mediante linee a tratto continuo. L'insieme intersezione è costituito dagli intervalli in cui tutte le disequazioni sono verificate; dal punto di vista grafico quindi dagli intervalli in cui troviamo che tutte le linee sono a tratto continuo.

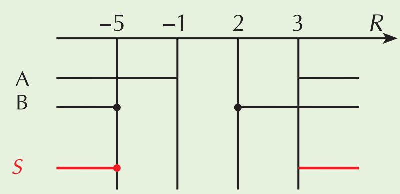
ESEMPI

1. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 & (\mathbf{A}) \\ x^2 + 3x - 10 \geq 0 & (\mathbf{B}) \end{cases}$

Determiniamo le soluzioni delle due disequazioni del sistema, indicate con **A** e **B**:

$(\mathbf{A}) \quad x^2 - 2x - 3 > 0 \qquad \text{se} \qquad x < -1 \ \vee \ x > 3$

$(\mathbf{B}) \quad x^2 + 3x - 10 \geq 0 \qquad \text{se} \qquad x \leq -5 \ \vee \ x \geq 2$



Tracciata la retta dei numeri reali, riportiamo le soluzioni di ciascuna disequazione parallelamente ad essa come nella tabella a lato.

Gli intervalli dove tutte le disequazioni del sistema sono verificate sono indicati dalla linea rossa. Nel nostro caso, le soluzioni del sistema sono quindi:

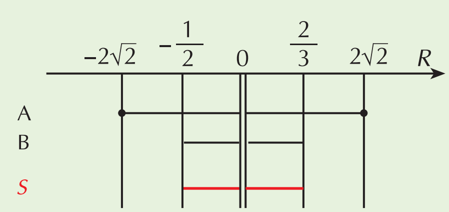
$$x \leq -5 \ \vee \ x > 3$$

2. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 8}{x^2} \leq 0 & (\mathbf{A}) \\ -6x^2 + x + 2 > 0 & (\mathbf{B}) \end{cases}$

La prima disequazione del sistema è frazionaria di dominio $D = R - \{0\}$. In tale insieme il denominatore della frazione è sempre positivo quindi le sue soluzioni sono quelle che rendono negativo o nullo il numeratore; si ha così che

$$\frac{x^2 - 8}{x^2} \leq 0 \quad \text{se} \quad x^2 - 8 \leq 0 \qquad \text{cioè se} \qquad -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \ \wedge \ x \neq 0$$

La seconda disequazione è verificata se $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{2}{3}$.



Dall'analisi della tabella a lato, deduciamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \ \wedge \ x \neq 0$$

3. LE EQUAZIONI IRRAZIONALI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 24

Un'equazione irrazionale che contiene un solo radicale si può sempre scrivere nella forma

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

I casi più significativi sono quelli in cui $n=2$ e $n=3$.

IL CASO $n = 2$

Per risolvere l'equazione $\sqrt{A(x)} = B(x)$ si può procedere in due modi:

- elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione, risolvere quella ottenuta e procedere poi alla verifica delle soluzioni
- porre la condizione di equivalenza $B(x) \geq 0$, risolvere l'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ e accettare solo le soluzioni che soddisfano la condizione di equivalenza.

Per esempio risolviamo l'equazione: $2\sqrt{x} + 3 = x$

Isoliamo innanzi tutto il radicale scrivendo l'equazione nella forma $2\sqrt{x} = x - 3$.

I metodo: procediamo elevando al quadrato i due membri dell'equazione senza porci problemi di equivalenza; questo significa che dovremo poi procedere alla verifica delle soluzioni.

$4x = x^2 - 6x + 9 \quad \rightarrow \quad x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 9 \quad \vee \quad x = 1$

Verifichiamo che i valori trovati siano anche soluzioni dell'equazione irrazionale:

- per $x = 9$ otteniamo

  $2\sqrt{9} + 3 = 9 \qquad 6 + 3 = 9 \qquad$ l'equazione è verificata
- per $x = 1$ otteniamo

  $2\sqrt{1} + 3 = 1 \qquad 2 + 3 = 1 \qquad$ l'equazione non è verificata

Dunque $\quad S = \{9\}$.

II metodo: l'equazione è equivalente al sistema $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 4x = (x-3)^2 \end{cases}$

L'insieme di equivalenza è $x \geq 3$; le soluzioni dell'equazione sono $x = 9 \ \vee \ x = 1$; poiché solo la prima appartiene a tale insieme, $S = \{9\}$.

IL CASO $n = 3$

Per risolvere l'equazione $\sqrt[3]{A(x)} = B(x)$ basta elevare al cubo entrambi i membri e risolvere l'equazione ottenuta.

Per esempio risolviamo l'equazione: $\sqrt[3]{2x - 3} = x - \dfrac{7}{2}$

Il radicale è di indice dispari; eleviamo al cubo i due membri e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$2x - 3 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad 8x^3 - 84x^2 + 278x - 319 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (2x - 11)(4x^2 - 20x + 29) = 0$$

Poiché il secondo fattore ha un discriminante negativo, la sola soluzione reale è $x = \dfrac{11}{2}$.

4. LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

Come nel caso delle equazioni, per risolvere una disequazione irrazionale si rende necessario elevare i suoi membri ad una potenza che consenta l'eliminazione del simbolo di radice; dovremo allora comportarci in modo diverso a seconda che *n* sia pari oppure dispari.

LE REGOLE

- Per risolvere la disequazione $\sqrt[3]{f(x)} \gtrless g(x)$ basta elevare alla terza potenza entrambi i membri e risolvere la disequazione algebrica ottenuta.

- Per risolvere la disequazione $\sqrt{f(x)} < g(x)$ si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

- Per risolvere la disequazione $\sqrt{f(x)} > g(x)$ si devono risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è l'**unione** degli insiemi delle soluzioni di ciascuno dei due sistemi.

ESEMPI

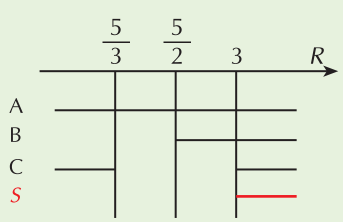
1. $2x - 5 > \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

Per riconoscerne il tipo, riscriviamo la disequazione nella forma $\sqrt{f(x)} < g(x)$: $\sqrt{x^2 - 6x + 10} < 2x - 5$

Essa è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 \geq 0 & \text{esistenza del radicale} & (\mathbf{A}) \\ 2x - 5 > 0 & \text{il } 2^\circ \text{ membro deve essere positivo} & (\mathbf{B}) \\ x^2 - 6x + 10 < (2x - 5)^2 & \text{verifica della disuguaglianza} & (\mathbf{C}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall\, x \in R \\ x > \dfrac{5}{2} \\ x < \dfrac{5}{3} \ \vee \ x > 3 \end{cases}$$



L'insieme delle soluzioni della disequazione si deduce immediatamente dalla tabella, ed è $x > 3$.

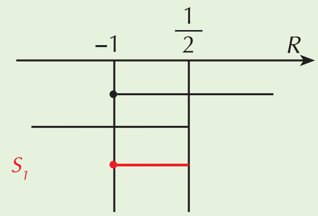
2. $\sqrt{x + 1} > 2x - 1$

La disequazione ha la forma $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Essa è quindi equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 1 > (2x - 1)^2 \end{cases}$$

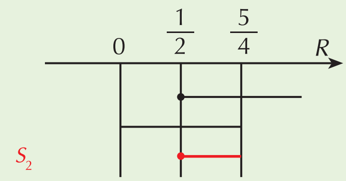
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 < x < \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

- Disponiamo i dati del primo sistema in tabella



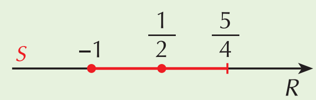
$\rightarrow \quad S_1 : -1 \leq x < \dfrac{1}{2}$

- Disponiamo i dati del secondo sistema in tabella



$\rightarrow \quad S_2 : \dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{5}{4}$

Le soluzioni della disequazione sono date dall'unione dei due insiemi (tabella a lato): $S = S_1 \cup S_2 : -1 \leq x < \dfrac{5}{4}$.



3. $\sqrt[3]{x^2 - 1} > 2$

L'indice del radicale è dispari, quindi per risolvere la disequazione basta elevare entrambi i membri al cubo.

Elevando al cubo otteniamo la disequazione equivalente

$$x^2 - 1 > 8 \quad \rightarrow \quad x^2 > 9 \quad \rightarrow \quad x < -3 \ \vee \ x > 3$$

5. Le equazioni e le disequazioni con i moduli

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 28

Il modulo applicato a un'espressione $A(x)$ è un operatore matematico che sostanzialmente serve a mantenere non negativo il valore di $A(x)$; si pone cioè:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{per tutti gli } x \text{ che rendono positiva } A(x) \\ -A(x) & \text{per tutti gli } x \text{ che rendono negativa } A(x) \end{cases}$$

Per l'uso che ne faremo in seguito, ci interessano in particolare le equazioni e le disequazioni che si presentano nella forma:

$|A(x)| = k \qquad |A(x)| > k \qquad |A(x)| < k \qquad$ con k numero reale positivo

Le equazioni

L'equazione $|A(x)| = k$ è equivalente alle due equazioni:

$$A(x) = -k \quad \vee \quad A(x) = k$$

L'insieme delle soluzioni è quindi quello formato dalle soluzioni di entrambe le equazioni.

Per esempio:

- l'equazione $|3x^2 + 4x| = 1$

  è equivalente a: $3x^2 + 4x = 1 \quad \vee \quad 3x^2 + 4x = -1$

  cioè: $3x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \vee \quad 3x^2 + 4x + 1 = 0$

  Risolvendo la prima troviamo: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$

  Risolvendo la seconda troviamo: $x = \dfrac{-2 \pm 1}{3} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

  L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{ \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}, -1, -\dfrac{1}{3} \right\}$.

LE DISEQUAZIONI

- La disequazione $|A(x)| > k$ è equivalente alle due disequazioni:

$$A(x) < -k \qquad \vee \qquad A(x) > k$$

  L'insieme delle soluzioni è quindi quello formato dall'unione delle soluzioni di entrambe le disequazioni.

- La disequazione $|A(x)| < k$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$$

Vediamo alcuni esempi.

- La disequazione $|3x^2 - 7| > 5$ è equivalente alle due disequazioni:

  $3x^2 - 7 < -5 \quad \vee \quad 3x^2 - 7 > 5$

  La prima disequazione è verificata se $x < -2 \vee x > 2$.

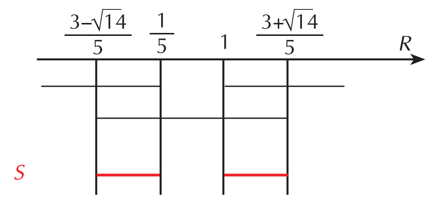
  La seconda è verificata se $-\dfrac{\sqrt{6}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

  L'insieme delle soluzioni è quindi S:

$$x < -2 \vee -\frac{\sqrt{6}}{3} < x < \frac{\sqrt{6}}{3} \vee x > 2$$

- La disequazione $|5x^2 - 6x| < 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x^2 - 6x > -1 \\ 5x^2 - 6x < 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x < \dfrac{1}{5} \ \vee \ x > 1 \\ \dfrac{3 - \sqrt{14}}{5} < x < \dfrac{3 + \sqrt{14}}{5} \end{cases}$$



  ed il suo insieme delle soluzioni è S:

$$\frac{3 - \sqrt{14}}{5} < x < \frac{1}{5} \quad \vee \quad 1 < x < \frac{3 + \sqrt{14}}{5}$$

6. LE TRASFORMAZIONI NEL PIANO CARTESIANO

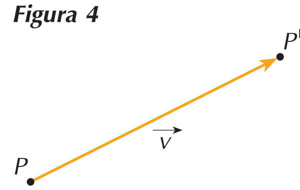
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 29

Per l'uso che ne faremo in seguito, rivediamo le equazioni delle principali isometrie che sono già state studiate nel biennio.
Ricordiamo che si dice isometria la trasformazione che ad ogni coppia di punti A e B di un piano associa altri due punti A' e B' dello stesso piano in modo che il segmento $A'B'$ sia congruente al segmento AB.
Le isometrie sono quindi quelle trasformazioni che, conservando le distanze, trasformano una figura geometrica in un'altra ad essa congruente.
Ricordiamo poi che si dicono *uniti* i punti che hanno per trasformati se stessi.

La traslazione

Ricordiamo che un vettore è un segmento orientato del piano; esso è quindi caratterizzato da una direzione, un verso e un modulo.
La *traslazione di vettore* $\vec{v}$ è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P di un piano associa il punto P' che si ottiene applicando $\vec{v}$ a P (***figura 4***).

Figura 4

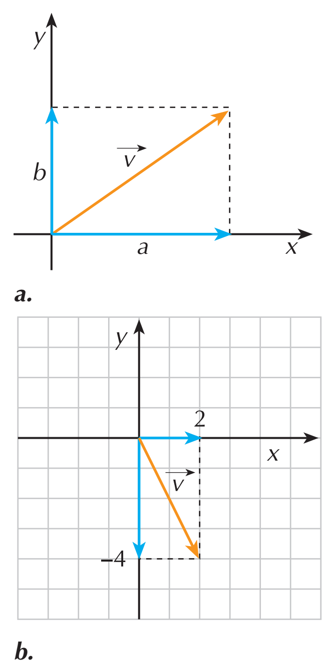


Lavorando nel piano cartesiano è utile assegnare tale vettore mediante le sue componenti lungo gli assi cartesiani; esse sono in sostanza le misure dei segmenti orientati che si ottengono proiettando $\vec{v}$ sull'asse x e sull'asse y (***figura 5a***). Indicando rispettivamente con a e b queste misure, per indicare il vettore $\vec{v}$ si scrive

$$\vec{v}(a,\ b)$$

Per esempio, il vettore $\vec{v}(2,\ -4)$ ha come componenti un segmento di misura 2 lungo l'asse x e un segmento di misura -4 lungo l'asse y ed è rappresentato in ***figura 5b***.

Figura 5



In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(a,\ b)$ sono le seguenti

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}}$$

In tale trasformazione:

- **se dobbiamo trovare le coordinate del punto P'** che corrisponde ad un punto $P(x,\ y)$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(a,\ b)$ dobbiamo sostituire al posto di x e y le espressioni $x + a$ e $y + b$

$$\begin{cases} x \rightarrow x + a \\ y \rightarrow y + b \end{cases}$$

- **se dobbiamo trovare l'equazione della curva** γ' che corrisponde ad una curva γ che ha una certa equazione, dobbiamo sostituire al posto di x e y le espressioni $x - a$ e $y - b$

$$\begin{cases} x \rightarrow x - a \\ y \rightarrow y - b \end{cases}$$

Per esempio, la traslazione di vettore $\vec{v}(-1,\ 1)$ ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

In essa:

- il segmento di vertici $A(1, 0)$ e $B(-2, 3)$ ha come corrispondente il segmento $A'B'$ di vertici:

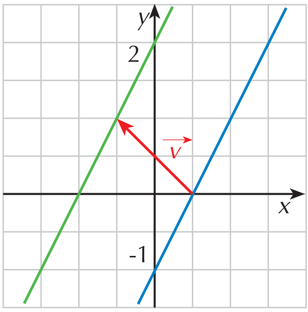
$$A': \quad 1-1=0 \qquad 0+1=1 \qquad \rightarrow \qquad A'(0, 1)$$
$$B': \quad -2-1=-3 \qquad 3+1=4 \qquad \rightarrow \qquad B'(-3, 4)$$

- la retta di equazione $y = 2x - 1$ ha come corrispondente quella la cui equazione si ottiene applicando le sostituzioni

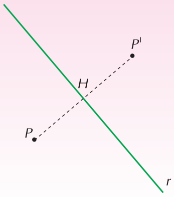
$$x \rightarrow x+1 \qquad \text{e} \qquad y \rightarrow y-1$$

cioè: $\quad y - 1 = 2(x+1) - 1 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 2 \quad$ (***figura 6***)

Figura 6



Un punto P' è simmetrico di un punto P rispetto a una retta r se r è asse del segmento PP', vale a dire che PP' è perpendicolare a r e H, punto di intersezione di r con PP', è il punto medio di PP'.

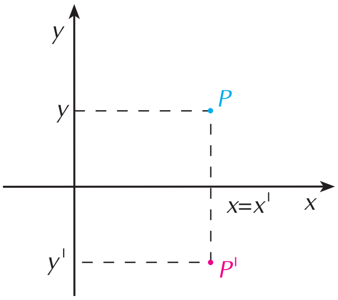


La simmetria rispetto all'asse x

Dato un punto $P(x, y)$, consideriamo il suo simmetrico $P'(x', y')$ rispetto all'asse delle ascisse (***figura 7***). P e P' hanno la stessa ascissa e, giacendo uno nel semipiano positivo delle ordinate e l'altro in quello negativo, hanno ordinate opposte. Le equazioni di tale trasformazione sono dunque

$$\boxed{\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}}$$

Figura 7



Ad esempio, il corrispondente del punto $P(2, -1)$ in tale simmetria è il punto $P'(2, 1)$.

Per trovare l'equazione della curva simmetrica di una data dobbiamo ricavare le espressioni di x e di y

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases} \quad \text{e operare le sostituzioni} \quad \begin{cases} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

Per esempio, la simmetrica della parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 4$ ha equazione (***figura 8***)

$$-y = x^2 - 3x + 4 \qquad \text{cioè} \qquad y = -x^2 + 3x - 4$$

In pratica, data una funzione di equazione $y = f(x)$, poiché nella simmetria considerata x non varia e y cambia segno, l'equazione della sua trasformata è

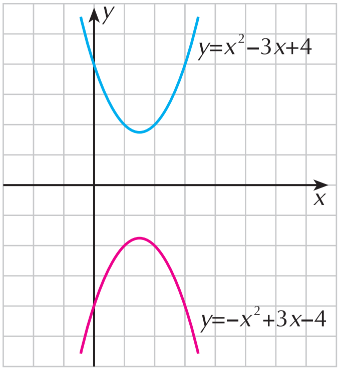
$$-y = f(x) \qquad \text{cioè} \qquad y = -f(x)$$

Tenendo poi presente che: $\quad |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{quando } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{quando } f(x) < 0 \end{cases}$

possiamo affermare che:

- il grafico della funzione $-f(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ per simmetria rispetto all'asse x;
- il grafico di $|f(x)|$ si ottiene da quello di $f(x)$ mantenendo le parti positive del grafico e considerando le simmetriche rispetto all'asse x delle parti negative.

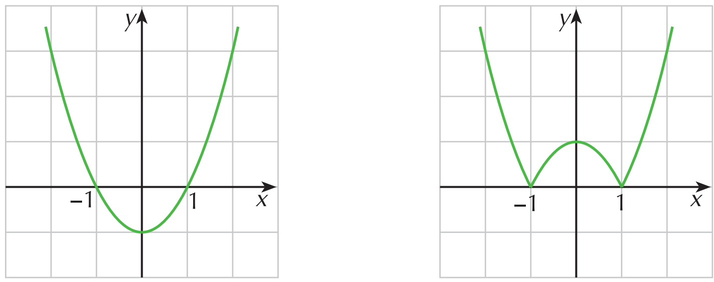
Figura 8



IL GRAFICO DI $-f(x)$ E DI $|f(x)|$

Per esempio il grafico di $y = |x^2 - 1|$ si ottiene disegnando la $y = x^2 - 1$ e ribaltando rispetto all'asse x le parti negative (***figura 9*** di pagina seguente).

Figura 9



La simmetria rispetto all'asse y

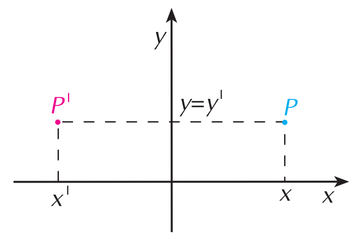
In modo del tutto analogo, la simmetria che ha per asse quello delle ordinate ha equazioni

$$\boxed{\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}}$$

Infatti, due punti che si corrispondono in tale simmetria hanno la stessa ordinata ed ascisse opposte (***figura 10***). Sono ad esempio simmetriche le coppie di punti

$$P(5, -3) \quad \text{e} \quad P'(-5, -3), \qquad Q\left(\sqrt{2}, 1\right) \quad \text{e} \quad Q'\left(-\sqrt{2}, 1\right)$$

Figura 10



Anche in questo caso, per trovare l'equazione della curva simmetrica di una curva data rispetto all'asse delle ordinate dobbiamo ricavare le espressioni di x e di y

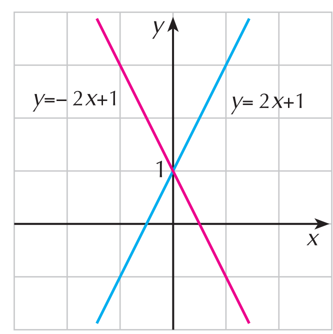
$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{ed operare le sostituzioni} \quad \begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$$

In particolare, la simmetrica rispetto all'asse delle ordinate della funzione $y = f(x)$ ha equazione $y = f(-x)$.
Ad esempio, la funzione di equazione $y = 2x + 1$ si trasforma nella curva di equazione

$$y = 2(-x) + 1 \qquad \text{cioè} \qquad y = -2x + 1$$

In ***figura 11*** i grafici delle due funzioni.

Figura 11

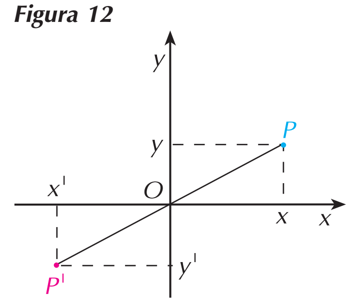


La simmetria rispetto all'origine

Due punti simmetrici rispetto all'origine degli assi hanno sia le ascisse che le ordinate opposte (***figura 12***). Le equazioni della trasformazione sono dunque

$$\boxed{\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}}$$

Figura 12



Ad esempio, sono simmetrici rispetto all'origine i punti

$$P(4, -3) \quad \text{e} \quad P'(-4, 3), \qquad Q\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) \quad \text{e} \quad Q'\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$$

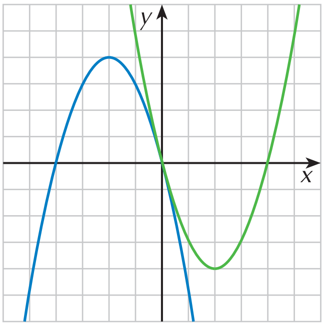
Operando come nei casi precedenti, per trovare l'equazione di una curva che sia simmetrica di una data rispetto all'origine dobbiamo operare sulla sua equazione con le sostituzioni

$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$$

Ad esempio, data la funzione di equazione $y = x^2 - 4x$, la sua simmetrica rispetto ad O ha equazione (***figura 13***)

$$-y = (-x)^2 - 4(-x) \qquad \text{cioè} \qquad y = -x^2 - 4x$$

Figura 13

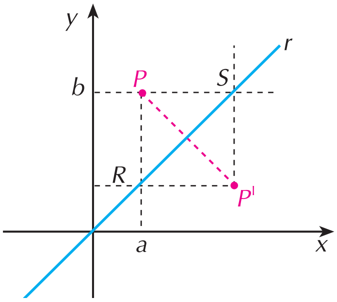


La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$

Sia $P(a, b)$ un punto del piano; il suo simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante è il punto P' in ***figura 14***.
Le rette parallele agli assi cartesiani condotte da P e da P' individuano un quadrato e si può dire che:

- il vertice S ha la stessa ordinata b del punto P e poiché appartiene alla bisettrice, anche l'ascissa è uguale a b: $S(b, b)$
- di conseguenza anche l'ascissa del punto P' è b
- il vertice R ha la stessa ascissa a del punto P e poiché appartiene alla bisettrice, anche l'ordinata è uguale ad a: $R(a, a)$
- di conseguenza anche l'ordinata del punto P' è a.

Figura 14



In definitiva $P'(b, a)$.
Allora due punti che sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante si scambiano i valori delle ascisse con quelli delle ordinate.
Per esempio:

- il simmetrico di $A(5, -3)$ è il punto $A'(-3, 5)$,
- il simmetrico di $B(8, 2)$ è il punto $B'(2, 8)$ (***figura 15a***).

Le equazioni di questa trasformazione sono allora

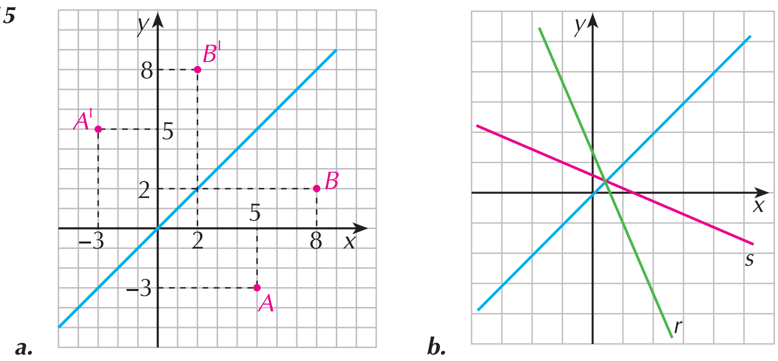
$$\boxed{\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}}$$

e le sostituzioni da operare sull'equazione di una curva sono dunque

$$\boxed{\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}}$$

Per esempio, la simmetrica della retta r di equazione $3y = -7x + 4$ è la retta s che si ottiene scambiando la variabile x con la variabile y cioè la retta di equazione $3x = -7y + 4$; in ***figura 15b*** i loro grafici.

Figura 15



Ripasso e integrazioni

LE EQUAZIONI RAZIONALI

la teoria è a pag. 1

Comprensione

1 Quale tra le seguenti procedure si deve seguire per risolvere l'equazione $3x^3 + 3x = 8x^2 - 2$?

a. Scomporre i due polinomi al primo e al secondo membro e annullare ciascuno dei fattori ottenuti: $3x(x^2+1) = 2(4x^2-1) \quad \rightarrow \quad 3x = 0 \ \vee \ x^2+1 = 0 \ \vee \ 4x^2-1 = 0$

b. Trasportare tutti i termini al primo membro, scomporre il polinomio ottenuto e annullare ciascuno dei fattori:
$3x^3 + 3x - 8x^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (3x+1)(x^2-3x+2) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x+1 = 0 \ \vee \ x^2-3x+2 = 0$

c. Lasciare al secondo membro il termine noto, scomporre il polinomio al primo membro e porre ogni fattore ottenuto uguale al termine noto:
$3x^3 - 8x^2 + 3x = -2 \quad \rightarrow \quad x(3x^2-8x+3) = -2 \quad \rightarrow \quad x = -2 \ \vee \ 3x^2-8x+3 = -2$

2 Senza risolverle, ma solo guardando il segno dei coefficienti, indica quali tra le seguenti equazioni hanno soluzioni in R:

a. $x^4 + 12 = 0$ SI NO

b. $x^3 + 8 = 0$ SI NO

c. $27x^3 - 1 = 0$ SI NO

d. $\frac{1}{2}x^4 - 4 = 0$ SI NO

e. $\frac{4}{5}x^4 + 1 = 0$ SI NO

3 Le soluzioni dell'equazione $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ sono i valori reali di x per i quali:

a. $A(x) = 0 \quad \vee \quad B(x) = 0$

b. $A(x) = 0 \quad \wedge \quad B(x) = 0$

c. $A(x) = 0 \quad \wedge \quad B(x) \neq 0$

d. $A(x) = 0 \quad \vee \quad B(x) \neq 0$

Applicazione

Le equazioni di secondo grado

Risolvi le seguenti equazioni intere.

4 $3(x+2) - x^2 + 2(x-3) = 0$ $[S = \{0, 5\}]$

5 $\frac{1}{5}(x+1)^2 - \frac{1}{3}(2x+5) = \frac{1}{5}(2x+1)$ $\left[S = \left\{-\frac{5}{3}, 5\right\}\right]$

6 $\frac{(x-1)^2-(x+2)^2}{6} = x^2\left(8x - \frac{5}{6}\right) - (2x-1)^3$ $[S = \varnothing]$

7 $2 \cdot \left[(1-x)^2+2x\right] = 5 - \left(\sqrt{3}-x\right)^2$ $\left[S = \left\{0,\ \frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}\right]$

8 $(2x-3)^2+2x-(3-4x) = x^2-6x+9$ $[S = \{\pm 1\}]$

9 $(5x-25)(x+2) = 5x^2-15x+6-7(x^2-1)$ $[S = \{\pm 3\}]$

10 $100x^2+1+53x = 20+(8x-3)(x+1)+(8x+3)^2$ $\left[S = \left\{\pm\frac{5}{14}\sqrt{7}\right\}\right]$

11 $\dfrac{x+1}{5} - \dfrac{1}{10}x = \dfrac{x^2+1}{15} - \dfrac{1}{30}$ $\left[S = \left\{-1,\ \frac{5}{2}\right\}\right]$

12 $\dfrac{(x+2)(x+6)}{8} = \dfrac{x^2+36}{2} - 12$ $[S = \varnothing]$

13 $\dfrac{2x-1}{2} + \dfrac{x(x+1)}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}x^2$ $[S = \{0,\ 4\}]$

14 $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{2x-3}{6}$ $\left[S = \left\{0,\ \frac{5}{2}\right\}\right]$

15 $\dfrac{x(x-1)}{6} + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{1}{3}$ $[S = \{0,\ 4\}]$

16 $\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)^2 + x^2 - 7 = 2 + \dfrac{1}{3}x^2 + x$ $\left[S = \left\{-3,\ \frac{24}{7}\right\}\right]$

17 $x(x-3) + \left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2 = (x-3)^2$ $\left[S = \left\{-\frac{16}{3},\ \frac{5}{3}\right\}\right]$

18 $(x^2+1) + \dfrac{1}{5}(x+1)^2 = \left(\dfrac{11}{6}\sqrt{2} + \dfrac{2}{5}\right)x + \dfrac{1}{5}(x^2+1)$ $\left[S = \left\{\frac{3}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\sqrt{2}\right\}\right]$

19 $x^2 - \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{6} = 0$ $\left[S = \left\{\sqrt{3},\ \sqrt{2}\right\}\right]$

20 $x^2 + \left(2+\sqrt{5}\right)x + 2\sqrt{5} = 0$ $\left[S = \left\{-2,\ -\sqrt{5}\right\}\right]$

21 $x^2 - \left(\sqrt{2}+3\right)x + 3\sqrt{2} = 0$ $\left[S = \left\{3,\ \sqrt{2}\right\}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie.

22 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{x-2} = 0$$

Per le condizioni di esistenza dobbiamo porre: $x \neq 0$ e $x \neq 2$

Scriviamo l'equazione in forma normale: $x - 2 + 3x^2 = 0$.

Ordiniamo i termini e applichiamo la formula risolutiva:

$$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili, quindi $S = \left\{-1,\ \frac{2}{3}\right\}$.

23 $\dfrac{x^2-3}{x+1} = x - 1$ $[S = \varnothing]$

24 $x - \frac{5}{2-5x} = \frac{5}{2}(x-1)$ $\left[S = \left\{0,\ \frac{31}{15}\right\}\right]$

25 $\frac{x}{x+1} - \frac{3x}{2x+4} = 0$ $[S = \{0,\ 1\}]$

26 $\frac{x^2-12}{x^2+2x-3} + \frac{x}{x+3} = -\frac{1}{x-1}$ $\left[S = \left\{\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right\}\right]$

27 $\frac{x-2}{2} = \frac{x^2-2x+2}{x} - \frac{x+2}{2x}$ $[S = \{1,\ 2\}]$

28 $\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x+1}$ $[S = \{3\}]$

29 $\frac{1}{1+x} - \frac{1-x}{x} = \frac{1+2(x-1)}{x^2+x}$ $[S = \{1\}]$

30 $\frac{x}{x-3} - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{x^2-9}$ $[S = \{5 \pm \sqrt{21}\}]$

31 $2 + \frac{3x-1}{x^2-x} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{2}$ $\left[S = \left\{-1,\ \frac{2}{3}\right\}\right]$

32 $3x + \frac{4}{x+2} - 1 = \frac{3x^2}{x-2}$ $[S = \varnothing]$

33 $\frac{2x}{x+1} + 2 = \frac{3}{x^2+x} - \frac{4}{3}$ $\left[S = \left\{-\frac{9}{8},\ \frac{1}{2}\right\}\right]$

34 $\frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{2}{x+1} = -\left[\frac{x^2}{2(x+1)} + \frac{4x}{1-x^2}\right]$ $[S = \varnothing]$

Le equazioni di grado superiore al secondo

Risolvi le seguenti equazioni scomponendo in fattori e applicando la legge di annullamento del prodotto.

35 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ $[S = \{\pm 1\}]$

36 $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ $\left[S = \left\{-\frac{1}{2},\ -2,\ -1\right\}\right]$

37 $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$ $\left[S = \left\{\pm 1,\ -\frac{1}{2},\ -2\right\}\right]$

38 $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ $\left[S = \left\{2,\ -1,\ -\frac{1}{2}\right\}\right]$

39 $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ $[S = \{\pm 1,\ -2,\ 3\}]$

40 $-2x^3 + 7x^2 - 9 = 0$ $\left[S = \left\{-1,\ \frac{3}{2},\ 3\right\}\right]$

41 $3x^3 + 17x^2 + 28x + 12 = 0$ $\left[S = \left\{-3,\ -2,\ -\frac{2}{3}\right\}\right]$

42 $6x^5 + 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ $\left[S = \left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right\}\right]$

43 $3x^4 - x^3 + 4x^2 - 20x - 16 = 0$ $\left[S = \left\{-\frac{2}{3},\ 2\right\}\right]$

44 $5x^3+5x^2-15x-15=0$ $[S=\{-1,\ \pm\sqrt{3}\}]$

45 $x^3-x^2-16x+16=0$ $[S=\{\pm 4,\ 1\}]$

46 $4x^3+13x^2-13x-4=0$ $\left[S=\left\{-4,\ -\frac{1}{4},\ 1\right\}\right]$

47 $x^4+\frac{5}{2}x^3-\frac{5}{2}x-1=0$ $\left[S=\left\{-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 1\right\}\right]$

48 $4x^4-17x^3+17x-4=0$ $\left[S=\left\{-1,\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4\right\}\right]$

Esercizi riassuntivi sulle equazioni

49 $\frac{2x}{x+4}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{8}{x+4}=\frac{7x-27}{4(x-3)}$ $[S=\{2\}]$

50 $\left(\frac{3+x}{3x}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}\right)+6\left(1-\frac{1}{2}\right):(x+3)+3=0$ $[S=\{-6\}]$

51 $1-\frac{5}{(x+3)(x+2)}=\frac{1}{x+2}-\frac{x^2}{x^2+5x+6}$ $[S=\{-1\pm\sqrt{2}\}]$

52 $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$ $[S=\varnothing]$

53 $3\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x^2-2x+4}\right)-\frac{3x^2+10}{x^3+8}=0$ $[S=\varnothing]$

54 $\frac{(x-2)^2}{x-3}-3=2x-\frac{13}{3-x}$ $[S=\{-1,\ 0\}]$

55 $\frac{x+1}{2x+3}+\frac{7}{4x^2-9}+\frac{2x}{3-2x}=0$ $\left[S=\left\{-4,\ \frac{1}{2}\right\}\right]$

56 $x-3\left[1-\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\frac{8}{x^2}+\frac{(x-2)^3}{x^2}$ $\left[S=\left\{\frac{3}{2}\right\}\right]$

57 $\frac{2(x^2+2x)+3+x}{x^3-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+x+1}$ $[S=\{-1\}]$

58 $\frac{2x+2}{x-1}+\frac{3-x}{x}=\frac{4}{x-1}$ $[S=\{-3\}]$

59 $\left(\frac{1}{x+2}-\frac{2}{3x-4}\right)=\frac{x-1}{x+2}:\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$ $\left[S=\left\{\frac{2}{3}\right\}\right]$

60 $\frac{3}{1-x^3}=\frac{5}{1+x^3}$ $\left[S=\left\{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right\}\right]$

61 $\frac{3}{1-x^4}=\frac{5}{1+x^4}$ $\left[S=\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right]$

62 $(x-2)^2+\frac{x}{(x-2)^2}=\frac{1+x}{(2-x)^2}$ $[S=\{1,\ 3\}]$

63 $\frac{3x}{x-2}+(x-1)^2(x+1)=\frac{3x^2+7x-8}{x^2-x-2}$ $[S=\{\pm\sqrt{3}\}]$

64 $\dfrac{2(x+\sqrt{2})}{2-5x^5} = x$ $\quad [S = \varnothing]$

65 $x^2 + \dfrac{2}{x^2}\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$ $\quad [S = \{\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt[4]{3}\}]$

66 $\dfrac{x^2-3}{x^2+1} - \dfrac{5}{x^2-4} = \dfrac{2}{3}$ $\quad [S = \{\pm 1,\ \pm\sqrt{29}\}]$

67 $\dfrac{4(x^2-9)}{x^2-1} + \dfrac{8}{x^4-x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad \left[S = \left\{\pm 3,\ \pm\dfrac{1}{2}\right\}\right]$

68 $\dfrac{2x^2(x+1)}{x+9} - \dfrac{8x(x-2)}{x^2+8x-9} = \dfrac{8x}{x^2+8x-9} + 1$ $\quad \left[S = \left\{\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ -1\right\}\right]$

69 $\dfrac{3(x^2-3)}{x^2+1} - 2 = \dfrac{15}{x^2-4}$ $\quad [S = \{\pm 1,\ \pm\sqrt{29}\}]$

LE DISEQUAZIONI

la teoria è a pag. 2

Comprensione

70 Stabilisci quali fra le seguenti coppie di disequazioni sono equivalenti:

a. $3x - 1 > x + 2 \qquad 3x - x > 2 + 1$ **b.** $x^2 - 4 > 0 \qquad 4 - x^2 < 0$

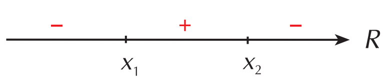
c. $\dfrac{x^2 - x}{3} < 6x + 9 \qquad x^2 - x < 2x + 3$ **d.** $\dfrac{x^2 - x - 5}{x} > 0 \qquad x^2 - x - 5 > 0$

e. $\dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x^2} < 0 \qquad 3x^2 + 4x - 1 < 0$ **f.** $\dfrac{x - 4 + x^2}{-3} > 0 \qquad 4 - x - x^2 < 0$

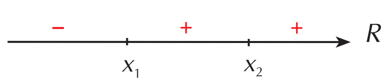
71 Il trinomio $ax^2 + bx + c$ non si annulla mai in R. Si può dire che la disequazione:

a. $ax^2 + bx + c > 0$ non è mai verificata $\forall a \in R$ V F
b. $ax^2 + bx + c < 0$ ha soluzione R se $a < 0$ V F
c. $ax^2 + bx + c > 0$ non è mai verificata se $a > 0$ V F
d. $ax^2 + bx + c > 0$ ha soluzione R se $a < 0$ V F

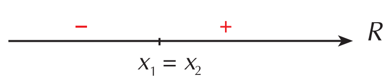
72 Considera il trinomio $ax^2 + bx + c$ e indica con x_1 e x_2 i valori reali per cui esso si annulla. Indica se, al variare di x in R, i disegni di seguito riportati rappresentano una corretta valutazione del suo segno.

a. 

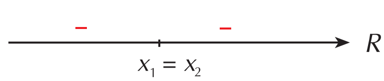
se $a < 0$

b. 

$\forall\ a$

c. 

se $a > 0$

d. 

se $a < 0$

e. 

se $a < 0$ e se il trinomio non si annulla mai

73 La disequazione $A(x) \geq 0$ è verificata se $-3 \leq x \leq 5$; la disequazione $B(x) \leq 0$ è verificata se $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1$; la disequazione $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ ha come soluzioni gli intervalli:

a. $-3 \leq x \leq 0 \ \vee \ 1 \leq x \leq 5$ **b.** $-3 \leq x < 0 \ \vee \ 1 < x \leq 5$
c. $x \leq -3 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ x \geq 5$ **d.** $0 < x < 1$

74 Spiega perché le seguenti affermazioni sono vere:

a. $\dfrac{x-2}{x^2+2} > 0$ è equivalente a $x - 2 > 0$

b. $\dfrac{3}{x} < 0$ è equivalente a $x < 0$

c. $\dfrac{(3x-2)(x+1)}{(x+1)(x-3)} < 0$ è equivalente a $\dfrac{3x-2}{x-3} < 0 \quad \forall x \neq -1$

d. $\dfrac{x+4}{-x^2} > 0$ è equivalente a $x + 4 < 0 \quad \forall x \neq 0$

75 La disequazione $A(x) \geq 0$ è verificata se $x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3$; la disequazione $B(x) < 0$ è verificata se $x < 0 \ \vee \ x > 3$. Il sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$ è verificato se:

a. $x \geq 3$ **b.** $x < 0 \ \vee \ x \geq 3$ **c.** $x < 0 \ \vee \ x > 3$ **d.** $x < 0$

Applicazione

Le disequazioni di secondo grado

76 **ESERCIZIO GUIDA**

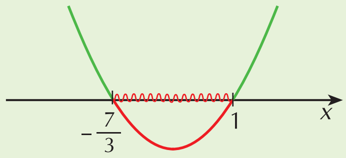
$3x^2 + 4x - 7 < 0$

La parabola associata alla disequazione volge la concavità verso l'alto e incontra l'asse x nei punti le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione

$$3x^2 + 4x - 7 = 0 \qquad \text{cioè in} \qquad x = -\frac{7}{3} \ \vee \ x = 1$$

La posizione della parabola rispetto all'asse x è rappresentata in figura e l'insieme delle soluzioni è perciò:

$$-\frac{7}{3} < x < 1$$



77 $25 - x^2 \leq 0$ $[x \leq -5 \ \vee \ x \geq 5]$

78 $x^2 - 4 < 0$ $[-2 < x < 2]$

79 $16x^2 - 40x + 25 > 0$ $\left[x \neq \dfrac{5}{4}\right]$

80 $x^2 - 7x > 0$ $[x < 0 \ \vee \ x > 7]$

81 $x(5 - 2x) < 0$ $\left[x < 0 \ \vee \ x > \dfrac{5}{2}\right]$

82 $3x(2x+5) \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{5}{2} \vee x \geq 0\right]$

83 $1 + 7x^2 < 0$ $[S = \varnothing]$

84 $(2x-1)(x+3) < 0$ $\left[-3 < x < \frac{1}{2}\right]$

85 $\dfrac{5x - x^2}{3} > 0$ $[0 < x < 5]$

86 $\dfrac{4x^2 + 1}{-2} < 0$ $[S = R]$

87 $\dfrac{(x-1)^3}{4} > \dfrac{(x+3)^3}{4} - 15x - 7$ $[0 < x < 3]$

88 $(3x-2)^2 - 5x + (2x-1)^2 < -3$ $\left[\frac{8}{13} < x < 1\right]$

89 $6(x-1) - 5(x^2 - 5x + 6) + 10 < 0$ $\left[x < 1 \vee x > \frac{26}{5}\right]$

90 $5x^2 - 23x + 12 > 0$ $\left[x < \frac{3}{5} \vee x > 4\right]$

91 $2x(x+4) + x(x-7) > 30$ $\left[x < -\frac{10}{3} \vee x > 3\right]$

92 $2x^2 < 3(9-x)$ $\left[-\frac{9}{2} < x < 3\right]$

93 $(4x-1)^2 + (3x-2)^2 < 5(7 - 5x^2)$ $\left[-\frac{3}{5} < x < 1\right]$

94 $4x(x+1) - 2x(x+5) > -6(x-12)$ $[x < -6 \vee x > 6]$

95 $(x-2)^2 - 5x + 2 < -7x$ $[S = \varnothing]$

Le disequazioni di grado superiore al secondo

96 **ESERCIZIO GUIDA**

$x^3 - 2x^2 - 15x > 0$

Scomponiamo in fattori il polinomio $E(x)$ al primo membro ottenendo la disequazione equivalente:

$x(x^2 - 2x - 15) > 0$

Studiamo il segno di ogni fattore del prodotto:

$x > 0$ se $x > 0$

$x^2 - 2x - 15 > 0$ se $x < -3 \vee x > 5$

Riportiamo sulla retta dei numeri reali le variazioni di segno di ciascuno dei fattori come in figura; dall'analisi di tale tabella risulta che il polinomio dato è positivo se $-3 < x < 0 \vee x > 5$.

R		-3		0		5	
segno di x	$-$		$-$		$+$		$+$
segno di $x^2 - 2x - 15$	$+$		$-$		$-$		$+$
segno di $E(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
S							

97 $3x^3 - 5x^2 + 2x < 0$ $\left[x < 0 \vee \frac{2}{3} < x < 1\right]$

98 $(x+2)(3x^2 - 4x - 7) < 0$ $\left[x < -2 \vee -1 < x < \frac{7}{3}\right]$

99 $4x^3 - 4x^2 - 3x + 3 \leq 0$ $\left[x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1\right]$

100 $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 > 0$ $\left[x > \frac{1}{2}\right]$

101 $(x-5)(4x^2 - 9x + 5)(x^2 - 16) \leq 0$ $\left[x \leq -4 \vee 1 \leq x \leq \frac{5}{4} \vee 4 \leq x \leq 5\right]$

102 $2x^3 + 2 + 7x^2 + 7x \geq 0$ $\left[-2 \leq x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}\right]$

103 $2x^3 + x^2 - x < 0$ $\left[x < -1 \vee 0 < x < \frac{1}{2}\right]$

104 $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 \leq 0$ $\left[-1 \leq x \leq \frac{1}{4} \vee 1 \leq x \leq 4\right]$

105 $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 > 0$ $\left[x < -2 \vee -1 < x < -\frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

Le disequazioni frazionarie

106 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{6x+14}{5x-1} \geq 2$$

Poiché deve essere $5x - 1 \neq 0$, cioè $x \neq \frac{1}{5}$, il dominio della disequazione è $D = R - \left\{\frac{1}{5}\right\}$

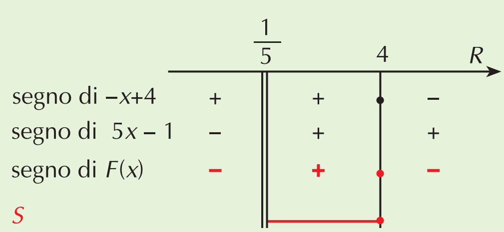
Svolgendo i calcoli si ottiene la disequazione: $\frac{6x + 14 - 10x + 2}{5x - 1} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-x+4}{5x-1} \geq 0$

Per determinare il segno della frazione e stabilire quando essa è positiva o nulla, studiamo come variano il segno del numeratore e quello del denominatore, e costruiamo poi la relativa tabella.

$-x + 4 \geq 0$ se $x \leq 4$

$5x - 1 > 0$ se $x > \frac{1}{5}$

La disequazione è verificata se: $\frac{1}{5} < x \leq 4$.



107 $\frac{5x-2}{x-6} < 3$ $[-8 < x < 6]$

108 $\frac{10}{x^2 - 9} < \frac{x+2}{x-3} - \frac{x+4}{x+3}$ $[-3 < x < -2 \vee x > 3]$

109 $\frac{x^2+1}{x^2 - 2x - 3} > 0$ $[x < -1 \vee x > 3]$

110 $\frac{x-1}{x^2 - 2x - 8} \leq 0$ $[x < -2 \vee 1 \leq x < 4]$

111 $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x+2} > \dfrac{25-4x}{x^2-x-6}$ $[-2 < x < 3 \ \vee \ x > 4]$

112 $\dfrac{3x-2}{18} + \dfrac{2x-1}{9} > \dfrac{x^2-x}{2(x+1)}$ $[x < -1 \ \vee \ 3-\sqrt{7} < x < 3+\sqrt{7}]$

113 $\dfrac{3}{x+9} + \dfrac{x+9}{3x} - \dfrac{5}{6} > 0$ $[-9 < x < -6 \ \vee \ 0 < x < 9]$

114 $\dfrac{x^2+x-1}{x-5} < x-2$ $\left[\dfrac{11}{8} < x < 5\right]$

115 $\dfrac{3x-10}{x-4} + \dfrac{4x+17}{x+3} \leq 7$ $[x < -3 \ \vee \ 2 \leq x < 4]$

116 $\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{1-x^2} < \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2x-2}$ $[R - \{-1, 1\}]$

117 $\dfrac{7x-5}{x-4} + \dfrac{1-3x}{x-3} \leq \dfrac{4x^2-5(x-2)}{x^2-7x+12}$ $\left[\dfrac{1}{8} \leq x < 3 \ \vee \ x > 4\right]$

118 $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{10}{x^2+2x-3} < \dfrac{-2x}{x+3}$ $\left[-3 < x < -1 \ \vee \ \dfrac{1}{2} < x < 1\right]$

119 $\dfrac{x+1}{2x^2-3} \geq \dfrac{1}{2x-5}$ $\left[-\sqrt{\dfrac{3}{2}} < x \leq -\dfrac{2}{3} \ \vee \ \sqrt{\dfrac{3}{2}} < x < \dfrac{5}{2}\right]$

I sistemi di disequazioni

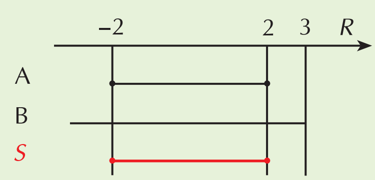
120 **ESERCIZIO GUIDA**

$\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ \dfrac{1}{3}x < -2x + 7 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ \dfrac{7}{3}x < 7 \end{cases}$

Determiniamo le soluzioni di ogni disequazione:

$x^2 - 4 \leq 0$ se $-2 \leq x \leq 2$ (**A**)

$\dfrac{7}{3}x < 7$ se $x < 3$ (**B**)



Dall'analisi della tabella ricaviamo che la soluzione del sistema è l'intervallo $-2 \leq x \leq 2$.

121 $\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x^2 + 3x - 40 < 0 \end{cases}$ $[-8 < x < 0 \ \vee \ 3 < x < 5]$

122 $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{6} < \dfrac{x+3}{3} \\ 4x^2 - 9x + 5 < 0 \end{cases}$ $\left[1 < x < \dfrac{5}{4}\right]$

123 $\begin{cases} (x-4)^2 + 2(x+3) < 17 \\ 6(x-2) - 4(2x-1) + 14 > 0 \end{cases}$ $[1 < x < 3]$

124 $\begin{cases} x(x-1) > 6(x-2) \\ \dfrac{4}{3}x - \dfrac{x+1}{2} > x-2 \end{cases}$ $[x < 3 \ \vee \ 4 < x < 9]$

125 $\begin{cases} x^2(x^2+1) \geq 0 \\ x^2 - 7x + 25 > 0 \end{cases}$ $[S = R]$

126 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+1) \geq \dfrac{5}{x-2} \\ (x-1)^3 > 0 \end{cases}$ $[1 < x < 2 \ \vee \ x \geq 4]$

127 $\begin{cases} \dfrac{x^2+4x}{2} + 3 > \dfrac{3x+1}{2} \\ \dfrac{(x-2)^2}{4} > \dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ $[x < 0 \ \vee \ x > 6]$

128 $\begin{cases} \dfrac{(2x-1)^2}{4} - x + 1 > \dfrac{1}{4} \\ (x+1)^2 + 2x > 1 \end{cases}$ $[x < -4 \ \vee \ x > 0 \ \wedge \ x \neq 1]$

129 $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2x-1} < 0 \\ \dfrac{3+x}{x-2} - \dfrac{x}{2x-4} \leq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[0 \leq x < \dfrac{1}{2}\right]$

130 $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x(x+2) + 2(1-3x) < x + 7 \end{cases}$ $\left[2 < x < \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}\right]$

131 $\begin{cases} x > \dfrac{1}{4x-3} \\ \dfrac{x-8}{x-3} > \dfrac{x-5}{x+8} \end{cases}$ $\left[-\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4} \ \vee \ 1 < x < 3 \ \vee \ x > \dfrac{79}{8}\right]$

132 $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ -x^2 + 6x - 7 < 0 \\ -x + 3 > 0 \end{cases}$ $[x < 1]$

133 $\begin{cases} (x-2)^3 \leq 0 \\ x + 14 > 0 \\ x^2 + 6x + 9 \geq 0 \end{cases}$ $[-14 < x \leq 2]$

134 $\begin{cases} x^2 - 3x + 5 > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$ $[-3 < x < 3]$

135 $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 2x > x + 1 \\ 3x - 2 < 2(x+1) \end{cases}$ $[1 < x < 2 \ \vee \ 3 < x < 4]$

136 $\begin{cases} 3x^2 - x \leq 0 \\ x - 3 < 0 \\ \dfrac{x^2+4}{x^2-9} \leq 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}\right\}\right]$

RICORDA

- Per risolvere l'equazione $\sqrt{A(x)} = B(x)$ si può procedere in due modi:
  - ***I modo:*** risolvendo il sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$
  - ***II modo:*** risolvendo l'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ e procedendo alla verifica delle soluzioni.
- Per risolvere l'equazione $\sqrt[3]{A(x)} = B(x)$ si risolve l'equazione equivalente: $A(x) = [B(x)]^3$

Comprensione

137 L'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$, con n pari, è equivalente in R:

a. all'equazione $A(x) = B(x)$
b. all'equazione $A(x) = -B(x)$
c. alle due equazioni $A(x) = B(x)$ e $A(x) = -B(x)$

138 L'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$, con n dispari, è equivalente in R:

a. all'equazione $A(x) = B(x)$
b. all'equazione $A(x) = -B(x)$
c. alle due equazioni $A(x) = B(x)$ e $A(x) = -B(x)$

139 L'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ ha soluzione k; affinché k sia anche una radice dell'equazione $\sqrt{A(x)} = B(x)$ è sufficiente che sia:

a. $B(k) \geq 0$ **b.** $A(k) \geq 0$
c. $A(k) \geq 0 \ \wedge \ B(k) \geq 0$ **d.** $A(k) \geq 0 \ \vee \ B(k) \geq 0$

Applicazione

Risolvi in R le seguenti equazioni irrazionali procedendo alla verifica delle soluzioni.

140 $\sqrt{6x+1} = 2x-3$ $[S = \{4\}]$

141 $\sqrt{x^2-4x} = x-1$ $[S = \varnothing]$

142 $\sqrt{4x^2+7x-2} = x+2$ $[S = \{1, -2\}]$

143 $\sqrt{x^2-x-1} = x-1$ $[S = \{2\}]$

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali impostando il sistema equivalente.

144 $\sqrt{x^2-4} = x+3$ $\left[S = \left\{-\frac{13}{6}\right\}\right]$

145 $\sqrt{x^2+5x+3} = x+1$ $\left[S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}\right]$

146 $\sqrt[4]{x^3-1} = \sqrt[4]{26}$ $[S = \{3\}]$

147 $\sqrt{x^2-9} = x-3$ $[S = \{3\}]$

148 $\sqrt{2x+1} = 3x - 9$ $[S = \{4\}]$

149 $\sqrt{3x^2 + x} = 2x$ $[S = \{0,\ 1\}]$

Risolvi in R le seguenti equazioni irrazionali con il metodo che ritieni più opportuno.

150 $\sqrt{25x^2 + 1} = 5x + 3$ $\left[S = \left\{-\frac{4}{15}\right\}\right]$

151 $\sqrt{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{2}x + 1$ $[S = \{-2\}]$

152 $\sqrt{x^2 + 3x + 4} = x + 1$ $[S = \varnothing]$

153 $\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 3(x + 2)$ $[S = \{-1\}]$

154 $x - \sqrt{x^2 + 9} = 1$ $[S = \varnothing]$

155 $\sqrt[3]{2(2x+1)+1} = \sqrt[3]{7x - 8}$ $\left[S = \left\{\frac{11}{3}\right\}\right]$

156 $\dfrac{\sqrt{x^2 + 3x + 9}}{x + 3} = 1$ $[S = \{0\}]$

157 $2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = x + \sqrt{5}$ $[S = \{2\}]$

158 $2(x+1) + \sqrt{x^2 - 4(x+3)} = 3x - 2$ $[S = \{7\}]$

159 $\sqrt{1 - x^2} - 3x = -1$ $\left[S = \left\{\frac{3}{5}\right\}\right]$

160 $\dfrac{1}{\sqrt{x - 7}} = 1$ $[S = \{8\}]$

161 $\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x - 2} = 1$ $[S = \varnothing]$

162 $x + 2 - \sqrt[3]{2x - 1} = 3$ $\left[S = \left\{0,\ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}\right]$

163 $\sqrt{9x^2 + 16} + 3x = \dfrac{8}{x}$ $[S = \{1\}]$

164 $2\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}x = 14 - 6\sqrt{x+2} + \frac{3}{2}x$ $[S = \{34,\ 2\}]$

LE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

la teoria è a pag. 7

RICORDA

- La disequazione $\sqrt{f(x)} < g(x)$ è equivalente al sistema $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$
- La disequazione $\sqrt{f(x)} > g(x)$ è equivalente ai sistemi $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$
- La disequazione $\sqrt[3]{f(x)} \gtrless g(x)$ è equivalente alla disequazione $f(x) \gtrless [g(x)]^3$

Comprensione

165 Se una disequazione irrazionale è data nella forma $\sqrt{f(x)} > g(x)$, quale fra i seguenti sistemi è ad essa equivalente?

a. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$

166 Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ e sia P l'insieme delle soluzioni della disequazione $A(x) > [B(x)]^2$; quale delle seguenti relazioni è corretta?

a. $S = P$ **b.** $S \subseteq P$ **c.** $P \subseteq S$ **d.** $S \cap P = \varnothing$

167 La disequazione $[A(x)]^3 > B(x)$ ha come insieme delle soluzioni un insieme K; la disequazione $\sqrt[3]{B(x)} < A(x)$ ha come insieme delle soluzioni un insieme H. Si può dire che:

a. $H \subset K$ **b.** $K \subset H$ **c.** $H = K$ **d.** $H \cap K = \varnothing$

Applicazione

Risolvi algebricamente le seguenti disequazioni irrazionali con radicali cubici.

168 **ESERCIZIO GUIDA**

$x + 3 > \sqrt[3]{x^3 + 9}$

Trattandosi di un radicale di indice dispari, si può elevare al cubo e risolvere la disequazione che si ottiene:

$(x+3)^3 > x^3 + 9 \quad \rightarrow \quad \cancel{x^3} + 9x^2 + 27x + 27 > \cancel{x^3} + 9$

$9x^2 + 27x + 18 > 0 \qquad x = \dfrac{-27 \pm \sqrt{729 - 648}}{18} = \dfrac{-27 \pm 9}{18} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$

La disequazione è verificata se: $x < -2 \quad \vee \quad x > -1$.

169 $x \leq \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$ $[x \leq 1]$

170 $\sqrt[3]{2x - 2} < -\sqrt[3]{2x + 5}$ $\left[x < -\dfrac{3}{4}\right]$

171 $\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 1} \leq \sqrt[3]{x^2 - 1}$ $\left[\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right]$

172 $\sqrt[3]{x^3 - x + 1} \geq x - 2$ $[S = R]$

173 $x - 2 > \sqrt[3]{3x^3 - 6x^2}$ $[x < -1 - \sqrt{3} \ \vee \ -1 + \sqrt{3} < x < 2]$

174 $\sqrt[3]{x^3 - 10x^2 + 2x - 1} \geq x - 3$ $[-26 \leq x \leq 1]$

Risolvi algebricamente le seguenti disequazioni irrazionali con radicali quadratici.

175 **ESERCIZIO GUIDA**

$\sqrt{-x^2+4x-3} < 2x+1$

L'indice della radice è pari e la disequazione ha la forma $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Essa è quindi equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -x^2+4x-3 \geq 0 & \text{esistenza del radicale} \\ 2x+1>0 & \text{il secondo membro deve essere positivo} \\ -x^2+4x-3 < (2x+1)^2 & \text{verifica della disuguaglianza} \end{cases}$$ $[1 \leq x \leq 3]$

176 $\sqrt{5-x} < 1$ $[4 < x \leq 5]$

177 $2\sqrt{3x-4} - 3 \leq 0$ $\left[\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{25}{12}\right]$

178 **ESERCIZIO GUIDA**

$2x-1 < \sqrt{x^2-4x}$

Puoi riscrivere la disequazione nella forma $\sqrt{x^2-4x} > 2x-1$

Essa è del tipo $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ed è quindi equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-4x \geq 0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-4x > (2x-1)^2 \end{cases}$$

Risolvendo ciascuno di essi e considerando l'unione delle loro soluzioni trovi quella della disequazione. $[x \leq 0]$

179 $9-x < \sqrt{10x+6}$ $[x > 3]$

180 $2x-3 > 2\sqrt{x^2+2x+5}$ $[S = \varnothing]$

181 $7x-1 < \sqrt{5-2x}$ $\left[x < \frac{6+2\sqrt{58}}{49}\right]$

182 $7-x \leq \sqrt{25-x^2}$ $[3 \leq x \leq 4]$

183 $4-2x > \sqrt{3x+4}$ $\left[-\frac{4}{3} \leq x < \frac{3}{4}\right]$

184 $\sqrt{3x-2} > 2(x-1)$ $\left[\frac{2}{3} \leq x < 2\right]$

185 $\sqrt{9-x^2} \geq x+7$ $[S = \varnothing]$

186 $\sqrt{3x+x^2-10} > x-2$ $[x \leq -5 \ \vee \ x > 2]$

187 $\sqrt{x^2+x+1} < 4$ $\left[\frac{-1-\sqrt{61}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{61}}{2}\right]$

188 $x + \sqrt{x^2+2x-3} > 0$ $[x \geq 1]$

189 $\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} > 2$ $[x < -3]$

190 $x - 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 5} > 2$ $[S = \emptyset]$

191 $\sqrt{5x + 10} > 8 - x$ $[x > 3]$

192 $\sqrt{\dfrac{x-9}{x-1}} < 2$ $\left[x < -\dfrac{5}{3} \ \vee \ x \geq 9\right]$

193 $\sqrt{4x^2 - 18} > \dfrac{3}{2}$ $\left[x < -\dfrac{9}{4} \ \vee \ x > \dfrac{9}{4}\right]$

194 $2x - 8 < \sqrt{16x - x^2}$ $[0 \leq x < 8]$

195 $\sqrt{x^2 + x + 1} < 2x + 3$ $[x > -1]$

LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI CON I MODULI

la teoria è a pag. 8

RICORDA

- L'equazione $|f(x)| = k$ è equivalente a $f(x) = -k \quad \vee \quad f(x) = k$
- La disequazione $|f(x)| > k$ è equivalente a $f(x) < -k \quad \vee \quad f(x) > k$
- La disequazione $|f(x)| < k$ è equivalente al sistema $\begin{cases} f(x) > -k \\ f(x) < k \end{cases}$

Comprensione

196 L'equazione $|3x - 1| = 5$ è equivalente a:

a. $3x - 1 = 5$ **b.** $3x - 1 = -5$

c. $3x - 1 = 5 \ \vee \ 3x - 1 = -5$ **d.** è impossibile

197 La disequazione $|x| > 3$ ha soluzione:

a. $x > 3$ **b.** $x < 3$ **c.** $x > \pm 3$ **d.** $x < -3 \ \vee \ x > 3$

198 La disequazione $|x| < 1$ ha soluzione:

a. $x < 1$ **b.** $x > -1$ **c.** $-1 < x < 1$ **d.** $x < -1 \ \vee \ x > 1$

Applicazione

Risolvi le seguenti equazioni con i moduli.

199 **ESERCIZIO GUIDA**

$|3x^2 - 1| = 5$

L'equazione è equivalente a $3x^2 - 1 = -5 \quad \vee \quad 3x^2 - 1 = 5$

Risolvendo le due equazioni otteniamo rispettivamente $x^2 = -\dfrac{4}{3} \quad \rightarrow$ equazione impossibile

$x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{-\sqrt{2},\ +\sqrt{2}\right\}$.

200 $|x^2 - 4x| = 5$ $[S = \{-1, 5\}]$

201 $1 + |2x^2 - x + 1| = 3$ $\left[S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}\right]$

202 $3 - |4x^2 - 9| = 0$ $\left[S = \left\{\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}\right]$

203 $|4x^2 - 3x + 1| + 2 = 0$ $[S = \varnothing]$

204 $5 - 3|3x^2 - 4x - 4| = -10$ $\left[S = \left\{\frac{1}{3}, 1, \frac{2 \pm \sqrt{31}}{3}\right\}\right]$

205 $\frac{1}{2}|3x^2 - 4x + 1| = x - 1$ $[S = \{1\}]$

206 $\frac{4}{5} = |x - 3x^2| + 2$ $[S = \varnothing]$

Risolvi le seguenti disequazioni con i moduli.

207 **ESERCIZIO GUIDA**

$|x^2 - 3x + 3| \leq 1$

La disequazione può essere scritta nella forma $-1 \leq x^2 - 3x + 3 \leq 1$

che è equivalente al sistema $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots \geq -1 \\ \dots\dots\dots\dots \leq 1 \end{cases}$ $[1 \leq x \leq 2]$

208 $|5x - 7| > -2$ (Suggerimento: un modulo è un numero sempre positivo) $[S = R]$

209 $|5x - 6| < 14$ $\left[-\frac{8}{5} < x < 4\right]$

210 $\left|\frac{3}{2}x - x + 1\right| < \frac{1}{2}$ $[-3 < x < -1]$

211 $|5 + x - 3x^2| < 0$ $[S = \varnothing]$

212 $|3x^2 - 2x + 1| > 9$ $\left[x < -\frac{4}{3} \vee x > 2\right]$

213 $|4x - 3x^2| > 7$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{7}{3}\right]$

214 $|x^2 - 9x + 15| > 1$ $\left[x < 2 \vee \frac{9 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \vee x > 7\right]$

LE TRASFORMAZIONI NEL PIANO CARTESIANO

la teoria è a pag. 10

Comprensione

215 Indica quali fra le seguenti sono le leggi della traslazione di vettore $\vec{v}(-1, 3)$:

a. $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 3 \end{cases}$

216 Le equazioni di una traslazione sono $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$; il vettore di traslazione è:

a. $\vec{v}(2, -5)$ **b.** $\vec{v}(-2, -5)$ **c.** $\vec{v}(-2, 5)$ **d.** $\vec{v}(2, 5)$

217 Una traslazione ha equazioni $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 3 \end{cases}$; per trovare la retta r' che corrisponde alla retta $r: y = 4x + 1$ si deve:

a. sostituire $(x - 1)$ al posto di x e $(y - 3)$ al posto di y
b. sostituire $(x + 1)$ al posto di x e $(y + 3)$ al posto di y
c. sostituire $(1 - x)$ al posto di x e $(3 - y)$ al posto di y

218 Nella simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta di equazione $2x - 3y + 4 = 0$ ha per corrispondente:

a. $-2x + 3y - 4 = 0$ **b.** $2y - 3x + 4 = 0$ **c.** $-2y + 3x + 4 = 0$ **d.** $2x - 3y - 4 = 0$

219 E' dato il punto $A(3, -1)$; fra i seguenti punti:

$B(-3, 1)$ $C(1, 3)$ $D(-3, -1)$ $E(-1, 3)$ $F(3, 1)$

individua qual è:

a. il simmetrico rispetto all'asse x
b. il simmetrico rispetto all'asse y
c. il simmetrico rispetto all'origine.

220 Il simmetrico del punto $P(-3, 8)$:

a. rispetto all'asse x ha coordinate:	① $(-3, -8)$	② $(3, 8)$	③ $(3, -8)$
b. rispetto all'asse y ha coordinate:	① $(-3, -8)$	② $(3, 8)$	③ $(3, -8)$
c. rispetto all'origine ha coordinate:	① $(3, 8)$	② $(8, -3)$	③ $(3, -8)$
d. rispetto alla bisettrice $y = x$ ha coordinate:	① $(8, -3)$	② $(3, -8)$	③ $(-8, 3)$

221 La retta di equazione $y = 3x + 6$:

a. ha come simmetrica rispetto all'asse x quella di equazione:
① $y = -3x + 6$ ② $y = -3x - 6$ ③ $y = 3x - 6$

b. ha come simmetrica rispetto all'asse y quella di equazione:
① $y = -3x - 6$ ② $y = -\frac{1}{3}x + 6$ ③ $y = -3x + 6$

c. ha come simmetrica rispetto all'origine quella di equazione:
① $y = 3x - 6$ ② $y = -3x - 6$ ③ $y = -3x + 6$

Applicazione

La traslazione

222 **ESERCIZIO GUIDA**

Al segmento di estremi $A(9, 2)$ e $B(3, 5)$ viene applicata una traslazione di vettore $\vec{v}(-4, 2)$. Determina le coordinate dei nuovi estremi e verifica che la lunghezza del segmento resta invariata.

Le equazioni della traslazione sono $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

I nuovi estremi del segmento hanno pertanto coordinate:

- $\begin{cases} x' = 9 - 4 \\ y' = 2 + 2 \end{cases}$ $A'(5, 4)$
- $\begin{cases} x' = 3 - 4 \\ y' = 5 + 2 \end{cases}$ $B'(-1, 7)$

Il segmento iniziale ha lunghezza $\overline{AB} = \sqrt{(9-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$

quello traslato è lungo $\overline{A'B'} = \sqrt{(-1-5)^2+(7-4)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$

Nella traslazione, essendo una isometria, la lunghezza dei segmenti è invariante.

223 Calcola le coordinate dei punti P' corrispondenti dei punti P assegnati, in una traslazione di vettore $\vec{v}$ le cui componenti sono indicate a fianco di ciascuno di essi:

a. $P(-1, -3)$ $\vec{v}(1, 2)$ **b.** $P(3, -1)$ $\vec{v}(-2, 0)$

c. $P(5, 4)$ $\vec{v}(-1, -2)$ **d.** $P(5, -4)$ $\vec{v}(0, 7)$

224 Considera il segmento di estremi $A(-2, -4)$ e $B(-7, 3)$. Determina le coordinate del punto M' trasformato del punto medio M di AB nella traslazione di vettore $\vec{v}$ di componenti 5 e -2. $\left[M'\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)\right]$

225 Considera il triangolo di vertici $A(1, -3)$, $B(-2, 1)$ e $C(-5, -1)$. Determina le coordinate dei vertici del triangolo trasformato mediante la traslazione di equazioni $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 4 \end{cases}$.

226 Il triangolo $A'B'C'$ è il trasformato del triangolo ABC di vertici $A(-5, 8)$, $B(-1, 2)$, $C(-5, -2)$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(5, -2)$. Trova i vertici di $A'B'C'$ e le coordinate del suo baricentro. $\left[G'\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$

227 Il punto P' ha coordinate $(-3, -2)$ ed è l'immagine del punto P in una traslazione di vettore $\vec{v}(2, 4)$. Calcola le coordinate di P.
(Suggerimento: conosci x' e y', devi trovare x e y)

228 Al segmento AB corrisponde, in una traslazione di vettore $\vec{v}(-5, 2)$, il segmento $A'B'$. Se $A'(-5, 3)$ e $B'(4, 5)$, quali sono le coordinate di A e di B? [$A(0, 1)$, $B(9, 3)$]

229 Il triangolo di coordinate $A'(4, -4)$, $B'(5, 1)$, $C'(2, -1)$ è il trasformato di un triangolo ABC in una traslazione di vettore $\vec{v}(5, -5)$. Determina le coordinate del triangolo ABC. [$A(-1, 1)$, $B(0, 6)$, $C(-3, 4)$]

Date le funzioni di equazione assegnata scrivi quella delle loro trasformate nella traslazione di vettore indicato.

230 **ESERCIZIO GUIDA**

$y = 2x - 3$ $\vec{v}(5, -2)$

Scriviamo le equazioni della traslazione $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ da esse ricaviamo $\begin{cases} x = x' - 5 \\ y = y' + 2 \end{cases}$

Dobbiamo quindi operare nell'equazione iniziale con le sostituzioni $\begin{cases} x \to x - 5 \\ y \to y + 2 \end{cases}$

Otteniamo così l'equazione della curva trasformata: $y + 2 = 2(x - 5) - 3$ da cui $y = 2x - 15$

231 $y = 3x + 5$ $\quad \vec{v}(5, -3)$ $\quad [y = 3x - 13]$

232 $y = x + 6$ $\quad \vec{v}(-5, -2)$ $\quad [y = x + 9]$

233 $y = -x - 4$ $\quad \vec{v}(3, 5)$ $\quad [y = -x + 4]$

234 $y = x^2 - 2$ $\quad \vec{v}(1, -3)$ $\quad [y = x^2 - 2x - 4]$

235 $y = \frac{1}{2}x^2$ $\quad \vec{v}(4, 3)$ $\quad \left[y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11\right]$

236 $y = -x^2 + 4x$ $\quad \vec{v}(-2, 1)$ $\quad [y = -x^2 + 5]$

237 $y = 2x^2 - 8$ $\quad \vec{v}(3, 4)$ $\quad [y = 2x^2 - 12x + 14]$

238 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$ $\quad \vec{v}(-3, -1)$ $\quad \left[y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2\right]$

La simmetria rispetto all'asse delle ascisse

239 Calcola le coordinate dei punti P' simmetrici rispetto all'asse x dei punti P assegnati:

$P\left(\frac{2}{3}, -7\right)$ $\qquad P(-3, 5)$ $\qquad P\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ $\qquad P\left(0, -\frac{4}{5}\right)$

240 Individua quali fra i seguenti punti sono simmetrici rispetto all'asse x:

$A(3, 4)$ $\qquad B\left(\frac{1}{2}, -5\right)$ $\qquad C\left(-\frac{3}{4}, 7\right)$ $\qquad D(3, -4)$

$E(8, -1)$ $\qquad F\left(\frac{3}{4}, -7\right)$ $\qquad G\left(-5, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad H(8, 1)$

241 Dato il segmento di estremi $A(1, 2)$, $B(5, 6)$, trova le coordinate del simmetrico del suo punto medio M rispetto all'asse delle ascisse.

242 Il triangolo ABC ha i vertici di coordinate $A(1, 2)$, $B\left(3, \frac{9}{2}\right)$, $C(0, 5)$. Determina le coordinate dei vertici del triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto all'asse x; trova poi il perimetro e l'area dei due triangoli e verifica che sono uguali.

243 Dato il triangolo di vertici $A(2, 1)$, $B(4, 4)$, $C(-1, 4)$, trova il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse e verifica che le aree dei due triangoli sono uguali.

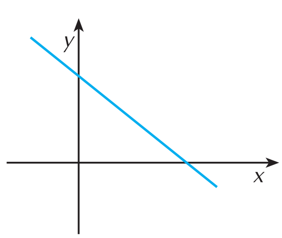
244 Scrivi l'equazione delle curve simmetriche rispetto all'asse x di quelle date:

a. $y = \frac{1}{2}x - 3$ $\qquad y = 2x + 5$ $\qquad y + 4x - 1 = 0$ $\qquad 3y + x - 5 = 0$

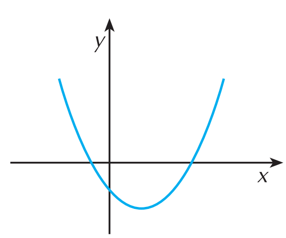
b. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ $\qquad y = 4 - \frac{3}{2}x^2$ $\qquad y = \frac{x^3 - 1}{2}$ $\qquad y = \sqrt{x}$

245 Ciascuno dei seguenti rappresenta il grafico di una funzione $y = f(x)$; costruisci il grafico di $y = |f(x)|$.

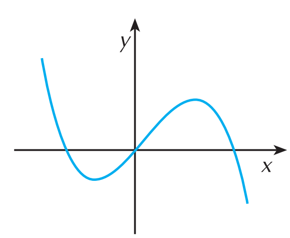
a.



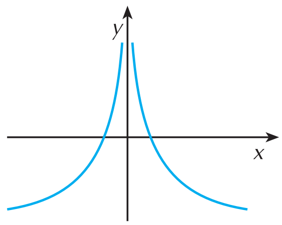
b.



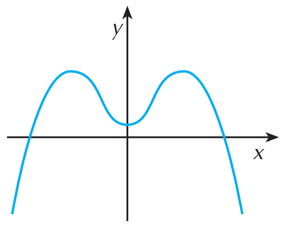
c.



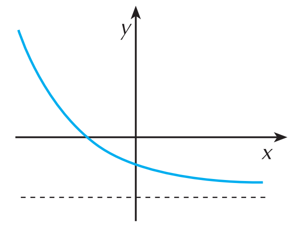
d.



e.



f.



La simmetria rispetto all'asse delle ordinate

246 Calcola le coordinate dei punti P' simmetrici rispetto all'asse y dei punti P assegnati:

$P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $\qquad$ $P\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$ $\qquad$ $P(7, 4)$ $\qquad$ $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$

247 Dato il triangolo di vertici $A(0, 3)$, $B(4, 1)$, $C(0, -3)$, trova le coordinate dei vertici del suo simmetrico rispetto all'asse y. Ci sono punti uniti? Quali sono?

248 Dopo aver verificato che il quadrilatero di vertici $A(3, 5)$, $B(5, 2)$, $C(0, -1)$, $D(-2, 2)$ è un parallelogramma, trova le coordinate dei vertici del suo simmetrico rispetto all'asse y. Quali sono i punti uniti?

249 Per ognuna delle seguenti curve, determina l'equazione della simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e calcola le coordinate di eventuali punti uniti:

a. $y = 2x + 1$ $\qquad$ **b.** $x + 2y = 0$ $\qquad$ **c.** $3x + 2y - 5 = 0$ $\qquad$ **d.** $y = \frac{1}{2}x - 3$

e. $y = x^2 - 4x$ $\qquad$ **f.** $y = -x^2 + 6x$ $\qquad$ **g.** $x^2 - 2y - 2x - 8 = 0$ $\qquad$ **h.** $y = -x^2 - 6x - 5$

250 Trova le equazioni delle simmetriche rispetto all'asse y delle seguenti curve:

a. $y = x^2 - x + 3$ $\qquad$ **b.** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x}$ $\qquad$ **c.** $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3}$ $\qquad$ **d.** $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

La simmetria rispetto all'origine degli assi

251 Calcola le coordinate dei punti P' simmetrici rispetto all'origine degli assi dei punti P assegnati:

$P\left(2, \frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $P\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $P\left(-5, \frac{5}{2}\right)$ $\qquad$ $P(4, 0)$

252 Un parallelogramma ha due vertici consecutivi di coordinate $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ ed ha centro in O. Quali sono le coordinate degli altri vertici?

253 Trova le equazioni delle curve simmetriche di quelle date rispetto all'origine degli assi. Fra esse, ci sono delle curve unite (cioè che hanno per trasformate se stesse) nella trasformazione?

a. $y = \frac{5}{2}x + 4$ $\qquad$ **b.** $2x - 3y + 1 = 0$ $\qquad$ **c.** $x - 2y + 3 = 0$ $\qquad$ **d.** $3x - y = 0$

e. $x = \frac{3}{2}$ $\qquad$ **f.** $y + 2 = 0$ $\qquad$ **g.** $y = x^2 - 4x$ $\qquad$ **h.** $x^2 + y^2 - 5 = 0$

254 Individua fra le seguenti curve quali si corrispondono nella simmetria avente centro nell'origine:

a. $y = \dfrac{-x^2 + x}{2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{x^2 - x}{2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{x^2 + x}{2}$

b. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$

La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$

255 Scrivi l'equazione della retta simmetrica di quella di equazione $4x - 7y + 3 = 0$ rispetto alla retta $y = x$. $[7x - 4y - 3 = 0]$

256 Un triangolo isoscele ABC ha per asse di simmetria la retta $y = x$. Un estremo della base è il punto $A(1, -3)$ e il suo vertice C ha ascissa 3. Calcola le coordinate di B e C. $[B(-3, 1), C(3, 3)]$

257 Un quadrato con i lati paralleli agli assi cartesiani ha un vertice in $P\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ed ha come asse di simmetria la bisettrice del primo e terzo quadrante; calcola le coordinate degli altri vertici.

$$\left[(-1, -1); \left(\frac{5}{2}, -1\right); \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)\right]$$

258 Una retta ha equazione $3x - 2y + 1 = 0$; trova l'equazione della sua simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$ e verifica che le due rette si intersecano sulla bisettrice. $[3y - 2x + 1 = 0; (-1, -1)]$

Risultati di alcuni esercizi.

1 **b.** **2** **a.** no, **b.** si, **c.** si, **d.** si, **e.** no **3** **c.** **70** **a.**, **b.**, **f.** **71** **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** F

72 **a.** si, **b.** no, **c.** no, **d.** si, **e.** no **73** **b.** **75** **c.** **137** **c.** **138** **a.** **139** **a.**

165 **a.** **166** **b.** **167** **c.** **196** **c.** **197** **d.** **198** **c.** **215** **b.**

216 **c.** **217** **b.** **218** **b.** **219** **a.** *F*, **b.** *D*, **c.** *B*

220 **a.** ①, **b.** ②, **c.** ③, **d.** ① **221** **a.** ②, **b.** ③, **c.** ①