Rette, piani e figure nello spazio

Obiettivi

- individuare la posizione reciproca di rette e piani nello spazio
- applicare isometrie, omotetie e similitudini nello spazio
- conoscere le caratteristiche dei poliedri e dei poliedri regolari
- conoscere le caratteristiche dei solidi di rotazione con particolare riferimento a cilindro, cono e sfera

Matematica, realtà e storia

Lo studio della geometria inizia con quello delle figure del piano e si estende poi allo spazio, anche se il mondo in cui viviamo è tridimensionale, sostanzialmente perché per descrivere gli oggetti dello spazio ci serviamo degli oggetti piani: un cubo ha facce che sono quadrati, una piramide le ha triangolari, un cilindro si può ottenere arrotolando un rettangolo.
La geometria è una scienza antichissima; il filosofo greco Erodoto fa risalire le sue origini più significative agli antichi egizi, qualche millennio prima di Cristo (il Papiro Rhind è del 2000 a.C.), ma si deve arrivare a Euclide, nel 300 a.C., per avere una raccolta di tutto il complesso delle conoscenze matematiche del tempo, organizzate in uno schema logico-deduttivo che, pur con qualche evoluzione, si insegna ancora oggi. Possiamo sicuramente affermare che gli *Elementi* di Euclide hanno avuto una diffusione nel mondo seconda solo a quella della Bibbia, e costituiscono il più grande monumento che l'uomo abbia saputo elevare alla matematica.
Per scrivere la storia della geometria sarebbe necessario un libro intero di parecchie pagine e non possiamo essere nemmeno lontanamente esaustivi su questo argomento; ci limitiamo perciò a dare qualche notizia su alcuni solidi "curiosi" che hanno proprietà interessanti.
Uno di questi è il *solido di Akos Csàszàr*, un matematico ungherese che ne propose la costruzione nel 1949 (***figura 1***); questo solido ha 7 vertici, 21 spigoli e 14 facce ed è curioso perché non ha diagonali (come il tetraedro) e ha una strana galleria che lo attraversa.
Un altro simpatico e curioso solido è lo *sphericon* (***figura 2***), creato da Colin Roberts nel 1969 quando era ancora uno studente e stava studiando le caratteristiche dell'anello di Möbius (per costruire un anello di Mobius basta prendere una striscia rettangolare di carta, ruotare uno dei suoi lati più corti di 180° e unire i bordi; la cosa più sorprendente di questa struttura è che ha una sola superficie!).

Figura 1

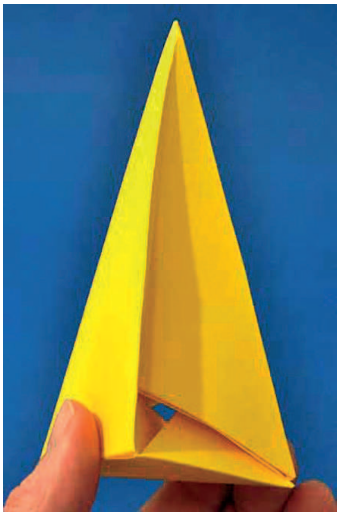
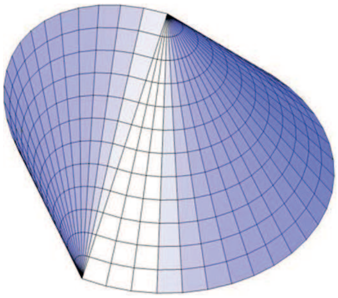


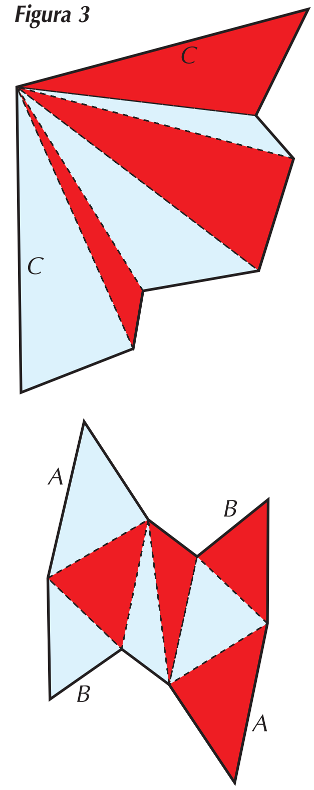
Figura 2



Questo solido si costruisce in modo molto semplice:
- si costruiscono due coni con un angolo di apertura di 90° e si uniscono per le basi
- si taglia il doppio cono ottenuto con un piano che passa per i due vertici: la superficie sezione è un quadrato
- si ruota una delle due parti di 90° e poi si riuniscono i due solidi.

In pratica è come prendere un quadrato e farlo ruotare attorno a una delle sue diagonali.
Roberts dimenticò la sua nuova costruzione per circa 20 anni, poi improvvisamente cominciò a studiarne le caratteristiche e nel 1990 un articolo pubblicato su *Scientific American* rese noto lo sphericon a un vasto pubblico; oggi questo solido è anche il logo di un'azienda che si occupa di sicurezza stradale e viene utilizzato per lo sviluppo di teorie sui labirinti.

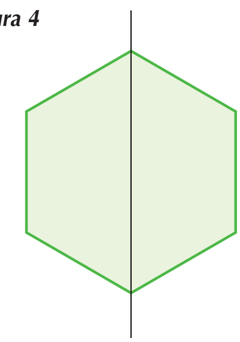
Figura 3



Il problema da risolvere

1. La ***figura 1*** precedente non rende bene l'idea di come sia fatto un solido di Csàszàr; ti proponiamo qui la sua costruzione. Nella ***figura 3*** è rappresentato lo sviluppo delle facce laterali e quello della base di questo solido; riproduci su un cartoncino il disegno ed esegui le piegature tenendo presente che le linee tratteggiate rappresentano delle valli, quelle intere delle creste. Per costruire la base, unisci con un pezzetto di adesivo i lati contraddistinti dalla lettera *A*, gira il foglio e unisci i due lati contrassegnati con *B*. Unisci i due lati *C* della parte superiore e poi cerca di far combaciare i lati di base della piramide superiore con quelli della base in modo che un lato di ciascun triangolo rosso sia abbinato a un lato di un triangolo grigio.
   Hai costruito il solido di Csàszàr; osservalo, conta i suoi vertici, i suoi lati, le sue facce e verifica le caratteristiche che sono state evidenziate.
2. Solidi simili allo sphericon si possono costruire anche partendo da un poligono regolare di *n* lati; considera un esagono e il solido che si ottiene facendolo ruotare attorno ad uno degli assi passanti per due vertici opposti (***figura 4***) e ripeti la costruzione fatta con lo sphericon. Usa un modello di carta e verifica che cosa ottieni.

Figura 4



1. I PRIMI ELEMENTI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 33

Lo studio della geometria euclidea che viene svolto nel biennio ti ha portato a conoscere le figure geometriche nel piano, a saperne individuare le proprietà, a saper calcolare misure di superfici piane; affronteremo ora lo studio della geometria nello spazio, cercando di individuare le proprietà più importanti e caratterizzanti delle figure solide, e imparando a calcolare misure di superfici e volumi. Vale la pena di ricordare, come prima cosa, gli assiomi più importanti che costituiscono l'impalcatura della geometria euclidea e che hai già studiato a suo tempo:

I PRIMI ASSIOMI

- due punti distinti dello spazio individuano una e una sola retta
- tre punti non allineati individuano uno ed un solo piano
- se due punti di una retta appartengono ad un piano, la retta giace sul piano
- il piano e lo spazio contengono infiniti punti e infinite rette; lo spazio contiene anche infiniti piani

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

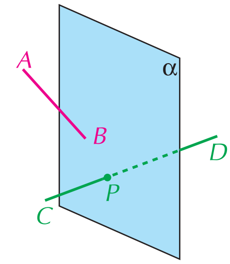
- una retta r che giace su un piano lo divide in due regioni, ciascuna delle quali è un semipiano, tali che il segmento che ha per estremi due punti che appartengono allo stesso semipiano non interseca r, il segmento che ha per estremi due punti che appartengono a semipiani diversi interseca r.

L'ultimo assioma è quello che avevamo chiamato di *partizione del piano*; un assioma analogo vale per lo spazio:

Assioma di partizione dello spazio. Ogni piano divide lo spazio in due regioni, dette semispazi, di cui il piano stesso si dice origine o frontiera, tali che (***figura 5***):

- il segmento che ha per estremi due punti A e B dello stesso semispazio non interseca il piano
- il segmento che ha per estremi due punti C e D appartenenti a semispazi diversi interseca il piano in un punto.

Figura 5

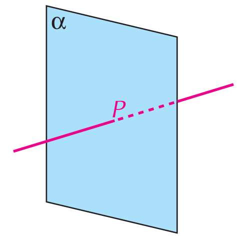


$AB \cap \alpha = \varnothing; \quad CD \cap \alpha = P$

Da questo assioma discendono immediatamente due importanti considerazioni:

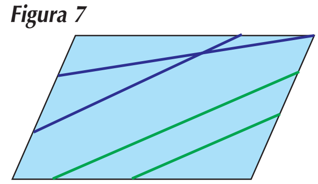
- un piano e un semispazio sono figure convesse;
- una retta avente in comune con un piano α un solo punto P è divisa da P in due semirette che appartengono a semispazi opposti rispetto ad α (***figura 6***).

Figura 6

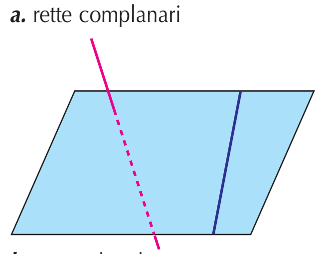


Abbiamo detto che lo spazio contiene infiniti piani ed infinite rette; cerchiamo quindi di scoprire come possono trovarsi in posizioni reciproche cominciando dalla **posizione reciproca di due rette.**
Diciamo **complanari** due rette che appartengono allo stesso piano, diciamo **sghembe** due rette che non appartengono a uno stesso piano (***figura 7***).
Ricordiamo poi che si dice **fascio proprio** l'insieme di tutte le rette complanari che passano per uno stesso punto detto centro del fascio e **fascio improprio** l'insieme di tutte le rette (complanari) che sono parallele fra loro.
Chiameremo poi **stella di centro *P*** l'insieme delle rette dello spazio che passano per P, il quale è detto **sostegno** della stella. L'intersezione di una stella con un piano passante per il suo sostegno è un fascio di rette proprio; possiamo inoltre dire che due rette distinte di una stella, dato che appartengono ad uno e un solo piano, individuano uno e un solo fascio proprio.

Figura 7



a. rette complanari



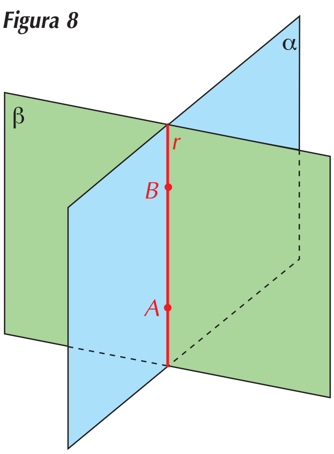
b. rette sghembe

Un piano ed una retta che non gli appartiene possono avere un solo punto in comune (se ne hanno due la retta appartiene al piano), ed in questo caso si dicono **incidenti**, oppure nessun punto in comune, ed in questo caso si dicono **paralleli**.

Consideriamo ora la **posizione reciproca di due piani** α e β e osserviamo che se hanno tre punti in comune, in virtù del secondo degli assiomi ricordati, allora li hanno tutti; è inutile quindi considerare il caso in cui i punti in comune sono più di tre. Possiamo allora dire che:

- se due piani hanno in comune tre punti non allineati, allora sono lo stesso piano;
- se due piani hanno in comune due punti A e B (oppure tre allineati), allora hanno in comune anche tutti i punti della retta AB (***figura 8***).

Figura 8



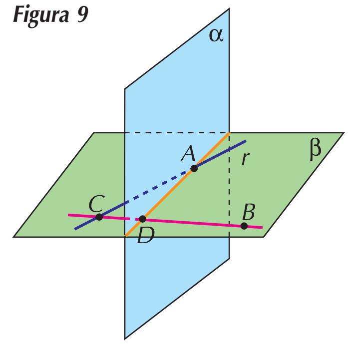
Vale inoltre il seguente teorema.

Teorema. Se due piani hanno in comune un punto, allora hanno in comune i punti di una retta che passa per quel punto.

Dimostrazione.

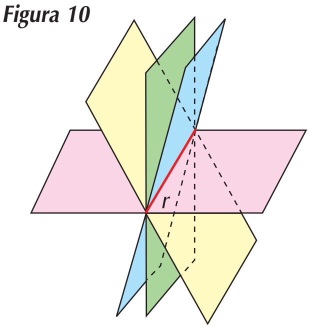
Dobbiamo far vedere due cose: che esiste una retta comune ai due piani e che non esistono altri punti in comune al di fuori di quelli di tale retta se i due piani sono distinti. Sia A il punto comune ai piani e sia r una retta del piano β passante per A; consideriamo poi un ulteriore punto $B \in \beta$ che non appartiene a r (***figura 9***). Il punto A divide r in due semirette opposte; consideriamo quella che giace dalla parte opposta di B rispetto ad α e su di essa prendiamo un punto C. Il segmento BC, per l'assioma di partizione dello spazio, incontra α in un punto D che, per come è stato costruito, appartiene contemporaneamente ad α e a β. Allora i due piani, avendo in comune due punti (A e D), hanno in comune la retta per quei due punti. Se vi fosse poi un altro punto in comune al di fuori della retta, i due piani, avendo tre punti non allineati in comune, non potrebbero essere distinti e coinciderebbero. ◀

Figura 9



In conseguenza di quanto affermato possiamo dire che due piani o sono **coincidenti**, o si intersecano lungo una retta ed in questo caso si dicono **incidenti**, oppure non hanno punti in comune ed in questo caso si dicono **paralleli**. Proveremo l'esistenza di piani paralleli in uno dei prossimi paragrafi.
Da quanto detto segue poi che per una retta r passano infiniti piani; l'insieme di tali piani si dice **fascio proprio di piani** e la retta r costituisce l'**asse** del fascio (***figura 10***). L'insieme dei piani che passano per uno stesso punto si dice invece **stella di piani**.

Figura 10



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Nello spazio sono date due rette a e b, si può dire che:

a. sono sempre complanari V F

b. se si intersecano in un punto sono complanari V F

c. sono complanari solo se si intersecano V F

d. se una retta c è complanare con a, allora è complanare anche con b. V F

2. Barra vero o falso.

a. Se due piani hanno un punto in comune, hanno anche una retta in comune. V F

b. Due piani distinti che si intersecano non possono avere in comune tre punti non allineati. V F

c. Una retta che non appartiene a un piano non può avere punti in comune con il piano. V F

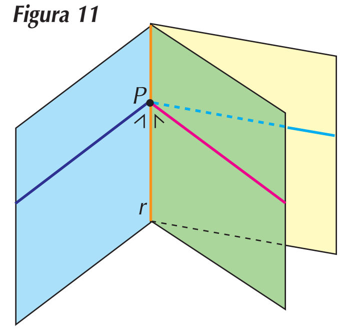
d. Intersecando una stella di rette con un piano si ottiene sempre un fascio di rette proprio. V F

2. PERPENDICOLARITÀ FRA RETTE E PIANI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 34

Nel piano la perpendicolare a una retta data per un punto ad essa esterno o per un punto che le appartiene è sempre unica. Anche nello spazio la perpendicolare a una retta data per un punto che non le appartiene è unica; basta pensare infatti che la retta ed il punto definiscono un piano. Le cose vanno diversamente se il punto appartiene alla retta.
Consideriamo dunque una retta r ed un suo punto P; poiché per r passano infiniti piani, ognuno di questi piani conterrà una retta che passa per P ed è perpendicolare a r (***figura 11***). Nello spazio, quindi, le perpendicolari ad una retta data per un suo punto sono in numero infinito e si può dimostrare che esse appartengono tutte ad uno stesso piano; vale infatti il seguente teorema.

Figura 11



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Teorema. Se una retta r è perpendicolare in un suo punto P ad altre due rette a e b, allora è perpendicolare a tutte e sole le rette del fascio di centro P del piano definito da a e b.

Dimostrazione.

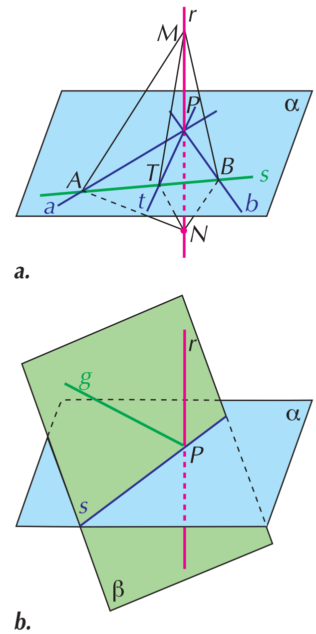


Figura 12

Costruiamo innanzi tutto la figura: disegniamo la retta r e prendiamo su di essa un punto P; disegniamo le due rette a e b per P perpendicolari ad r; poiché due rette che si intersecano definiscono un piano, disegniamo il piano α per P che contiene a e b. Vogliamo dimostrare che ogni altra retta di α che passa per P è perpendicolare a r (***figura 12a***). Sia t una qualunque retta del fascio di centro P su α e sia s una qualunque retta di α che non appartiene al fascio e che intersechi le rette a, b, t negli omonimi punti. Consideriamo adesso due punti M e N su r situati in semispazi opposti rispetto ad α tali che $PM \cong PN$ e congiungiamo mediante dei segmenti i punti M e N con i punti A e B.
I triangoli rettangoli che si vengono in questo modo a formare, avendo i cateti congruenti, sono congruenti, vale a dire che $\widehat{MAP} \cong \widehat{NAP}$ e $\widehat{MBP} \cong \widehat{NBP}$; di conseguenza si ha che $MA \cong NA$ e $MB \cong NB$.
Allora anche i triangoli MAB e NAB, avendo i tre lati ordinatamente congruenti, sono congruenti ed in particolare possiamo dire che $\widehat{MAB} \cong \widehat{NAB}$.
Consideriamo adesso i triangoli MAT e NAT che, avendo AT in comune, $MA \cong NA$ e $\widehat{MAT} \cong \widehat{NAT}$, sono congruenti per il primo criterio; di conseguenza $MT \cong NT$. Il triangolo MTN è quindi isoscele e TP è la mediana relativa alla base MN; dunque TP è anche altezza e perciò la retta t è perpendicolare alla retta r.
Resta ora da dimostrare che qualunque altra retta per P che non appartiene ad α non può essere perpendicolare a r. Supponiamo allora per assurdo che ci sia una retta g che passa per P, non appartiene ad α ed è perpendicolare a r (***figura 12b***). La retta g e la retta r definiscono un piano β che interseca α lungo una retta s che, passando per P, è anch'essa perpendicolare a r.
Nel piano β abbiamo quindi due rette distinte, la g e la s, che sono entrambe perpendicolari a r nello stesso punto. Sappiamo che, per l'unicità della perpendicolare nel piano, ciò è assurdo e quindi dobbiamo concludere che le sole rette perpendicolari a r sono quelle del piano α. ◀

Il teorema che abbiamo appena dimostrato ci consente di dare la definizione di **perpendicolarità fra retta e piano**.

Una retta r incidente ad un piano α in un punto P è perpendicolare ad α se è perpendicolare a tutte le rette di α che passano per P; il punto P si dice **piede** della perpendicolare. Le rette incidenti ad α che non sono ad esso perpendicolari si dicono **oblique**.

Alcune osservazioni.

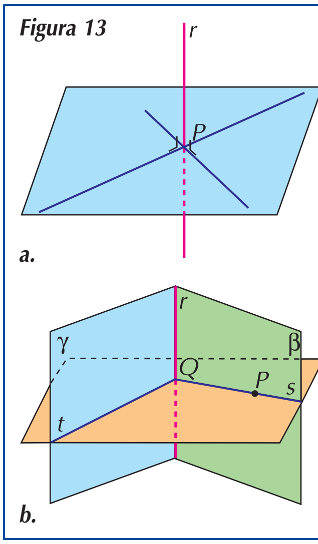
- La definizione, come spesso accade, non è operativa perché non è possibile verificare la perpendicolarità di r alle infinite rette per P di α; il teorema ci dà però un **criterio di perpendicolarità**. Infatti, poiché per definire un piano sono necessarie e sufficienti due rette incidenti, per stabilire la perpendicolarità di una retta r ad un piano α basta verificare che r sia perpendicolare a due qualsiasi rette di α che passano per P.
- Il teorema ci dà anche il modo di costruire il piano perpendicolare ad una retta r passante per un punto P.

Se P appartiene alla retta basta considerare due piani del fascio di asse r, considerare le due perpendicolari per P appartenenti a tali piani e infine il piano di queste due rette (***figura 13a***).
Se P non appartiene alla retta r basta considerare il piano β definito da P e da r e tracciare su di esso la perpendicolare s da P su r; tale perpendicolare incontra r in Q. Considerato poi un piano qualunque γ diverso da β del fascio di asse r, sia t la perpendicolare ad r che appartiene a questo piano e che passa per Q. Il piano perpendicolare è quello definito dalle rette s e t (***figura 13b***).

Si dimostra poi che:

> il piano perpendicolare ad una retta data passante per un punto P è unico.

Figura 13



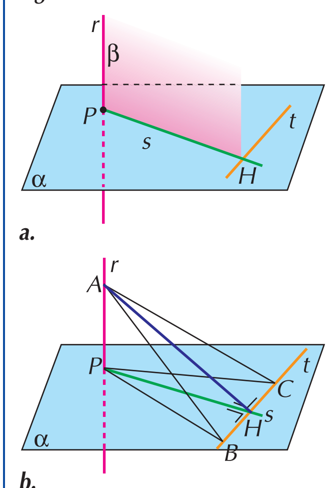
Enunciamo adesso un secondo importante teorema.

> **Teorema (delle tre perpendicolari).** Se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto P e da questo si conduce una retta s perpendicolare ad una retta t di α, questa è perpendicolare al piano β individuato da r e da s.

Dimostrazione.

Costruiamo la figura: disegniamo un piano α ed una retta r ad esso perpendicolare in un punto P; disegniamo una retta t su α che non passa per P; tracciamo la retta s uscente da P perpendicolare a t e sia H il loro punto di intersezione; costruiamo il piano β individuato dalle rette s e r (***figura 14a***). Vogliamo dimostrare che t è perpendicolare a β. Consideriamo i punti B e C di t situati da parti opposte rispetto a H e tali che $BH \cong HC$ ed un punto qualsiasi A su r; tracciamo poi i segmenti PB e PC e anche AB e AC (***figura 14b***). I triangoli rettangoli PBH e PCH, avendo i cateti congruenti, sono congruenti e quindi possiamo dire che $PB \cong PC$. Anche i triangoli rettangoli APB e APC sono quindi congruenti (hanno anch'essi i cateti congruenti) e quindi $AB \cong AC$. Il triangolo ABC è perciò isoscele sulla base BC e quindi AH, essendo mediana, è anche altezza; questo significa che AH è perpendicolare alla retta t. In definitiva, t è perpendicolare ad AH e PH, AH e PH definiscono il piano β, quindi t è perpendicolare a β. ◀

Figura 14



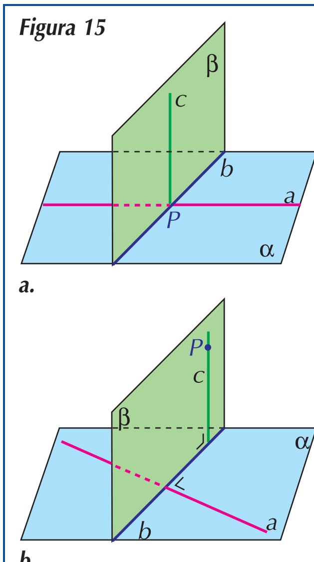
Facciamo anche in questo caso alcune considerazioni.

- Quest'ultimo teorema ci dà una indicazione su come costruire la retta perpendicolare ad un piano α per un punto P.
  Se P appartiene al piano (***figura 15a***) si può tracciare una retta a qualsiasi di α che passa per P e successivamente il piano β per P che sia perpendicolare ad a. I due piani α e β si incontrano lungo una retta b. Per il punto P sappiamo adesso costruire la retta c di β perpendicolare a b. La retta c risulta quindi perpendicolare a b ma anche ad a (β è perpendicolare ad a), quindi è perpendicolare al piano α.
  Se P non appartiene ad α procediamo in questo modo (***figura 15b***): tracciamo una qualunque retta a su α; tracciamo il piano β per P che è perpendicolare ad a, i due piani α e β si intersecano lungo la retta b; da P tracciamo la retta c di β che è perpendicolare a b. Per il teorema delle tre perpendicolari la retta c è la retta cercata.

Si dimostra poi che

> per un punto P si può condurre una e una sola retta perpendicolare ad un piano dato.

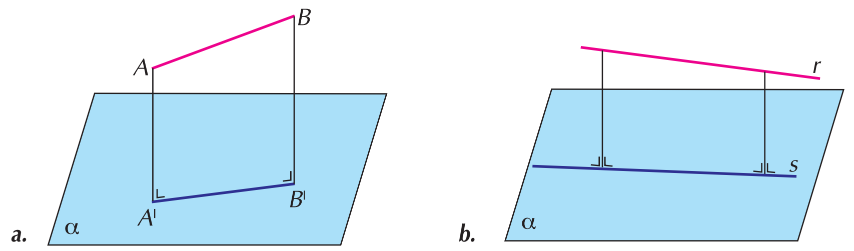
Figura 15



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

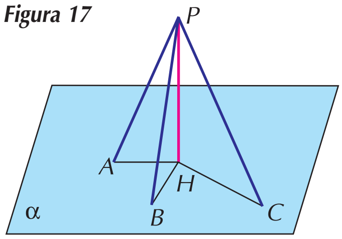
- Dati un piano α ed un punto P al di fuori di esso, si dice **proiezione ortogonale** di P su α il piede della perpendicolare condotta da P al piano.
  La proiezione ortogonale di un segmento AB si ottiene poi considerando il segmento $A'B'$ che ha per estremi le proiezioni ortogonali di A e di B su α (***figura 16a***).
  Analogamente la proiezione ortogonale di una retta r su un piano α è la retta s che passa per i punti proiezione di due qualsiasi punti di r (***figura 16b***).

Figura 16



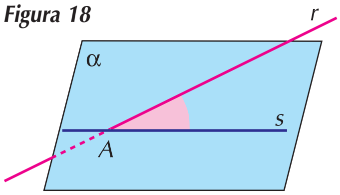
- Se da un punto P esterno ad un piano α si conducono il segmento di perpendicolare PH ed alcuni segmenti obliqui PA, PB, PC con $A,B,C \in \alpha$ si ha che (***figura 17***)
  a. il segmento di perpendicolare è minore di ogni altro segmento obliquo:
  $$PH < PA \;\wedge\; PH < PB \;\wedge\; PH < PC$$
  b. due segmenti obliqui aventi proiezioni congruenti sono fra loro congruenti e viceversa:
  $$HA \cong HB \;\Leftrightarrow\; PA \cong PB$$
  c. se due segmenti obliqui hanno proiezioni disuguali, allora anche i due segmenti obliqui sono disuguali nello stesso senso e viceversa:
  $$HC > HA \;\Leftrightarrow\; PC > PA$$

Figura 17



- La proiezione ortogonale di una retta r incidente in A ad un piano α su α stesso è una retta s di α che passa per A. Si può dimostrare che, se r non è perpendicolare al piano, l'angolo acuto $\widehat{rs}$ è il più piccolo fra gli angoli formati da r con una qualsiasi altra retta di α (***figura 18***). È allora naturale chiamare **angolo fra una retta ed un piano** l'angolo formato dalla retta e dalla sua proiezione ortogonale sul piano.

Figura 18



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Nello spazio sono dati un piano α e una retta r ad esso incidente in un punto P; si può dire che:

a. se r è perpendicolare in P a due rette di α, allora è perpendicolare ad α V F

b. se r è perpendicolare ad α, allora è perpendicolare a tutte le rette di α V F

c. qualunque sia r, esiste almeno una retta di α che è perpendicolare a r. V F

2. Sono date nello spazio una retta r perpendicolare a un piano α e due rette s e t su α; indica quale fra i seguenti enunciati esprime il teorema delle tre perpendicolari:

a. se r è perpendicolare a s e s è perpendicolare a t, allora s è perpendicolare al piano definito da r e t

b. se r è perpendicolare a s e s è perpendicolare a t, allora t è perpendicolare al piano definito da r e s

c. se r è perpendicolare a t e t è perpendicolare a s, allora t è perpendicolare al piano definito da r e s.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

3. Il parallelismo nello spazio

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 37

Mentre nel piano si può parlare soltanto di rette parallele, nello spazio dobbiamo considerare tre relazioni di parallelismo fra loro distinte:

- il **parallelismo fra rette**,
- il **parallelismo fra una retta ed un piano**,
- il **parallelismo fra piani**.

Anche se queste relazioni sono intuitivamente semplici, cercheremo di dare delle definizioni rigorose, enunciando poi le proprietà del parallelismo e dimostrando quelle meno intuitive.

3.1 Il parallelismo fra rette

La definizione di rette parallele nello spazio non può essere la stessa di quella data per due rette nel piano; sappiamo infatti che anche due rette sghembe non hanno punti di intersezione. Diremo quindi che:

due rette nello spazio si dicono parallele se sono coincidenti oppure se sono complanari e non hanno punti di intersezione.

Ricordiamo poi il seguente assioma:

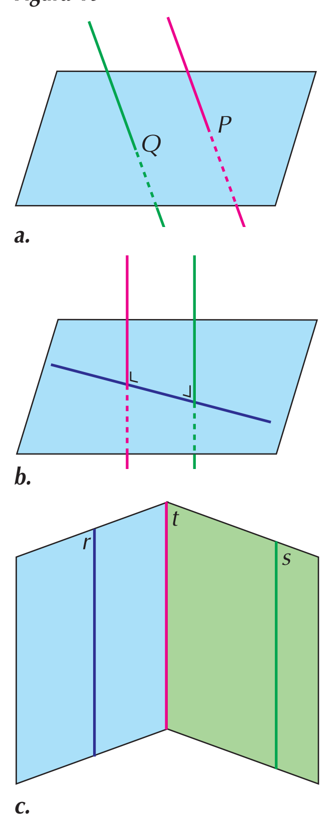
Assioma di unicità della parallela. Data una retta r ed un punto P fuori di essa, esiste ed è unica la parallela per P alla retta r.

Vediamo ora alcuni teoremi che riassumono le proprietà delle rette parallele nello spazio; di essi daremo solo l'enunciato per non appesantire la trattazione.

- Se due rette sono parallele, ogni piano che incontra una incontra anche l'altra (***figura 19a***).
- Due rette che sono perpendicolari ad uno stesso piano sono fra loro parallele e, viceversa, se due rette sono parallele, un piano che è perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra (***figura 19b***).
- Date due rette parallele r e s e considerati un piano passante per r ed uno passante per s che si intersecano lungo una terza retta t, si ha che t è parallela sia a r che a s (***figura 19c***).
- La relazione di parallelismo fra rette è
  - **riflessiva**: ogni retta è parallela a se stessa,
  - **simmetrica**: se una retta r è parallela ad una retta s, anche s è parallela a r,
  - **transitiva**: se r è parallela a t e t è parallela a s, anche r è parallela a s; attenzione però: r e t appartengono allo stesso piano, s e t appartengono allo stesso piano, ma non è detto che tutte e tre le rette siano sullo stesso piano (rivedi a questo proposito la ***figura 19c***).

  Di tutte le rette tra loro parallele si dice che hanno la stessa **direzione**.

Figura 19



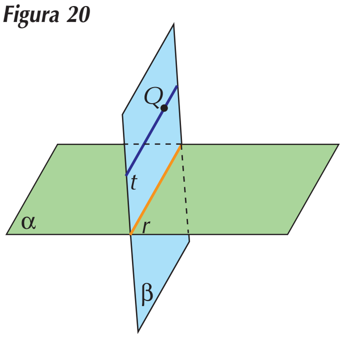
3.2 Il parallelismo fra rette e piani

Consideriamo un piano α, una retta r che giace sul piano ed un punto Q che non appartiene ad α. Sappiamo che Q e la retta r individuano un piano β la cui

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

intersezione con α è r (***figura 20***); sappiamo inoltre che, sul piano β, esiste ed è unica la parallela t per Q alla retta r. Tale retta non ha quindi punti in comune con il piano α e si dice che è parallela ad α. Diamo allora la seguente definizione.

Figura 20

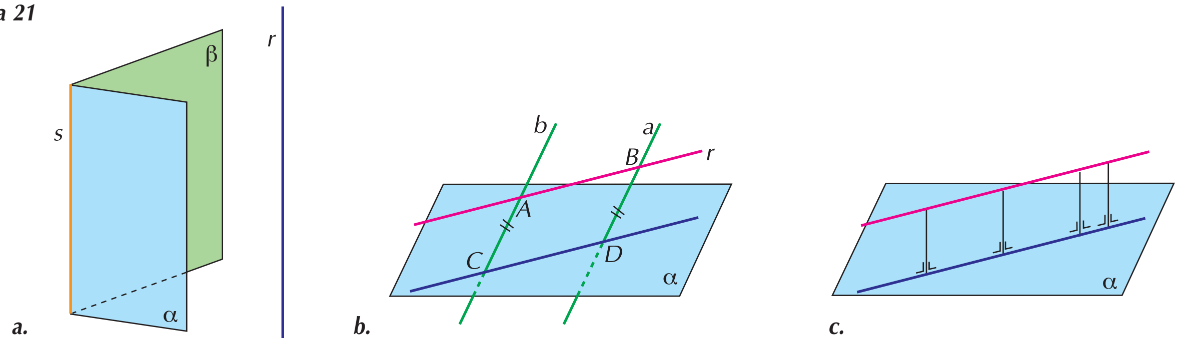


Una retta si dice parallela ad un piano se non ha alcun punto in comune con esso oppure se appartiene interamente al piano.

I teoremi che seguono esprimono le proprietà della relazione di parallelismo fra rette e piani; anche in questo caso tralasciamo la dimostrazione.

- Se due rette sono parallele, ogni piano parallelo all'una è parallelo anche all'altra.
- Se una retta r è parallela a due piani che si intersecano lungo una retta s, allora r è parallela a s (***figura 21a***).
- Se una retta r è parallela ad un piano α e se a e b sono due rette parallele che intersecano r nei punti A e B ed α nei punti C e D, allora $AC \cong BD$ (***figura 21b***).
- Se una retta ed un piano sono paralleli allora tutti i punti della retta hanno la stessa distanza dal piano (***figura 21c***).

Figura 21



Quest'ultima proprietà ci consente di dare la seguente definizione.

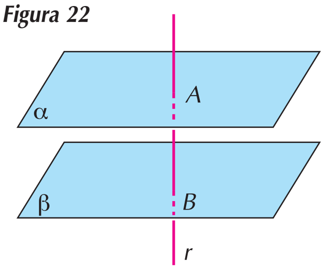
Si dice **distanza di una retta da un piano ad essa parallelo** la distanza di uno qualsiasi dei suoi punti dal piano.

3.3 Il parallelismo fra piani

Abbiamo già detto che due piani sono paralleli se non hanno punti di intersezione o se coincidono. L'esistenza di piani paralleli è garantita dalle seguenti proprietà:

Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono fra loro paralleli

Figura 22



Dimostrazione.

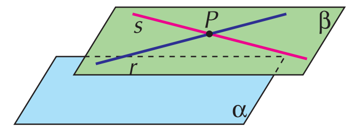
Consideriamo due piani α e β entrambi perpendicolari a una retta r (***figura 22***) e supponiamo, per assurdo, che essi si intersechino in un punto P (e quindi lungo una retta). Allora per P passerebbero due piani distinti entrambi perpendicolari a r e sappiamo che ciò non è possibile. Dunque α e β sono paralleli. ◀

Se per un punto P non appartenente ad un piano α si conducono due rette ad esso parallele, il piano β da esse individuato è parallelo ad α.

Dimostrazione.

Consideriamo due rette r e s incidenti in un punto P entrambe parallele ad un piano α; vogliamo dimostrare che il piano β individuato da r e s è parallelo ad α (***figura 23***). Supponiamo per assurdo che i due piani non siano paralleli, allora α e β si dovrebbero intersecare lungo una retta t; tale retta, per quanto detto al precedente paragrafo, dovrebbe essere parallela sia a r che a s. Ma ciò è assurdo perché per il punto P non possono passare due rette distinte entrambe parallele a t; dunque α è parallelo a β. ◀

Figura 23



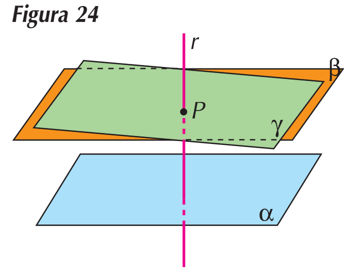
Possiamo adesso dimostrare il seguente teorema.

Teorema. Dati un piano α ed un punto P fuori di esso esiste ed è unico il piano ad esso parallelo passante per P.

Dimostrazione.

L'esistenza di un piano β parallelo ad α è garantita da una delle proprietà precedenti: basta infatti tracciare da P la retta r perpendicolare al piano α e successivamente il piano per P perpendicolare a r, oppure tracciare da P due rette parallele ad α e considerare il piano da esse definito.
Dimostriamo adesso che tale piano è unico. La retta r della prima costruzione è perpendicolare sia ad α che a β. Supponiamo ora che esista un secondo piano γ, distinto da β, che passi per P e sia parallelo ad α (***figura 24***); tale piano deve essere anch'esso perpendicolare alla retta r. Siamo dunque nella situazione di avere due piani distinti, passanti per lo stesso punto P ed entrambi perpendicolari alla stessa retta; sappiamo che ciò non è possibile per l'unicità del piano perpendicolare ad una retta data e quindi il teorema è dimostrato. ◀

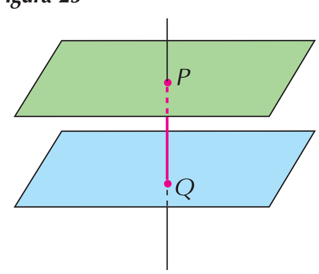
Figura 24



Enunciamo le proprietà dei piani paralleli.

- La relazione di parallelismo fra piani è riflessiva, simmetrica e transitiva. Di tutti i piani che sono tra loro paralleli si dice che hanno la stessa **giacitura** (la giacitura dei piani è l'analogo della direzione delle rette parallele).
  Si dice poi **fascio di piani paralleli** o **fascio improprio** di piani l'insieme di tutti i piani aventi la stessa giacitura e si dice **strato** la parte di spazio compresa fra due piani paralleli.
- Se due piani sono paralleli, ogni retta che incontra uno incontra anche l'altro.
- Se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare anche all'altro.
  Questa proprietà è l'inversa della prima fra quelle enunciate in questo paragrafo e ci consente di dare la seguente definizione.

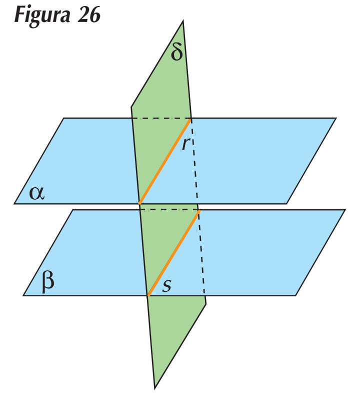
Figura 25



Si dice **distanza di due piani paralleli** il segmento da essi individuato su una qualsiasi retta perpendicolare ai due piani (***figura 25***).

- Se un piano incontra due piani paralleli, le rette intersezione sono fra loro parallele (***figura 26***).

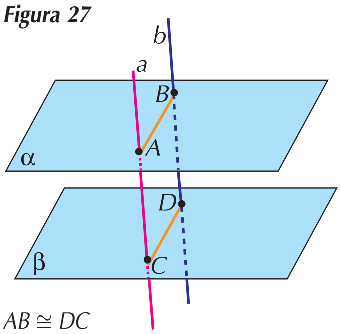
Figura 26



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

- Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela al primo è parallela anche al secondo.
- Se due piani paralleli intersecano due rette parallele, i segmenti che si vengono a determinare sono congruenti (***figura 27***).

Figura 27



$AB \cong DC$

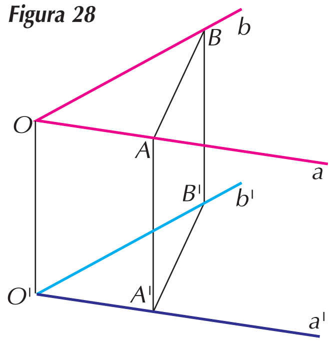
Altre due importanti proprietà sono evidenziate dai seguenti teoremi.

Teorema. Angoli i cui lati sono paralleli ed equiversi sono congruenti.

Dimostrazione.

Il teorema è vero se i due angoli appartengono allo stesso piano (ricorda quello che hai imparato nella geometria del piano). Supponiamo allora che essi appartengano a piani diversi e siano a e b le rette che definiscono il primo angolo, a' e b' quelle che definiscono il secondo. Poiché $a || a'$ e $b || b'$, i due angoli appartengono a piani paralleli (***figura 28***).

Figura 28



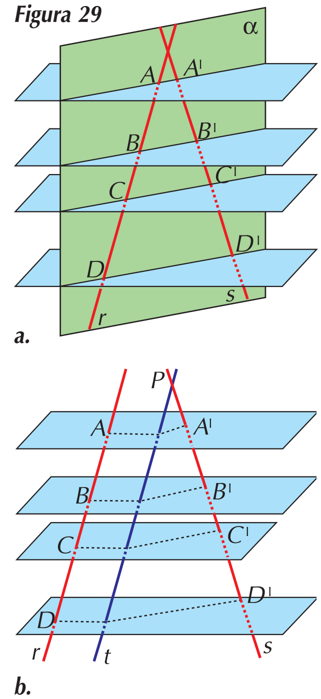
Indicati con O e O' i vertici dei due angoli, consideriamo i punti A, B, A' e B' sui lati omonimi dei due angoli in modo che sia $OA \cong O'A'$, $OB \cong O'B'$; costruiamo il quadrilatero $ABB'A'$ e tracciamo il segmento OO'. Si vede subito che i quadrilateri $OO'A'A$ e $OO'B'B$ sono parallelogrammi (hanno una coppia di lati opposti congruenti e paralleli) e quindi possiamo dire che OO' è congruente e parallelo ad AA' e che OO' è congruente e parallelo a BB'; di conseguenza, per la proprietà transitiva, anche AA' è congruente e parallelo a BB'.
Il quadrilatero $AA'B'B$ è dunque un parallelogramma e allora possiamo dire che $AB \cong A'B'$.
Consideriamo adesso i triangoli OAB e $O'A'B'$ che risultano essere congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli; in particolare sarà quindi $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}$. ◀

Teorema (di Talete nello spazio). Un fascio di piani paralleli individua su due rette trasversali insiemi di segmenti direttamente proporzionali.

Dimostrazione.

Se le rette trasversali r e s appartengono ad un piano α (***figura 29a***), le intersezioni di α con il fascio di piani determinano un fascio di rette parallele; vale perciò il teorema di Talete nel piano.
Se r e s sono sghembe possiamo ragionare in questo modo. Consideriamo un punto P su una delle due trasversali, ad esempio s, e tracciamo da P la parallela t alla retta r (***figura 29b***). Le rette s e t sono complanari ed il piano da esse definito, intersecando il fascio, determina insiemi di segmenti proporzionali. Essendo poi t e r parallele per costruzione, i segmenti individuati su t sono congruenti a quelli individuati su r. Ne consegue che anche gli insiemi di segmenti su r e su s sono proporzionali. ◀

Figura 29



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Nello spazio sono date due rette r e s e due piani α e β; si può dire che:

a. $r \parallel s \quad$ se $r \cap s = \varnothing$ V F

b. $r \parallel s \quad$ se $r \cap s = \varnothing \ \wedge \ r, s \in \alpha$ V F

c. se $r \parallel s \wedge r \perp \alpha$, allora $s \perp \alpha$ V F

d. se $\alpha \parallel \beta \wedge r \perp \alpha$, allora $r \perp \beta$. V F

2. Una retta r e un piano α non hanno punti comuni; si può dire che:

a. tutte le rette di α sono parallele a r V F

b. se α interseca un piano β lungo una retta s, allora r e s sono parallele V F

c. esiste un solo piano che contiene r e che è parallelo ad α V F

d. tutti i punti di r hanno la stessa distanza da α. V F

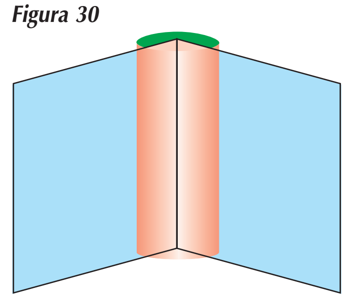
4. Diedri, perpendicolarità e angoloidi

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 38

4.1 Angoli diedri

Consideriamo due semipiani aventi la retta origine in comune; lo spazio viene in questo modo diviso in due regioni opposte (***figura 30***). Diamo allora la seguente definizione.

Figura 30



Si dice **angolo diedro** o più semplicemente **diedro** ciascuna delle due parti in cui due semipiani aventi la stessa origine dividono lo spazio, inclusi i semipiani stessi.
La retta origine dei due semipiani si dice **spigolo** del diedro, i due semipiani si dicono **facce**.

Diciamo poi che:

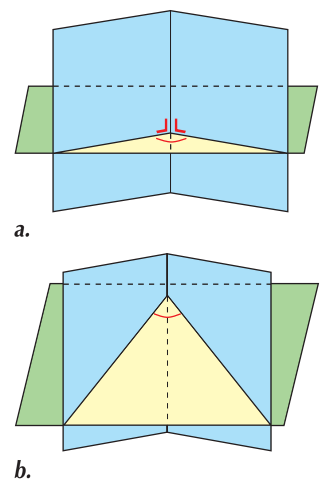
- un **diedro piatto** è un diedro le cui facce sono semipiani opposti; due diedri la cui somma è un diedro piatto si dicono **supplementari**;
- un **diedro giro** è un diedro in cui le facce sono semipiani coincidenti e che contiene tutti i punti dello spazio; un diedro che, avendo le facce coincidenti, non contiene altri punti dello spazio oltre a quelli delle facce si dice **diedro nullo**. Due diedri la cui somma è un diedro giro si dicono **esplementari**;
- un diedro si dice **convesso** se i prolungamenti delle sue facce non gli appartengono, si dice **concavo** in caso contrario; un diedro che è minore di un diedro piatto è convesso, un diedro che è maggiore di un diedro piatto è concavo; nel seguito, dove non specificato, sarà sottinteso che ci riferiamo a diedri convessi;
- due diedri si dicono **consecutivi** se hanno in comune una faccia e lo spigolo e se le altre due facce si trovano da parti opposte rispetto a quella comune;
- due diedri si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e le facce non comuni sono una il prolungamento dell'altra;
- si dice **semipiano bisettore** il semipiano che, uscendo dallo spigolo del diedro, lo divide in due diedri congruenti;
- ciascuna delle due parti in cui il semipiano bisettore divide un diedro piatto si dice **diedro retto**; due diedri la cui somma è un diedro retto si dicono **complementari**.

Diamo ora la seguente definizione.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Si dice **sezione** di un diedro l'intersezione di quel diedro con un piano incidente al suo spigolo. Se il piano è perpendicolare allo spigolo la sezione si dice **normale** (***figura 31a***), se il piano non è perpendicolare allo spigolo la sezione si dice **obliqua** (***figura 31b***).

Figura 31

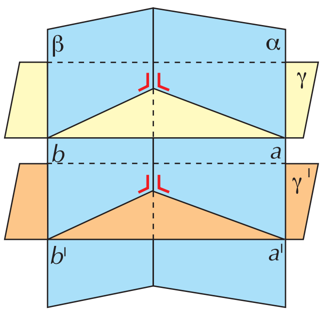


La sezione di un diedro è quindi un angolo. Per le sezioni normali dei diedri vale il seguente teorema.

Teorema. Tutte le sezioni normali di un diedro sono congruenti.

Dimostrazione.
Siano α e β le facce del diedro e siano γ e γ' due piani distinti perpendicolari allo spigolo del diedro (***figura 32***). Tali piani intersecano le facce del diedro lungo rette fra loro parallele, si ha cioè che $a||a'$ e $b||b'$. Gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{a'b'}$ hanno quindi i lati paralleli e concordi e perciò sono congruenti e, visto che tali angoli rappresentano le sezioni normali del diedro, possiamo considerare dimostrato il teorema. ◀

Figura 32



Da questo teorema e dalle considerazioni fatte discende che:

- angoli diedri congruenti hanno sezioni normali congruenti e, viceversa, se due angoli diedri hanno sezioni normali congruenti allora sono congruenti;
- due piani che si intersecano definiscono quattro angoli diedri; i diedri le cui facce sono una il prolungamento dell'altra si dicono **opposti allo spigolo**. Si verifica che diedri opposti allo spigolo sono congruenti;
- un diedro si dice **acuto** se la sua sezione normale è un angolo acuto, si dice **ottuso** se la sua sezione normale è un angolo ottuso.

Da quanto abbiamo detto risulta evidente l'importanza delle sezioni normali di un diedro; ogni diedro può essere infatti individuato da una sua sezione normale e quindi anche la misura di un diedro può essere fatta misurando la sua sezione normale.

La **misura** di un diedro è la misura di una sua sezione normale; essa si esprime quindi in gradi o in radianti.

4.2 Piani perpendicolari

Gli angoli diedri ci consentono di definire due piani perpendicolari.

Due piani si dicono **perpendicolari** se, incontrandosi, formano quattro diedri congruenti.

E' evidente che tali diedri sono retti.

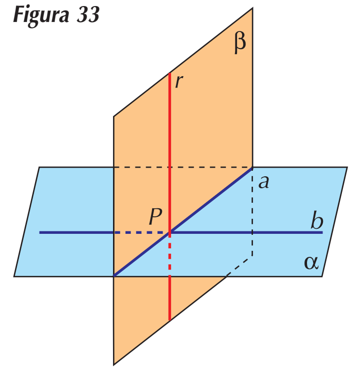
Vediamo le proprietà dei piani perpendicolari.

Teorema. Se una retta è perpendicolare ad un piano α, tutti i piani che la contengono sono perpendicolari ad α.

Dimostrazione.

Dati un piano α ed una retta r ad esso perpendicolare, indichiamo con P il piede della perpendicolare e sia β un qualunque piano che contiene r; poiché α e β non sono paralleli, si incontrano lungo una retta a (***figura 33***). Tracciamo ora da P la retta b di α perpendicolare ad a; la retta r, essendo perpendicolare al piano α, è perpendicolare ad entrambe le rette a e b. L'angolo $\widehat{rb}$ è quindi una sezione normale del diedro formato dai due piani ed è retto; i piani α e β sono dunque perpendicolari. ◀

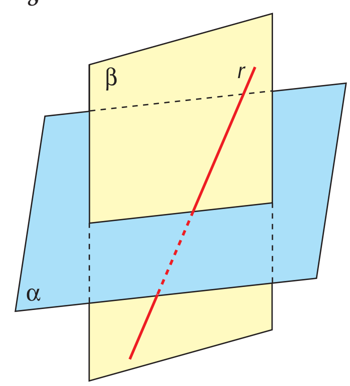
Figura 33



Si dimostra poi che:

- data una retta r non perpendicolare ad un piano α, esiste uno ed un solo piano passante per r e perpendicolare ad α (***figura 34***);
- se due rette r e s sono sghembe, esiste una e una sola retta t che è contemporaneamente perpendicolare ad entrambe; detti A e B i punti di intersezione di t con r e s, il segmento AB rappresenta la distanza fra r e s.

Figura 34

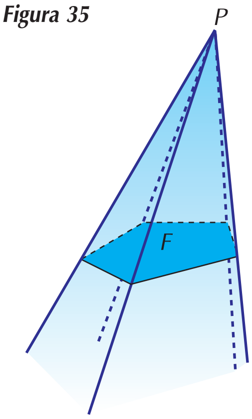


4.3 Angoloidi

Consideriamo un poligono F ed un punto P che non appartiene al piano di F; immaginiamo ora di tracciare tutte le semirette che, uscendo da P, intersecano i lati del poligono. Esse descrivono una superficie, che si dice **superficie piramidale**, che divide lo spazio in due regioni distinte (***figura 35***).

Si dice **angoloide** la parte di spazio delimitata dalla superficie piramidale che contiene il poligono F.

Figura 35

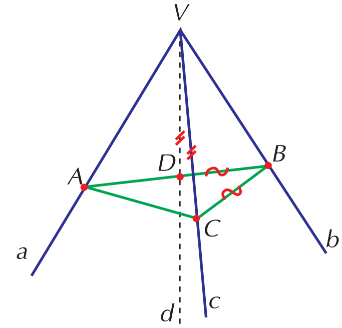


Il punto P si dice **vertice**, le semirette che passano per i vertici del poligono si dicono **spigoli** e gli angoli formati da due spigoli consecutivi si dicono **facce** dell'angoloide. Se le facce di un angoloide sono angoli tutti congruenti fra loro, l'angoloide si dice **regolare.** Diremo poi che un angoloide è **convesso** o **concavo** a seconda che il poligono F sia convesso o concavo.
Un angoloide prende nomi diversi a seconda del numero di facce che possiede: se ha tre facce parleremo di **triedro**, se ha 4 facce di **tetraedro**, se ha 5 facce di **pentaedro** e così via.

I triedi godono di un'importante proprietà:

Teorema. In ogni triedro, ciascuna faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza.

Figura 36



Dimostrazione.

Consideriamo il triedro $Vabc$ in ***figura 36***. La prima parte del teorema è immediata se consideriamo la faccia minore: questa è senza dubbio minore della somma delle altre due; prendiamo allora la faccia maggiore, sia essa $\widehat{ab}$, e dimostriamo che vale la relazione $\widehat{ab} < \widehat{ac} + \widehat{bc}$.

A questo scopo, nel piano della faccia $\widehat{ab}$, tracciamo la semiretta d di origine V che formi l'angolo $\widehat{bd}$ congruente all'angolo $\widehat{bc}$ e consideriamo poi due punti qualsiasi A e B rispettivamente sulle semirette a e b; tracciato il segmento AB,

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

indichiamo con D il suo punto di intersezione con d e prendiamo un punto C su c in modo che sia $VD \cong VC$. I triangoli VDB e VCB sono congruenti per il primo criterio ($VD \cong VC$, VB è in comune, $\widehat{DVB} \cong \widehat{CVB}$) e quindi possiamo dire che $DB \cong BC$.

Osserviamo adesso che nel triangolo ABC si ha che $\quad AC > AB - BC$

e, poiché $BC \cong BD$, possiamo anche scrivere che $\quad AC > AB - BD$

cioè $\quad AC > AD$.

Consideriamo adesso i triangoli VAC e VAD; di essi possiamo dire che hanno due lati ordinatamente congruenti (VA in comune, $VC \cong VD$), ma che i terzi lati sono disuguali ($AC > AD$); dunque anche $\widehat{ac} > \widehat{ad}$.

Se a quest'ultima disuguaglianza aggiungiamo l'angolo $\widehat{bc}$ a sinistra e l'angolo $\widehat{db}$ a destra (i due angoli sono congruenti) otteniamo che

$$\widehat{ac} + \widehat{bc} > \widehat{ad} + \widehat{db} \qquad \text{cioè} \qquad \widehat{ac} + \widehat{bc} > \widehat{ab}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Da questa relazione, sottraendo per esempio ad entrambi i membri la faccia $\widehat{bc}$, otteniamo anche che $\widehat{ac} > \widehat{ab} - \widehat{bc}$, cioè che una faccia è maggiore della differenza delle altre due. ◀

In un triedro valgono quindi le relazioni:

- $\widehat{ab} < \widehat{ac} + \widehat{bc} \qquad \widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc} \qquad \widehat{bc} < \widehat{ac} + \widehat{ab}$
- $\widehat{ac} > \widehat{ab} - \widehat{bc} \qquad \widehat{bc} > \widehat{ab} - \widehat{ac} \qquad \widehat{ab} > \widehat{ac} - \widehat{bc}$

La prima parte di questa proprietà dei triedri può essere estesa ad ogni angoloide; si ha cioè che:

- in ogni angoloide ciascuna faccia è minore della somma di tutte le altre.

Inoltre si può dimostrare che:

- la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di quattro angoli retti.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Barra vero o falso.

a. Due semipiani che hanno l'origine in comune individuano sempre un solo diedro. V F

b. Due diedri sono consecutivi se hanno lo spigolo e una faccia in comune. V F

c. Due diedri adiacenti individuano un semispazio. V F

d. L'ampiezza di un diedro si valuta mediante le sue sezioni normali. V F

e. Se due piani sono perpendicolari e P è un punto della retta intersezione, allora le rette per P che appartengono al primo piano sono perpendicolari alle rette per P che appartengono al secondo piano. V F

f. Se una retta r è perpendicolare a un piano α e r appartiene a un piano β, allora β è perpendicolare a α. V F

g. Se due piani α e β sono perpendicolari e si intersecano lungo una retta r, ogni retta di α che è perpendicolare a r è perpendicolare anche a β. V F

h. La somma delle facce di un angoloide è minore di un angolo giro. V F

5. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NELLO SPAZIO

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 40

5.1 Le isometrie

Il concetto di trasformazione geometrica può essere esteso dal piano allo spazio.

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca fra punti dello spazio.
In particolare chiameremo ancora **isometria** quella trasformazione che, ad ogni coppia di punti A e B dello spazio associa due punti A' e B' in modo che il segmento AB sia congruente al segmento $A'B'$.

Le proprietà delle isometrie che avevamo visto nel piano si possono estendere allo spazio; più precisamente si ha che:

- in una isometria ad una retta corrisponde una retta, ad un angolo corrisponde un angolo ad esso congruente, a rette parallele corrispondono rette parallele, a rette incidenti corrispondono rette incidenti.

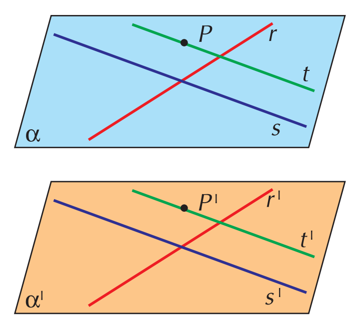
Valgono inoltre le seguenti proprietà peculiari delle isometrie nello spazio (dimostriamo per esteso solo le prime due e tralasciamo invece la dimostrazione delle altre per non appesantire la trattazione).

Teorema. In ogni isometria ad un piano corrisponde un piano.

Dimostrazione.

Siano r e s due rette incidenti di un piano α; le loro corrispondenti nell'isometria sono due rette r' e s' anch'esse incidenti che pertanto definiscono un piano α'. Consideriamo un punto P di α non appartenente a r o a s e sia P' il suo trasformato; vogliamo dimostrare che P' appartiene ad α' (***figura 37***).
Tracciamo da P la parallela t alla retta s, che quindi è incidente a r, e sia t' la sua trasformata. Le rette s' e t', essendo le trasformate di due rette parallele sono anch'esse parallele e quindi complanari; le rette r' e t', essendo le trasformate di rette incidenti, sono anch'esse incidenti e quindi complanari; ma anche s' e r' sono complanari, quindi le tre rette r', s' e t' devono appartenere allo stesso piano. Il punto P', trasformato di P e perciò appartenente alla retta t', appartiene quindi ad α'. ◀

Figura 37



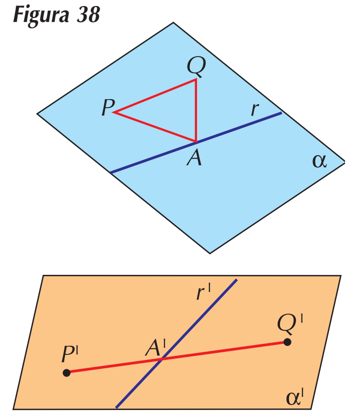
Teorema. In ogni isometria ad ogni semipiano corrisponde un semipiano.

Dimostrazione.

Consideriamo un piano α e sia r la retta che lo divide in due semipiani opposti; per le precedenti proprietà, ad α corrisponde un piano α' e a r corrisponde una retta r' di α'. Consideriamo i punti P e Q su uno dei due semipiani di α e siano P' e Q' i loro trasformati; vogliamo dimostrare che P' e Q' appartengono allo stesso semipiano di α' individuato da r'.
Supponiamo per assurdo che P' appartenga ad un semipiano di α' e Q' appartenga all'altro (***figura 38***), allora il segmento $P'Q'$ interseca la retta r' in un punto A'. Sia A il punto di r che ha A' come corrispondente; possiamo scrivere le seguenti relazioni relative al triangolo APQ e al segmento $P'Q'$:

$$PQ < AQ + AP \qquad P'Q' = A'Q' + A'P'$$

Figura 38



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Siccome in una isometria risulta $PQ \cong P'Q'$, $AQ \cong A'Q'$ e $AP \cong A'P'$, siamo giunti ad un assurdo e dobbiamo quindi concludere che P' e Q' appartengono anch'essi ad uno stesso semipiano. ◀

Analogamente si può dimostrare che:

In ogni isometria:

- ad un semispazio corrisponde un semispazio;
- a piani incidenti corrispondono piani incidenti e a piani paralleli corrispondono piani paralleli;
- se una retta e un piano sono incidenti oppure paralleli, lo sono anche i loro corrispondenti;
- un diedro corrisponde ad un diedro con la stessa sezione normale.

Ricordiamo poi il significato di alcuni termini:

- si dice **identica** la trasformazione che ad ogni punto dello spazio associa il punto stesso;
- si dicono **invarianti** di una trasformazione le caratteristiche dello spazio che rimangono inalterate nella trasformazione;
- un elemento di una trasformazione (un punto, una retta, un piano, o, più in generale, una qualsiasi figura geometrica) si dice **unito** se ha per trasformato se stesso;
- una trasformazione si dice **involutoria** se, applicata due volte, coincide con la trasformazione identica.

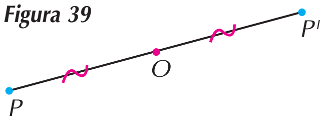
5.2 Le simmetrie

Se nel piano possiamo considerare la simmetria rispetto ad un punto e quella rispetto ad una retta, nello spazio, accanto a queste, dovremo considerare anche la simmetria rispetto ad un piano.
Analizziamo queste trasformazioni una alla volta, mettendo in evidenza le loro proprietà.

La simmetria centrale

Detto O un punto dello spazio, si chiama simmetria centrale di centro O la trasformazione che, ad ogni punto P dello spazio, associa un punto P' tale che O sia il punto medio del segmento PP' (***figura 39***).

Figura 39

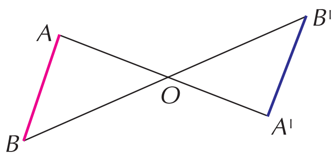


Si dimostra che:

- la simmetria centrale è una isometria.

Questo significa che, presi due punti A e B e considerati i loro simmetrici A' e B' rispetto al centro O, si ha che $A'B' \cong AB$ (***figura 40***).

Figura 40



Oltre alle proprietà comuni a tutte le isometrie, si vede facilmente che in una simmetria centrale:

- un piano si trasforma in un piano ad esso parallelo
- una retta si trasforma in una retta ad essa parallela

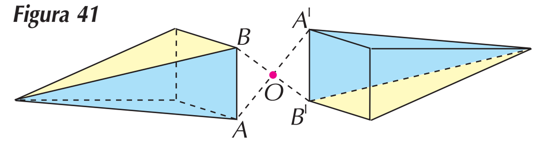
- una retta passante per il centro di simmetria è unita, ma non è di punti uniti
- un piano passante per il centro di simmetria è unito, ma non è un piano di punti uniti.

Inoltre:

- la simmetria centrale è involutoria.

Passando dal piano allo spazio tutte le proprietà della simmetria centrale si conservano ad eccezione di una: anche se due segmenti o due angoli che si corrispondono sono congruenti, non possiamo più dire che due figure dello spazio simmetriche rispetto ad un punto sono congruenti. Non è più vero infatti che esiste un movimento rigido che consente a tali figure di sovrapporsi; puoi verificarlo osservando la ***figura 41***: se cerchi di muovere una figura sull'altra in modo da sovrapporle (immagina una compenetrazione di solidi), le facce che si corrispondono (ne abbiamo evidenziate due con colori diversi) si trovano da parti opposte una rispetto all'altra. Vedremo che questa situazione si presenterà anche in altre occasioni e cercheremo di caratterizzarla meglio.

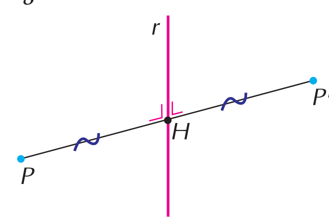
Figura 41



La simmetria assiale

Sia r una retta dello spazio e sia P un punto che non le appartiene. Si chiama **simmetria di asse *r*** la trasformazione che, ad ogni punto P dello spazio non appartenente a r, associa il punto P' tale che il segmento PP' sia perpendicolare a r ed il suo punto medio H appartenga a r (***figura 42***); se P appartiene a r si assume come suo simmetrico ancora P.

Figura 42



Anche nel caso di questa trasformazione si dimostra che

- la simmetria assiale è una isometria.

Possiamo inoltre dire che in ogni simmetria assiale:

- ogni punto dell'asse è unito
- ogni retta perpendicolare all'asse è unita, ma non è di punti uniti
- ogni piano perpendicolare all'asse è unito, ma non è un piano di punti uniti
- ogni piano passante per l'asse è unito.

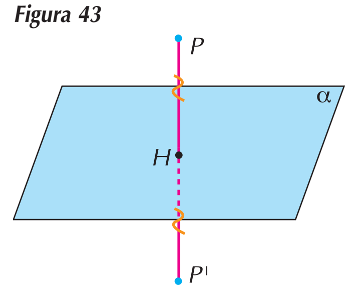
Inoltre:

- la simmetria assiale è involutoria
- figure che si corrispondono in una simmetria assiale sono congruenti.

La simmetria ortogonale

Consideriamo un piano α ed un punto P che non gli appartiene; da questo tracciamo la perpendicolare al piano ed indichiamo con H il punto intersezione (***figura 43***). Sul prolungamento della semiretta PH, consideriamo un punto P' tale che $P'H \cong PH$. I punti P e P' si dicono **simmetrici rispetto al piano α.**

Figura 43



Si dice **simmetria ortogonale** la trasformazione che, ad ogni punto dello spazio associa il suo simmetrico rispetto ad un prefissato piano α.

Anche per questa trasformazione si dimostra che

- la simmetria ortogonale è un'isometria.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Vediamo quali sono le principali proprietà di questa trasformazione. In una simmetria ortogonale:

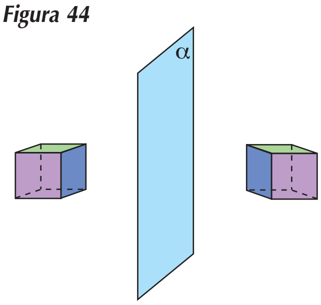
- i punti del piano di simmetria sono punti uniti
- le rette del piano di simmetria sono rette unite e sono anche rette di punti uniti
- le rette perpendicolari al piano di simmetria sono unite ma non sono di punti uniti perché ogni punto di tali rette non si trasforma in se stesso
- i piani perpendicolari al piano di simmetria sono uniti ma non sono piani di rette unite o di punti uniti.

Inoltre:

- se una retta forma un certo angolo con il piano di simmetria, la sua trasformata forma un angolo della stessa ampiezza
- se una retta è parallela al piano di simmetria, anche la sua trasformata lo è
- se un piano incide il piano di simmetria lungo una retta a, anche il suo trasformato passa per a
- se un piano è parallelo al piano di simmetria, anche il suo trasformato lo è.

Come nel caso della simmetria centrale, anche in quella ortogonale figure simmetriche non sono congruenti, basta osservare la ***figura 44*** per rendersene conto.
Tuttavia, in questi due casi, le figure che si ottengono per simmetria (centrale o ortogonale) hanno i segmenti, gli angoli, le facce ed in generale tutti gli elementi piani corrispondenti che sono congruenti. Possiamo quindi considerarli "uguali" nel senso comune del termine.
Diamo allora la seguente definizione.

Figura 44



Due figure nello spazio si dicono **inversamente congruenti** se si corrispondono in una simmetria ortogonale.

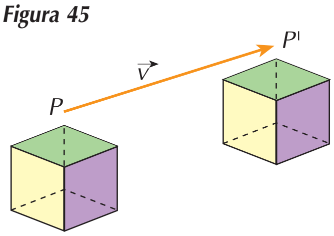
Si dimostra poi che

- due figure dello spazio che si corrispondono in una simmetria centrale sono inversamente congruenti.

5.3 Traslazioni e rotazioni

Si dice **traslazione** di vettore $\vec{v}$ la trasformazione che ad ogni punto P dello spazio associa il punto P' tale che il segmento PP' sia equipollente a $\vec{v}$ (***figura 45***).

Figura 45

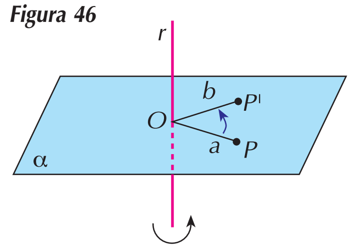


Si dimostra che anche la traslazione è un'isometria e che è una congruenza; inoltre in una traslazione:

- non vi sono punti uniti
- sono unite le rette che hanno la stessa direzione del vettore $\vec{v}$, ma non sono rette di punti uniti
- sono uniti i piani che sono paralleli alla direzione di $\vec{v}$, ma non sono piani di rette o di punti uniti
- ad ogni piano corrisponde un piano ad esso parallelo.

Fissiamo ora nello spazio una retta r e sia $\widehat{ab}$ un angolo di ampiezza assegnata. Preso un punto qualunque P dello spazio che non appartiene a r, consideriamo il piano α per P perpendicolare a r e sia O il punto in cui α e r si intersecano (***figura 46***). Su α consideriamo la rotazione di centro O e ampiezza $\widehat{ab}$ che associa al punto P un punto P'.

Figura 46



Diamo la seguente definizione.

Si dice **rotazione di asse r e ampiezza $\widehat{ab}$** la trasformazione che ad ogni punto P dello spazio associa il punto P' corrispondente di P nella rotazione piana di ampiezza $\widehat{ab}$ sul piano α per P e perpendicolare a r ed avente come centro il punto O intersezione di α con r.

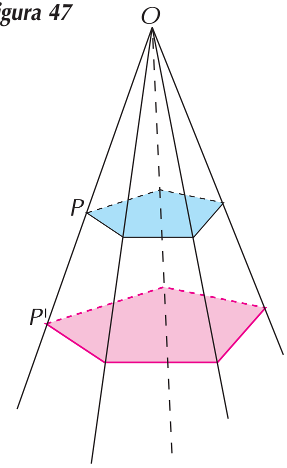
Si dimostra che anche una rotazione è un'isometria e che due figure che si corrispondono in una rotazione sono congruenti.

5.4 Omotetie e similitudini nello spazio

Anche l'omotetia e la similitudine sono trasformazioni che possono essere estese dal piano allo spazio.

Diciamo che i punti P e P' si corrispondono in una **omotetia di centro O e rapporto k** se P e P' appartengono ad una retta della stella di centro O ed è $\frac{OP'}{OP} = |k|$ (***figura 47***).

Figura 47



Valgono le seguenti proprietà che ci limitiamo ad enunciare. In ogni omotetia di centro O e rapporto k:

- l'immagine di un piano è un piano ad esso parallelo
- l'immagine di una retta è una retta ad essa parallela
- ogni piano e ogni retta che passano per il centro O sono uniti
- l'immagine di un diedro è un diedro congruente a quello dato
- l'omotetia di rapporto 1 coincide con la trasformazione identica
- l'omotetia di rapporto -1 coincide con la simmetria centrale.

Analogamente a quella data nel piano, possiamo poi introdurre la seguente definizione.

Si dice **similitudine** il prodotto di una omotetia con una isometria.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Nello spazio è data una simmetria di centro O; si può dire che:

a. i piani che passano per O sono piani uniti V F

b. i piani che passano per O sono piani di punti uniti V F

c. figure che si corrispondono sono inversamente congruenti. V F

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

2. Nello spazio è data una simmetria ortogonale rispetto a un piano α; si può dire che:

a. tutti i piani paralleli ad α sono uniti V F

b. tutti i piani incidenti rispetto ad α hanno per trasformati piani incidenti ad α lungo la stessa retta V F

c. due angoloidi che si corrispondono hanno le facce corrispondenti congruenti, ma non sono direttamente congruenti. V F

3. In una omotetia di centro O e rapporto k :

a. figure piane che si corrispondono appartengono a piani paralleli V F

b. le aree di figure piane che si corrispondono stanno nel rapporto k^2 V F

c. le rette che passano per O sono unite e sono rette di punti uniti se $|k| = 1$. V F

6. I POLIEDRI

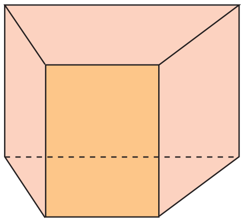
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 42

Si dice **superficie poliedrica** la figura che si ottiene dall'unione di n poligoni (con $n \geq 4$), appartenenti ciascuno a piani diversi, tali che ogni lato sia l'intersezione di due di essi.

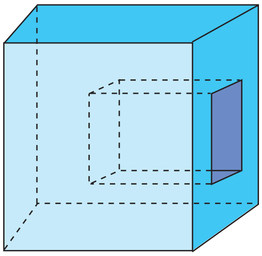
Si dice **poliedro** la parte di spazio delimitata da una superficie poliedrica.

I lati ed i vertici dei poligoni si dicono **spigoli** e **vertici** del poliedro, i poligoni stessi si dicono **facce**; i segmenti aventi per estremi due vertici non appartenenti alla medesima faccia si dicono **diagonali**.
I vertici di un poliedro sono anche i vertici di altrettanti angoloidi, un poliedro può quindi essere considerato come l'intersezione di tali angoloidi che, per questo, si dicono **angoloidi del poliedro;** se gli angoloidi sono tutti convessi anche il poliedro lo è. I diedri di questi angoloidi sono i **diedri del poliedro**.
Un poliedro si dice **semplice** se non ha "buchi": in ***figura 48*** puoi vedere un poliedro semplice e uno che non lo è. Nella nostra trattazione ci occuperemo esclusivamente dei poliedri semplici e sottintenderemo perciò d'ora in avanti la dicitura "semplice".
Un poliedro prende il nome dal numero delle sue facce: se ha quattro facce si dice **tetraedro**, se ne ha cinque si dice **pentaedro**, se ne ha sei **esaedro** e così via.

Figura 48



poliedro semplice



poliedro non semplice

Fra il numero f delle facce, il numero v dei vertici ed il numero s degli spigoli di un poliedro (solo se è semplice) esiste una relazione che prende il nome di **relazione di Eulero**, anche se la sua scoperta si deve a Cartesio

$$f + v = s + 2$$

Ad esempio, un pentaedro ha 5 vertici, 5 facce, 8 spigoli ed è $5 + 5 = 8 + 2$.

6.1 Poliedri regolari

Un poliedro si dice **regolare** se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi diedri e angoloidi sono diedri e angoloidi congruenti.

Mentre nel piano si possono costruire poligoni regolari con un qualsivoglia numero di lati, nello spazio i poliedri regolari sono solo cinque. Vediamo perché. Ricordiamo che la somma delle facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro ed inoltre nel vertice di un poliedro devono concorrere almeno tre facce. Osserviamo allora che, in virtù di queste considerazioni, potremo avere poliedri regolari le cui facce sono:

- triangoli equilateri (infatti $60° \cdot 3 = 180° < 360°$),
- quadrati $(90° \cdot 3 = 270° < 360°)$,
- pentagoni $(108° \cdot 3 = 324° < 360°)$,

ma non potremo avere poliedri regolari con facce esagonali ($120° \cdot 3 = 360°$ che non è minore di un angolo giro) e più in generale con un numero di lati maggiore di cinque. I poliedri regolari sono dunque i seguenti.

- Il **tetraedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice tre triangoli equilateri; esso ha 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli (***figura 49***). Un tale poliedro ha sei piani di simmetria, ognuno passante per un vertice e per la retta dell'altezza della faccia ad esso opposta; tre assi di simmetria, ciascuno dei quali passa per i punti medi di due spigoli opposti.
- L'**ottaedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice quattro triangoli equilateri $(60° \cdot 4 = 240° < 360°)$; esso ha 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli (***figura 50***). Un ottaedro ha un centro di simmetria, dato dal punto di intersezione delle diagonali; tre assi di simmetria che uniscono due vertici opposti e sei assi di simmetria che passano per i punti medi di due spigoli paralleli; nove piani di simmetria di cui tre passano per quattro spigoli paralleli a due a due e sei passano per due vertici opposti e per i punti medi di due spigoli opposti.
- L'**icosaedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice cinque triangoli equilateri $(60° \cdot 5 = 300° < 360°)$; esso ha 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli (***figura 51***). Anche questo poliedro ha un centro di simmetria e possiede alcuni assi e piani di simmetria anche se meno facili da individuare rispetto ai casi precedenti.
- L'**esaedro** o **cubo** che si ottiene facendo concorrere in un vertice tre quadrati $(90° \cdot 3 = 270° < 360°)$; esso ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli (***figura 52***). Tale poliedro ha un centro di simmetria individuato dal punto di intersezione delle diagonali; nove assi di simmetria (tre assi passano per i centri di due facce opposte, sei assi passano per i punti medi di due spigoli opposti); nove piani di simmetria (tre piani mediani e sei piani diagonali).
- Il **dodecaedro** che si ottiene facendo concorrere in un vertice tre pentagoni regolari $(108° \cdot 3 = 324° < 360°)$; esso ha 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli (***figura 53***); anche questo poliedro ha un centro di simmetria ed alcuni assi e piani di simmetria.

Non è possibile costruire poliedri facendo concorrere in un vertice più di cinque triangoli o più di tre quadrati o pentagoni.

I cinque poliedri regolari sono anche detti **solidi platonici** a causa del significato simbolico ad essi attribuito dal filosofo greco Platone; secondo la filosofia dell'epoca, l'universo era costituito da quattro elementi fondamentali acqua, aria, terra e fuoco e lo schema costruito da Platone, che puoi vedere in ***figura 54***, esercitò notevole influenza su filosofi e scienziati per molti secoli; egli poi attribuiva al dodecaedro un culto particolare considerandolo come il simbolo stesso dell'universo.
Da ultimo accenniamo all'esistenza di numerosi poliedri le cui facce sono poligoni regolari anche se non tutti dello stesso tipo; questi poliedri sono detti

Figura 49

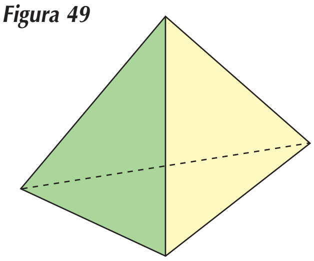


Figura 50

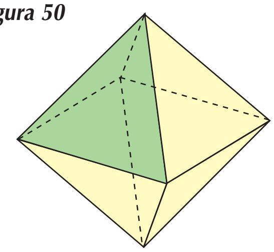


Figura 51

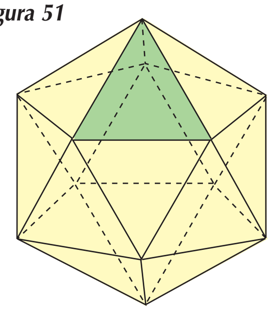


Figura 52

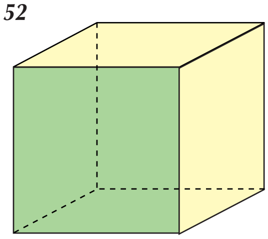


Figura 53

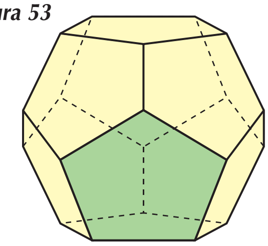
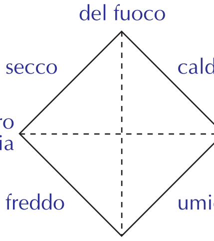


Figura 54



© Istituto Italiano Edizioni Atlas

semiregolari o **archimedei**. Un esempio di uso comune di poliedro semiregolare è il pallone da calcio in cui si alternano pentagoni ed esagoni regolari (***figura 55***).

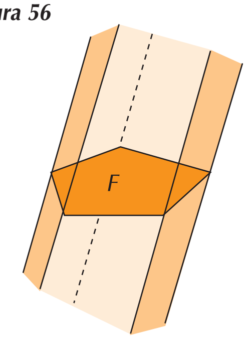
Figura 55

6.2. Altri poliedri

I prismi

Consideriamo un poligono F e una direzione non appartenente alla giacitura del poligono. Si dice **superficie prismatica** indefinita l'insieme delle rette aventi la direzione fissata e che passano per i vertici e per i punti dei lati di F. La parte di spazio delimitata dalla superficie prismatica e contenente il poligono si dice **prisma indefinito** (***figura 56***).

Figura 56

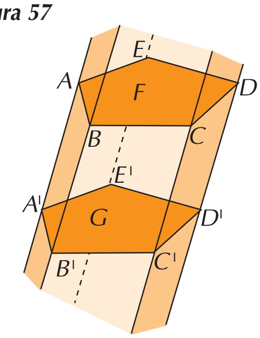


Teorema. Le sezioni di un prisma indefinito con piani paralleli sono poligoni congruenti.

Dimostrazione.

Siano F e G i due poligoni individuati da due piani paralleli che intersecano il prisma indefinito (***figura 57***); poiché i segmenti AA', BB' e così via sono tutti paralleli e congruenti fra loro, F e G si corrispondono nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AA'}$ e sono perciò congruenti. ◀

Figura 57

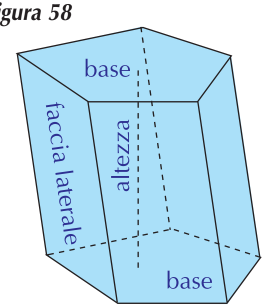


Possiamo ora dare la seguente definizione.

Si dice **prisma** la parte di prisma indefinito delimitato da una coppia di piani paralleli la cui giacitura non contiene la direzione del prisma indefinito.

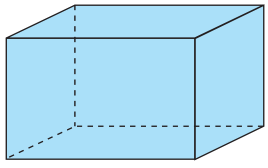
I poligoni individuati dai due piani paralleli si dicono **basi** del prisma, i parallelogrammi che lo delimitano si dicono **facce laterali**; **altezza** di un prisma è la distanza fra i piani delle due basi (***figura 58***). Se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, il prisma si dice **retto**, **obliquo** in caso contrario. Un prisma retto i cui poligoni di base sono poligoni regolari, si dice **prisma regolare**.

Figura 58



I prismi si possono classificare in base al tipo di poligono che costituisce le basi: si parla, ad esempio, di prisma a base triangolare, a base quadrangolare e così via. I prismi le cui basi sono dei parallelogrammi si dicono **parallelepipedi**. Se la base di un parallelepipedo è un rettangolo e se il parallelepipedo è retto, si parla poi di **parallelepipedo rettangolo** (***figura 59***); sia le facce che le basi di un tale parallelepipedo sono quindi dei rettangoli. Un particolare parallelepipedo rettangolo è il cubo che, come abbiamo visto, è anche un poliedro regolare.

Figura 59



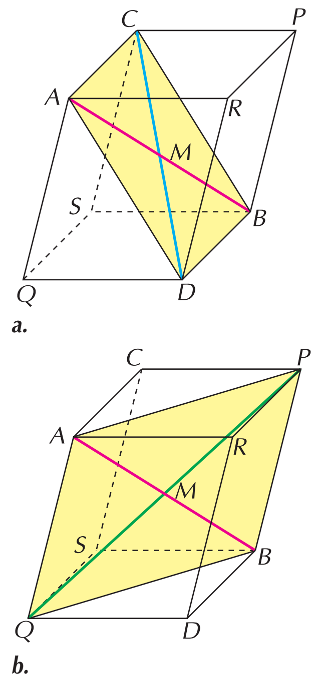
I parallelepipedi hanno le proprietà che sono enunciate dai seguenti teoremi.

Teorema. Le diagonali di un parallelepipedo si intersecano in uno stesso punto che le dimezza scambievolmente.

Dimostrazione.

Dato il parallelepipedo in ***figura 60a*** di pagina seguente, tracciamo le diagonali AB e CD; esse sono anche le diagonali del quadrilatero $ADBC$, che è un parallelogramma perché i lati AC e BD sono congruenti e paralleli; le sue diagonali si incontrano quindi nel punto medio M. Analogamente (***figura 60b***), le diagonali AB e PQ sono le diagonali del parallelogramma $APBQ$ e quindi, per l'unicità del punto medio, anche PQ passa per M; lo stesso possiamo dire per la quarta diagonale RS che è quindi anch'essa dimezzata da M. ◀

Figura 60



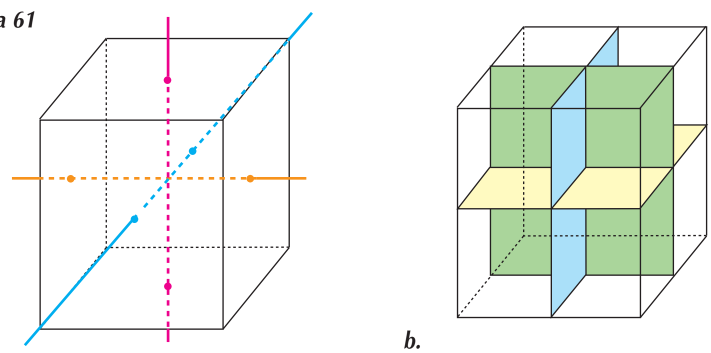
Teorema. In un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti.

Dimostrazione.

Se il parallelepipedo è rettangolo, i parallelogrammi che sono individuati da due diagonali sono dei rettangoli ed i rettangoli hanno le diagonali congruenti. ◀

Il punto di intersezione delle diagonali di un parallelepipedo è il centro di simmetria di questo poliedro; inoltre, un parallelepipedo rettangolo ha tre assi di simmetria, le rette che passano per i centri di due facce opposte (***figura 61a***), e tre piani di simmetria (***figura 61b***).

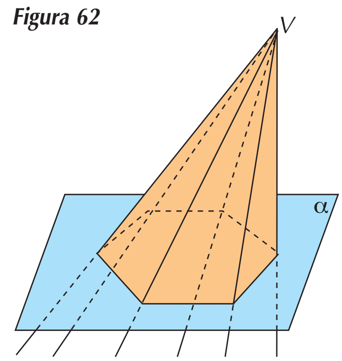
Figura 61



Le piramidi

Consideriamo un angoloide di vertice V ed un piano α non passante per V e che incontra tutti i suoi spigoli. Si dice **piramide** l'intersezione del semispazio individuato da α che contiene V con l'angoloide (***figura 62***).

Figura 62



Il punto V è il **vertice** della piramide, gli spigoli dell'angoloide sono gli **spigoli laterali** della piramide, il poligono individuato dall'angoloide sul piano α si dice **base** della piramide, i triangoli delimitati sulle facce dell'angoloide dai lati della base sono le **facce laterali**; si dice poi **altezza** la distanza del vertice V dal piano della base.
Diremo poi che una piramide è **retta** se la base è un poligono circoscrittibile ad una circonferenza il cui centro è il piede dell'altezza della piramide.
Se una piramide è retta e la sua base è un poligono regolare, essa si dice **regolare**.

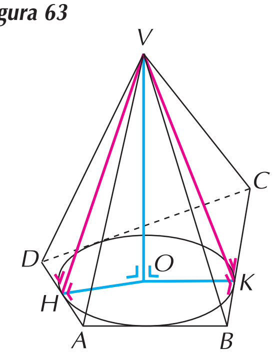
Teorema. In una piramide retta, i segmenti che hanno per estremi il vertice della piramide ed i punti di tangenza dei lati della base con la circonferenza inscritta, sono congruenti fra loro e sono le altezze delle facce laterali.
Uno qualsiasi di questi segmenti si dice **apotema** della piramide.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Dimostrazione.

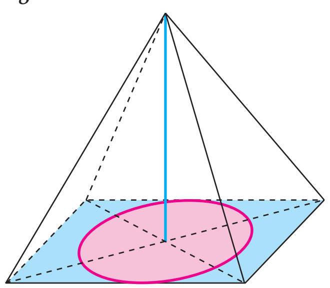
Data la piramide retta di ***figura 63***, indichiamo con H il punto di tangenza del lato AD con la circonferenza inscritta nella base; vogliamo dimostrare che VH è perpendicolare ad AD. Tracciamo l'altezza VO della piramide ed il raggio OH; sappiamo che VO è perpendicolare ad OH perché VO è perpendicolare al piano della base e che OH è perpendicolare ad AD; allora, per il teorema delle tre perpendicolari, VH è perpendicolare a DA.
Dimostriamo adesso che le altezze delle facce laterali sono tutte congruenti fra loro. A questo scopo tracciamo anche, per esempio, l'altezza VK della faccia VBC e consideriamo i triangoli rettangoli VOH e VOK; essi sono congruenti perché hanno i cateti ordinatamente congruenti, quindi $VH \cong VK$. Considerazioni analoghe valgono per le altre facce della piramide. ◀

Figura 63



Attenzione agli errori: affinché una piramide sia retta non basta che l'altezza cada nel centro del poligono di base. Per esempio, una piramide a base rettangolare la cui altezza cade nel centro del rettangolo (***figura 64***) **non è** una piramide retta perché in un rettangolo non si può inscrivere una circonferenza. Le altezze delle facce laterali di questa piramide non sono congruenti e non si può quindi parlare di apotema.

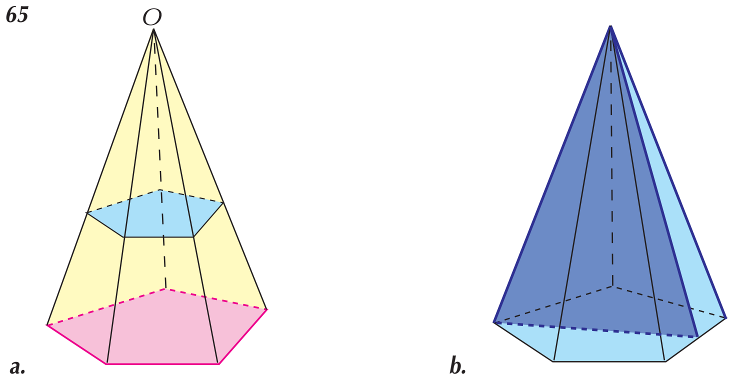
Figura 64



Valgono inoltre le seguenti proprietà che ci limitiamo ad enunciare:

- la sezione di una piramide con un piano parallelo alla base è un poligono simile alla base (***figura 65a***); i perimetri del poligono sezione e della base stanno fra loro come le distanze del vertice dai loro piani, mentre le loro aree sono proporzionali ai quadrati di tali distanze;
- se una piramide è regolare, le facce laterali e gli spigoli laterali sono tutti congruenti fra loro;
- una piramide non ha in generale centri o rette di simmetria; se è regolare ha però dei piani di simmetria: quelli che passano per il centro della base (ricorda che la base è un poligono regolare) e per uno degli spigoli oppure per il centro della base ed uno degli apotemi a seconda del tipo del poligono di base (ricorda gli assi di simmetria dei poligoni regolari) (***figura 65b***).

Figura 65



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Fra i poliedri regolari:

a. il tetraedro ha come facce 4 triangoli equilateri V F

b. l'ottaedro ha come facce 8 quadrati V F

c. il dodecaedro ha come facce 12 triangoli equilateri V F
d. l'esaedro ha per facce 6 quadrati. V F
e. l'icosaedro ha 5 triangoli equilateri che concorrono in ogni vertice V F

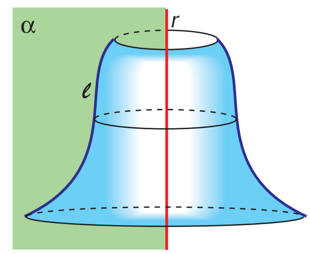
2. Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.
a. Un prisma è retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi. V F
b. Un prisma è regolare se lo sono i poligoni di base. V F
c. In un parallelepipedo le diagonali sono congruenti. V F
d. L'apotema di una piramide esiste solo se la piramide è retta. V F

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 43

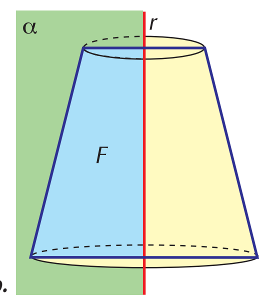
7. I SOLIDI DI ROTAZIONE

Consideriamo una retta r ed un semipiano α di origine r; sia poi ℓ una linea qualsiasi su α; se facciamo ruotare α attorno a r di un angolo giro, la linea ℓ genera una superficie che si dice **superficie di rotazione** (***figura 66a***). La linea ℓ si dice **generatrice** e la retta r **asse di rotazione**. Consideriamo ora una superficie qualsiasi F su α; la rotazione di α attorno a r di un angolo giro genera questa volta un solido che si dice **solido di rotazione** (***figura 66b***).
Vogliamo ora descrivere alcune superfici o solidi di rotazione particolari e individuare le loro proprietà; nella nostra trattazione considereremo solo rotazioni di un angolo giro, tale precisazione sarà quindi in seguito omessa.

Figura 66



a.

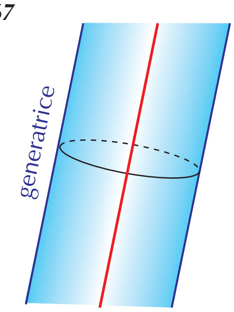


b.

Il cilindro

Si dice **superficie cilindrica** indefinita la superficie di rotazione che ha per generatrice una retta parallela all'asse di rotazione. Si dice **cilindro indefinito** il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare la striscia individuata dall'asse di rotazione e dalla generatrice attorno all'asse di rotazione stessa (***figura 67***).

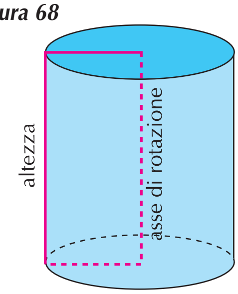
Figura 67



Nel caso di una superficie cilindrica, quindi, tutti i suoi punti hanno la medesima distanza dall'asse di rotazione; chiameremo questa distanza **raggio della superficie**. E' allora evidente che qualsiasi piano perpendicolare all'asse di rotazione taglia la superficie cilindrica lungo una circonferenza.

Consideriamo ora un cilindro indefinito e due piani paralleli che lo intersecano; la parte di spazio delimitata dal cilindro indefinito e da questi due piani si chiama **cilindro circolare**; se i piani sono perpendicolari all'asse di rotazione il cilindro si dice **retto** (***figura 68***). D'ora in poi ci riferiremo sempre ad un cilindro retto. Un cilindro può essere visto come il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati di un angolo giro. I cerchi individuati dai piani secanti sono le **basi** del cilindro, i segmenti di generatrice compresi fra i piani delle basi si dicono anche **lati** del cilindro; la distanza fra i piani delle basi si dice **altezza**.
Diremo poi che un cilindro è **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro di base.

Figura 68



Un cilindro ha le seguenti proprietà:

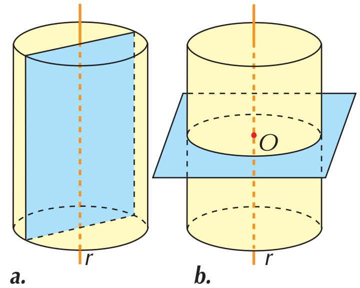
- ogni piano perpendicolare all'asse di rotazione che interseca il cilindro in-

 © ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

dividua cerchi congruenti alle basi; il raggio di uno qualsiasi di tali cerchi è il **raggio del cilindro**

- l'asse di rotazione è asse di simmetria, il punto medio del segmento di tale asse compreso tra le basi è centro di simmetria
- ogni piano passante per l'asse di rotazione è piano di simmetria, l'intersezione di uno di questi piani con il cilindro è un rettangolo (***figura 69a***)
- il piano perpendicolare all'asse di rotazione e passante per il punto medio di uno dei lati è piano di simmetria (***figura 69b***).

Figura 69

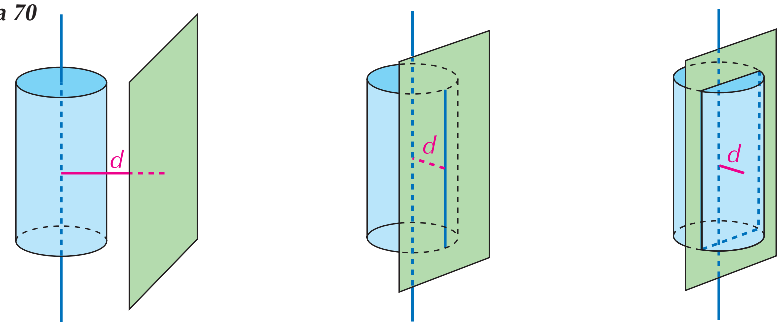


a. *b.*

Se ora consideriamo un piano parallelo all'asse di rotazione, indicata con d la distanza dell'asse dal piano e con r il raggio del cilindro, si dimostra che:

- se $d > r$, il piano non ha alcun punto in comune con essa e si dirà che è **esterno** alla superficie (***figura 70a***)
- se $d = r$, il piano incontra la superficie cilindrica lungo una generatrice e si dirà che è **tangente** alla superficie (***figura 70b***)
- se $d < r$, il piano incontra la superficie lungo due generatrici e si dice che è **secante** la superficie (***figura 70c***).

Figura 70

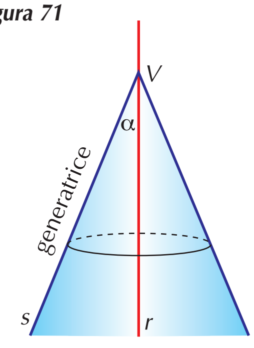


a. $d > r$ ***b.*** $d = r$ ***c.*** $d < r$

Il cono

Consideriamo una semiretta s di origine V, una retta r che passa per V e che assumiamo come asse di rotazione; sia α l'angolo acuto che s forma con r. Facendo ruotare l'angolo α attorno alla retta r, la semiretta s descrive una superficie (***figura 71***).

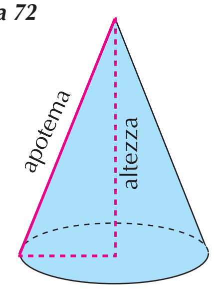
Figura 71



> Chiamiamo **superficie conica indefinita** la superficie di rotazione che si ottiene facendo ruotare s attorno a r. Chiamiamo **cono indefinito** il solido di rotazione che si ottiene dalla rotazione di α attorno a r.

Il punto V è il **vertice** del cono, l'angolo 2α è l'angolo di apertura del cono. Per come è stata definita, è poi evidente che una superficie conica viene intersecata da un piano perpendicolare all'asse di rotazione lungo una circonferenza. Consideriamo adesso un piano che intersechi in un punto ogni generatrice di un cono indefinito; la parte di spazio che contiene il vertice e che è delimitata dal cono indefinito e dal piano si chiama **cono circolare**; se il piano è perpendicolare all'asse di rotazione il cono si dice **retto** (***figura 72***). Nel seguito ci riferiremo sempre a un cono retto senza più specificarlo. Un cono può quindi essere visto come il solido che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti di un angolo giro.

Figura 72

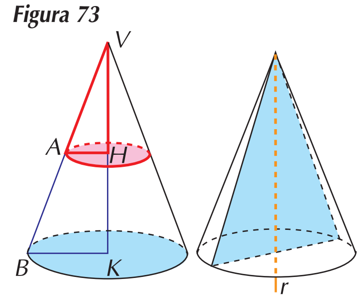


Il cerchio sezione è la **base** del cono, il segmento di generatrice compreso fra il vertice e la circonferenza di base si dice **apotema** del cono; il segmento individuato dal vertice e dal centro del cerchio di base rappresenta la distanza del vertice dalla base ed è **l'altezza** del cono. Diremo poi che un cono è **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro di base.

Un cono ha le seguenti proprietà:

- i piani perpendicolari all'asse di rotazione che intersecano il cono individuano cerchi i cui raggi AH e BK sono proporzionali sia alle distanze dei rispettivi piani dal vertice (segmenti VH e VK), sia ai segmenti di apotema fra il vertice ed i piani (segmenti VA e VB) (***figura 73a***). Infatti i triangoli VAH e VBK sono simili
- le misure delle aree dei cerchi di raggi AH e BK sono proporzionali ai quadrati delle misure delle loro distanze dal vertice:
$$\pi\overline{AH}^2 : \pi\overline{BK}^2 = \overline{VH}^2 : \overline{VK}^2$$
- l'asse di rotazione è asse di simmetria
- ogni piano passante per l'asse di rotazione è piano di simmetria; l'intersezione di uno di questi piani con il cono è un triangolo isoscele (***figura 73b***).

Figura 73

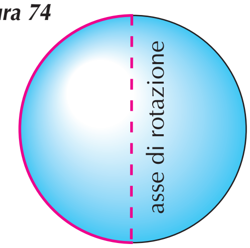


a. **b.**

La sfera

Si dice **superficie sferica** la figura generata dalla rotazione completa di una semicirconferenza attorno alla retta del diametro; si dice **sfera** il solido generato dalla analoga rotazione di un semicerchio (***figura 74***).

Figura 74

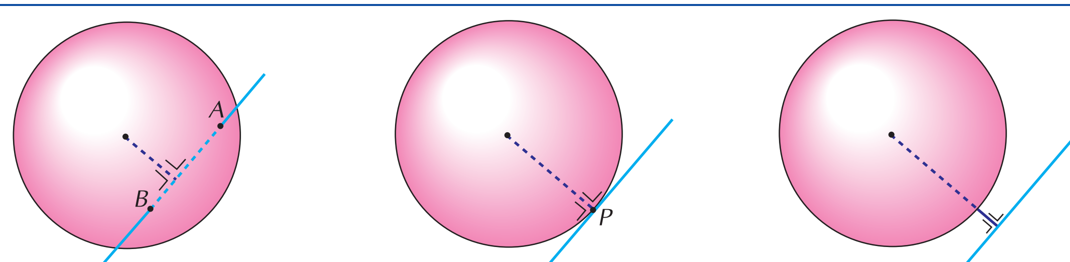


Il centro della semicirconferenza è il **centro** della sfera; si dice **raggio** la distanza del centro da uno qualunque dei punti della superficie sferica, **diametro** il segmento passante per il centro che ha per estremi due punti della sfera.

Individuiamo le proprietà di questa figura:

- il centro di una sfera è centro di simmetria
- ogni piano che passa per il centro si dice **piano diametrale** ed è piano di simmetria per la sfera
- ogni piano diametrale individua sulla superficie sferica una circonferenza che ha lo stesso centro e lo stesso raggio della superficie sferica stessa
- ogni altro piano non diametrale che interseca la sfera individua circonferenze aventi raggi minori di quello diametrale
- una retta ha in comune con una superficie sferica due punti, un solo punto o nessun punto a seconda che la sua distanza d dal centro della superficie sia minore, uguale o maggiore del raggio r (***figura 75***)

Figura 75

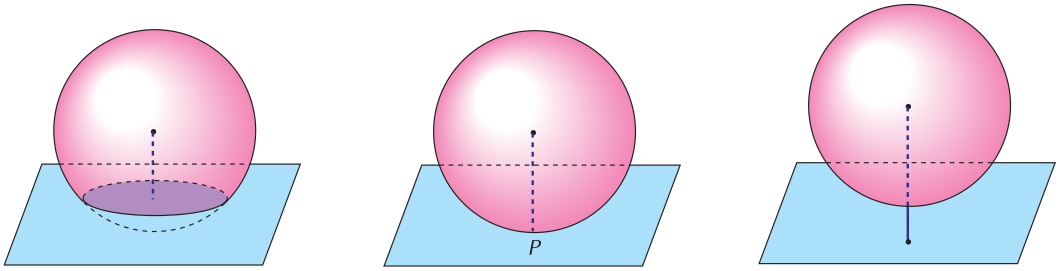


retta secante: $d < r$ — retta tangente: $d = r$ — retta esterna: $d > r$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

- un piano ha in comune con una superficie sferica (***figura 76***):
  - una circonferenza se la sua distanza dal centro è minore del raggio; si dice in questo caso che il piano è **secante** rispetto alla sfera
  - un punto se la sua distanza dal centro è uguale al raggio; si dice in questo caso che il piano è **tangente** rispetto alla sfera
  - nessun punto se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio; si dice in questo caso che il piano è **esterno** rispetto alla sfera.

Figura 76

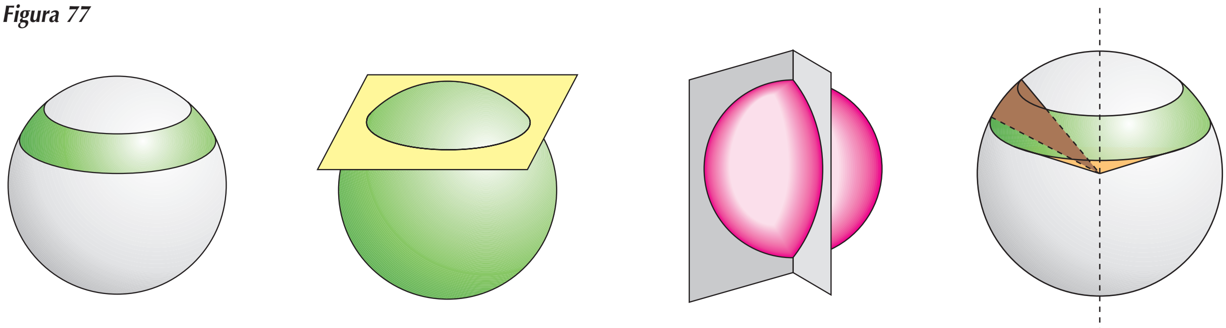


piano secante: $d < r$ piano tangente: $d = r$ piano esterno: $d > r$

Definiamo ora alcune parti della sfera.

- Si dice **zona sferica** la parte della superficie sferica che è compresa fra due piani paralleli che sono secanti rispetto alla superficie; l'altezza della zona sferica è la distanza fra i piani paralleli (***figura 77a***). Si chiama **segmento sferico a due basi** la parte di sfera racchiusa da tali piani.
- Si dice **calotta sferica** ciascuna delle parti in cui un piano secante divide una superficie sferica (***figura 77b***); si può interpretare la calotta come la zona sferica delimitata da un piano secante la sfera ed il piano tangente ad esso parallelo; l'altezza di una calotta è ancora la distanza fra i due piani. Si chiama **segmento sferico a una base** ciascuna delle parti in cui una sfera viene divisa da un piano secante.
- Si dice **fuso sferico** la parte di superficie sferica delimitata da due semipiani che hanno come origine la retta di un diametro (***figura 77c***); **spicchio sferico** è la parte di sfera delimitata da un fuso e dai due piani che lo individuano.
- Si chiama **settore sferico** la parte di sfera generata dalla rotazione di un settore circolare attorno a un diametro che appartiene al piano del settore ma non lo attraversa (***figura 77d***).

Figura 77



a. zona sferica **b.** calotta sferica **c.** fuso sferico **d.** settore sferico

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. Sezionando un cilindro con un piano si ottiene sempre un rettangolo. V F

b. Un cilindro retto ha sempre come altezza il segmento che ha per estremi i centri delle circonferenze di base. V F

c. Sezionando un cilindro con un piano parallelo alla base si ottiene un cerchio. V F

d. Se la sezione di un cilindro con un piano passante per l'asse di rotazione è un quadrato, il cilindro è equilatero. V F

e. L'apotema di un cono esiste solo se il cono è retto. V F

f. Un cono è equilatero se la sua sezione con un piano passante per il vertice e per l'asse di rotazione è un triangolo isoscele. V F

g. Una calotta sferica è ciascuna delle due parti di sfera che si ottiene sezionando una sfera con un piano. V F

h. Una calotta sferica è la parte di superficie sferica delimitata da un piano secante. V F

La risposta al quesito iniziale

2. La rotazione dell'esagono genera un cilindro sormontato da due coni con un angolo di apertura di 120° (***figura 78***). Per costruire un modello di carta dobbiamo:

- costruire un rettangolo che sia la superficie laterale del cilindro
- costruire due settori circolari che siano la superficie laterale dei due coni.

Supponendo di prendere come lato dell'esagono un segmento di 5cm, ragioniamo sulla ***figura 79*** in cui $\widehat{VBA} = \widehat{VAB} = 30°$:

- il raggio di base del cilindro e del cono misura $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$
- la circonferenza di base misura $2\pi \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \approx 27{,}2$.

Il rettangolo da costruire deve quindi avere la base lunga 27,2cm e l'altezza 5cm.
La superficie laterale del cono (l'apotema è il lato dell'esagono) misura $\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}\pi$.

Questo è anche il valore dell'area del settore circolare che si ottiene "aprendo" il cono (il raggio del cerchio a cui appartiene il settore è sempre il lato dell'esagono); l'angolo α del settore si ricava dalla proporzione:

$$\text{area cerchio} : 2\pi = \text{area settore} : \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2\pi \cdot \dfrac{25\sqrt{3}}{2}\pi}{25\pi} = \pi\sqrt{3}$$

In gradi otteniamo approssimativamente un angolo di 312° (più precisamente 311°46′9″).
Una volta costruito il modello in carta occorre tagliarlo e ruotare una delle due parti ottenute (di quanti gradi?). Quello che ne risulta è il solido in ***figura 80***.

Figura 78

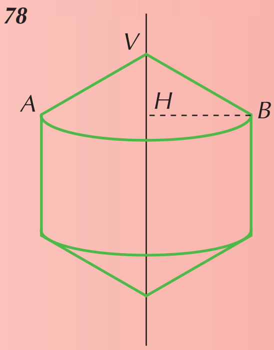


Figura 79

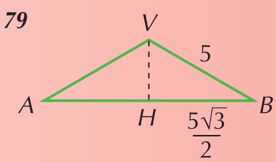
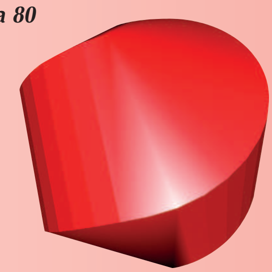


Figura 80



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

I concetti e le regole

Rette e piani

Relativamente alle posizioni reciproche di piani e rette si può dire che:

- due rette che non hanno punti di intersezione si dicono parallele se sono complanari, sghembe se appartengono a piani diversi
- due piani sono paralleli se non hanno punti di intersezione; esiste uno ed un solo piano passante per un punto A non appartenente ad un piano α che è parallelo ad α
- due piani o sono paralleli o si intersecano lungo una retta; un fascio di piani paralleli individua su due rette trasversali segmenti proporzionali
- una retta che non ha punti in comune con un piano o che giace su di esso è parallela al piano
- una retta incidente a un piano α in un punto P è perpendicolare ad α se è perpendicolare a due delle rette di α che passano per P; in tal caso essa è perpendicolare anche a tutte le altre rette per P che appartengono ad α
- se una retta r è perpendicolare a un piano α in un punto P e da P esce una retta s perpendicolare a una terza retta t di α, allora t è perpendicolare al piano di r e s (**teorema delle tre perpendicolari**)

Diedri e angoloidi

Relativamente ai diedri e agli angoloidi si può dire che:

- due semipiani che hanno l'origine in comune dividono lo spazio in due **angoli diedri** dei quali uno è concavo e l'altro è convesso
- ogni piano che interseca un diedro definisce un angolo che rappresenta la sezione del diedro; se il piano è perpendicolare allo spigolo del diedro si parla di **sezione normale**; la misura di un diedro è la misura della sua sezione normale
- due piani sono perpendicolari se sono incidenti e formano diedri retti
- le semirette che, uscendo da un punto P, intersecano i lati di un poligono appartenente ad un piano che non contiene P definiscono una superficie piramidale, la parte di spazio delimitata da una superficie piramidale si chiama **angoloide**
- un angoloide che ha tre facce si chiama **triedro** ed ha la caratteristica che ciascuna faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza.

Trasformazioni geometriche nello spazio

Relativamente alle trasformazioni nello spazio si ha che:

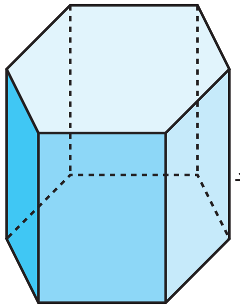
- sono isometrie la simmetria assiale rispetto a una retta, la simmetria centrale rispetto a un punto, la simmetria ortogonale rispetto a un piano, la traslazione di vettore assegnato e la rotazione di ampiezza assegnata attorno a una retta; la simmetria centrale e la simmetria ortogonale trasformano una figura in un'altra ad essa inversamente congruente
- l'omotetia nello spazio viene definita assegnando un centro e un rapporto di omotetia;
- il prodotto, in un ordine qualsiasi, di una omotetia con una isometria è una similitudine.

Poliedri

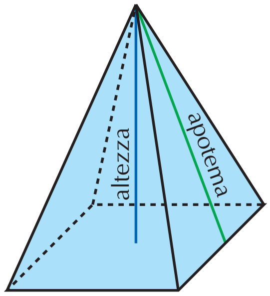
Relativamente ai poliedri si può dire che:

- **esistono solo cinque poliedri regolari**: il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro (le cui facce sono triangoli equilateri), l'esaedro o cubo (le cui facce sono quadrati), il dodecaedro (le cui facce sono pentagoni regolari)

- tutte le rette fra loro parallele che intersecano i lati di un poligono definiscono una **superficie prismatica**; la parte di spazio delimitata da una superficie prismatica e da due piani paralleli che la intersecano si chiama **prisma**, i poligoni definiti dalla superficie prismatica sui piani paralleli sono le basi del prisma; un prisma si dice:
  – retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi
  – regolare se, oltre ad essere retto, le basi sono poligoni regolari



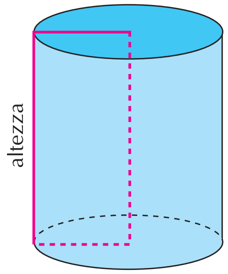
- una **piramide** è la parte di spazio delimitata da un angoloide e da un piano non passante per il vertice dell'angoloide; il poligono sezione è la base della piramide; una piramide si dice poi:
  – **retta** se il poligono di base si può circoscrivere ad una circonferenza e se la perpendicolare condotta dal vertice al piano di base cade nel centro della circonferenza; in questo caso le facce laterali, anche se diverse fra loro, hanno tutte la stessa altezza che costituisce l'**apotema** della piramide;
  – **regolare** se, oltre ad essere retta, il poligono di base è regolare; nelle piramidi regolari le facce laterali sono tutte congruenti.



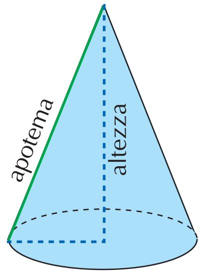
Solidi di rotazione

Relativamente ai solidi di rotazione si può dire che:

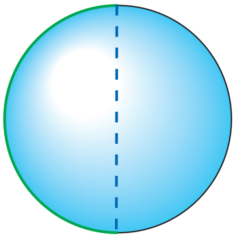
- **superficie cilindrica** è la superficie che si ottiene facendo ruotare una retta (la generatrice) di una rotazione completa attorno ad un'altra retta ad essa parallela (l'asse di rotazione); cilindro è la parte di spazio delimitata da una superficie cilindrica e da due piani paralleli che la secano; se i piani sono perpendicolari alle generatrici il cilindro si dice **retto**; se sezionando un cilindro retto con un piano passante per l'asse di rotazione si ottiene un quadrato, il cilindro si dice **equilatero**



- **superficie conica** è la superficie che si ottiene facendo ruotare un lato di un angolo attorno all'altro lato di una rotazione completa; si chiama cono la parte di spazio delimitata da una superficie conica e da un piano secante; se il piano è perpendicolare all'asse di rotazione il cono è **retto**; se sezionando un cono retto con un piano passante per l'asse di rotazione si ottiene un triangolo equilatero, il cono si dice **equilatero**



- **superficie sferica** è la superficie che si ottiene facendo ruotare una semicirconferenza di una rotazione completa attorno al suo diametro; sfera è la parte di spazio delimitata da una superficie sferica.



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Rette, piani e figure nello spazio

I PRIMI ELEMENTI

la teoria è a pag. 2

Comprensione

1 Nello spazio, due rette sono parallele se:
a. non hanno punti in comune
b. sono complanari
c. sono complanari e non si intersecano
d. nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

2 Barra vero o falso.
Due piani nello spazio:
a. coincidono se hanno tre punti in comune V F
b. se si intersecano, hanno almeno due punti in comune V F
c. se si intersecano hanno in comune i punti di una retta V F
d. possono avere un solo punto in comune. V F

3 Se due rette a e b sono sghembe, è vero che una terza retta c sghemba con a lo è anche con b? Analizza le situazioni che si possono presentare.

4 Se due rette a e b sono complanari ed una terza retta c è complanare con a, è sempre vero che b e c sono complanari?

Applicazione

5 Dimostra che un semispazio è una figura convessa.
(Suggerimento: ricorda che una figura è convessa se, presi due suoi punti A e B, il segmento AB appartiene interamente alla figura)

6 Quanti piani individuano tre rette non complanari che passano per uno stesso punto O?

7 Sono assegnati quattro punti non complanari; dimostra che tre qualunque di essi non possono essere allineati.

8 Quanti piani individuano i quattro punti di cui all'esercizio precedente? Da che cosa sono individuate le intersezioni di tali piani?

9 I punti A, B e C appartengono contemporaneamente ai due piani α e β tra loro secanti; che cosa puoi dire di tali punti?

10 In quante regioni tre piani dividono lo spazio se:
a. nessuno dei tre incontra gli altri;
b. i primi due non si incontrano ed entrambi incontrano il terzo;
c. i tre piani hanno una retta in comune.

11 Su un piano α giacciono due rette r e s che si intersecano in un punto P. Se una retta t non appartenente ad α incontra le prime due, per quale punto deve necessariamente passare? Dimostra la tua affermazione.

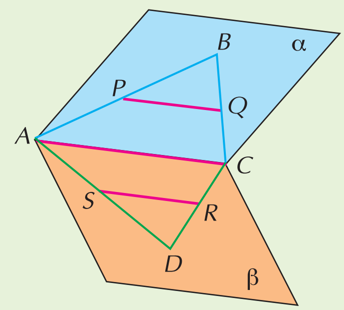
12 Sono date le rette sghembe r ed s e i due punti $R \in r$ e $S \in s$. Indicato con α il piano individuato da R e da s e con β quello individuato da S e da r, individua:
a. l'intersezione fra α e β;
b. la retta passante per un punto A che non appartiene a r e s che le interseca entrambe.

13 **ESERCIZIO GUIDA**

Dati quattro punti A, B, C, D non complanari, dimostra che i punti medi P, Q, R, S dei segmenti AB, BC, CD, DA sono complanari.

I punti A, B, C individuano un piano α; considera il triangolo ABC: sai che PQ è .... ad AC; analogamente i punti A, C, D individuano un piano β ed è ....

I segmenti PQ e RS sono quindi .... e perciò ....



14 Dati i punti A e B dello spazio verifica che se quattro punti P, Q, R, S sono tali che: $PA \cong PB$, $QA \cong QB$, $RA \cong RB$, $SA \cong SB$, allora i punti P, Q, R, S sono complanari.

PERPENDICOLARITÀ FRA RETTE E PIANI

la teoria è a pag. 4

Comprensione

15 Sono dati una retta r e un suo punto P. Rispondi alle domande.
a. Quante perpendicolari si possono tracciare da P a r?
b. Qual è la caratteristica di queste rette?

16 Enuncia il criterio che permette di stabilire quando una retta è perpendicolare a un piano e spiega perchè non è possibile applicare la definizione.

17 Sono dati una retta r e un punto P. Spiega come si fa a tracciare il piano per P perpendicolare a r distinguendo il caso in cui $P \in r$ dal caso in cui $P \notin r$.

18 Una retta r è perpendicolare in P a una retta s di un piano α e r non appartiene a α; se t è una retta di α perpendicolare a s in un punto A diverso da P, puoi dire che:
① r è perpendicolare ad α
② r e t sono sghembe
③ il piano individuato da r e da s è perpendicolare ad α

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

④ il piano individuato da r e da s è perpendicolare a t.

Delle precedenti affermazioni:

a. è vera solo la ② **b.** sono tutte vere **c.** sono tutte false **d.** sono tutte vere tranne la ①

19 Dati un punto P e un piano α, descrivi come si costruisce la retta per P perpendicolare ad α; quante sono queste rette?

20 Che cos'è la proiezione ortogonale di un punto su un piano? Se da un punto P esterno ad un piano α si conducono il segmento di perpendicolare ed alcuni segmenti obliqui, quali considerazioni si possono fare relativamente a tali segmenti e alle loro proiezioni?

21 L'angolo fra una retta r e un piano α è l'angolo formato:

a. da r e dalla retta di α perpendicolare a r

b. da r e dalla retta di α che è la proiezione ortogonale di r su α

c. da r e da una qualsiasi retta di α

d. nessuna delle precedenti definizioni è corretta.

22 Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere.

a. Due rette che sono perpendicolari ad uno stesso piano sono ....

b. Se due rette sono parallele, un piano che è perpendicolare all'una è ....

c. Date due rette parallele r e s e considerati un piano passante per r ed uno passante per s che si intersecano lungo una terza retta t, si ha che ....

d. La relazione di parallelismo fra rette, essendo riflessiva, ... e ...., definisce il concetto di ....

Applicazione

23 Tenendo presente quanto dimostrato all'esercizio 14, sai dire qual è nello spazio il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento?

24 Dimostra che i piani perpendicolari ai lati di un triangolo nei punti medi passano per una stessa retta. (Suggerimento: ricorda che gli assi di un triangolo si incontrano ....)

25 Un piano è individuato da un suo punto e da una retta perpendicolare al piano stesso. Giustifica questa affermazione.

26 Un triangolo ABC appartiene a un piano α; conduci per A la perpendicolare ad α e prendi su di essa un punto P; descrivi le caratteristiche dei triangoli PAC e PAB; se il triangolo ABC fosse isoscele di base BC che cosa si potrebbe dire del triangolo PBC?

27 Due segmenti AB e CD sono fra loro congruenti e perpendicolari in B e D ad un piano α; che tipo di quadrilatero (non intrecciato) è quello che si ottiene congiungendo gli estremi di tali segmenti? Distingui i casi che si possono presentare a seconda che i due segmenti appartengano allo stesso semispazio o a semispazi diversi. In quest'ultimo caso, dimostra poi che il segmento AC incontra α nel suo punto medio.

28 Descrivi la procedura che ti permette di tracciare i piani che passano per una retta r e hanno distanza assegnata d da un punto prefissato P. Quanti sono tali piani?

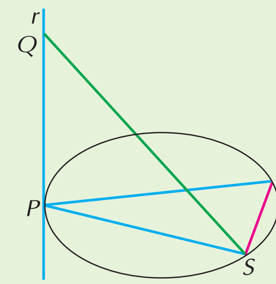
29 Due piani α e β si incontrano lungo una retta r. Per un punto P dello spazio traccia le perpendicolari PH e PK ai due piani e da H e K traccia poi le perpendicolari alla retta r. Dimostra che tali perpendicolari si incontrano nello stesso punto di r.

30 Dimostra che se un piano π è perpendicolare alla retta s individuata dall'intersezione di due piani α e β fra loro perpendicolari, allora π è perpendicolare ad entrambi gli altri piani.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

31 **ESERCIZIO GUIDA**

Dall'estremo P del diametro PR di una circonferenza, traccia la perpendicolare r al piano da essa individuato. Considera poi un punto S sulla circonferenza e un punto Q sulla retta r e dimostra che le rette SR e SQ sono perpendicolari fra loro.



L'angolo $\widehat{PSR}$ è retto perché ....

Per il teorema delle tre perpendicolari, la retta RS è perpendicolare al piano individuato da .... quindi ....

32 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB; tracciata da C la perpendicolare al piano del triangolo, dimostra che, al variare di P su tale perpendicolare, il triangolo PAB è anch'esso isoscele. Dove si deve trovare P affinché l'area del triangolo PAB sia minima?
(Suggerimento: osserva che l'area minima, essendo AB la base del triangolo, si ha quando l'altezza è minima, cioè ....)

33 Considera un punto A ed un piano α, qual è il luogo dei punti del piano equidistanti da A?

34 Considera su un piano α una circonferenza di centro C e sia t la retta perpendicolare ad α passante per C; preso un punto P su t e due punti A e B sulla circonferenza, dimostra che $PA \cong PB$.

35 Sia ABC un triangolo appartenente ad un piano α e siano P e Q i punti medi dei lati AB e BC. Siano poi AM e CN due segmenti situati nello stesso semispazio definito da α e fra loro congruenti e paralleli; sia BR un terzo segmento situato nel semispazio opposto e congruente e parallelo ai primi due. Dimostra che $PM \cong PR$ e che $QR \cong NQ$. I punti M, P, R e N, Q, R sono allineati?

36 Sia AB un segmento appartenente ad un piano α, sia r una retta perpendicolare in A ad α e sia s la retta di α perpendicolare ad AB in B. Dimostra che, preso un punto P su r ed un punto Q su s, gli angoli $\widehat{PAQ}$ e $\widehat{PBQ}$ sono retti.

37 Sia ABC un triangolo equilatero di lato ℓ appartenente ad un piano α e siano r, s e t le perpendicolari ad α condotte dai tre vertici A, B, C. Su tali perpendicolari e nello stesso semispazio prendi tre punti R, S, T tali che $CT \cong BS \cong 2AR$. Che tipo di triangolo è il triangolo RST? Posto $CT = \ell$, calcola le misure dei suoi lati rispetto a ℓ. $\left[\ell, \ \frac{\ell\sqrt{5}}{2}\right]$

38 Sia A un punto su un piano α e B un punto che non appartiene ad α. Qual è il luogo dei punti P di α tali che $\widehat{APB}$ è retto?
(Suggerimento: traccia da B la perpendicolare su α)

39 Sia $ABCD$ un quadrato appartenente ad un piano α; dai suoi vertici traccia, nello stesso semispazio, le semirette perpendicolari ad α; un piano β diverso da α incontra tali semirette nei punti A', B', C', D'. Di che natura è il quadrilatero $A'B'C'D'$?

40 Un segmento AB è perpendicolare ad un piano α in B; una semiretta s uscente da A e formante un angolo φ con AB incontra α in un punto P. Qual è il luogo dei punti P al variare di s?

41 Sia PQ la proiezione ortogonale di un segmento AB su di un piano α; dimostra che $PQ \leq AB$; specifica poi quando vale il simbolo di uguaglianza.

42 Un segmento AB misura 10cm mentre la sua proiezione ortogonale su un piano α ne misura 5. Quanto misura l'angolo fra AB e α? [60°]

 © ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

43 Calcola le misure delle proiezioni su un piano α di un segmento AB lungo 10cm nei seguenti casi:

a. AB è parallelo ad α

b. AB forma con α un angolo di 30°

c. AB forma con α un angolo di 45°

d. AB forma con α un angolo di 60°

e. AB è perpendicolare ad α.

44 Una retta r è perpendicolare ad un piano α; un piano β è incidente ad α lungo una retta s. Dimostra che la proiezione di r su β è perpendicolare ad s.

45 Un punto O dista 6cm da un piano α; traccia da O due rette r e s incidenti in P e Q ad α e fra loro perpendicolari che formano con α angoli rispettivamente di 60° e di 45°. Calcola la misura del segmento PQ.

$[2\sqrt{30}\text{cm}]$

46 Un piano α è definito dai punti A, B, C; determina un punto D su un piano β in modo che $DA \cong DB \cong DC$.
(Suggerimento: considera la circonferenza che passa per i tre punti dati, il punto D deve stare ....)

IL PARALLELISMO NELLO SPAZIO

la teoria è a pag. 8

Comprensione

47 Barra vero o falso motivando le tue scelte.

a. Tre rette a due a due parallele appartengono sempre allo stesso piano. V F

b. Sia α un piano passante per una retta r e β un piano passante per una retta s e sia $r \parallel s$, allora α è sempre parallelo a β. V F

c. I due piani α e β della proposizione precedente o sono paralleli o si intersecano lungo una retta parallela a r e a s. V F

48 Dopo aver dato la definizione di parallelismo fra una retta e un piano e indicato quali sono le proprietà di questa relazione, spiega come si determina la distanza fra retta e piano.

49 L'esistenza e l'unicità di un piano passante per un punto P assegnato e parallelo ad un piano α è un assioma o un teorema? Dai ampia giustificazione della tua risposta.

50 Barra vero o falso.

a. Se due piani sono paralleli, ogni retta dell'uno è parallela a ogni retta dell'altro. V F

b. Due angoli nello spazio che hanno i lati paralleli sono sempre congruenti. V F

c. Se due angoli nello spazio sono congruenti, i lati dell'uno sono paralleli ai lati dell'altro. V F

d. L'intersezione di due piani paralleli con un terzo piano è rappresentata da due rette parallele. V F

51 Se due segmenti obliqui condotti da un punto P ad un piano α sono congruenti fra loro, come sono le ampiezze degli angoli che le semirette a cui appartengono formano con il piano?

52 Un fascio di piani paralleli determina su due rette trasversali r e s:

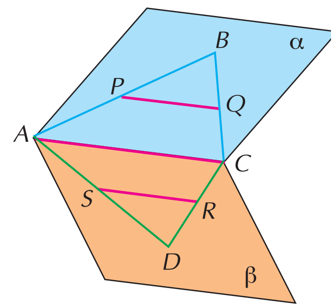
a. segmenti congruenti V F

b. segmenti proporzionali solo se r e s sono complanari V F

c. segmenti proporzionali V F

d. segmenti congruenti se r e s sono parallele. V F

Applicazione



53 Date tre rette r, s e t tali che $r \parallel s$ e $s \parallel t$ e non complanari, esiste una retta che le incontra tutte e tre? Giustifica la tua risposta.

54 Tenendo presente anche i risultati ottenuti all'esercizio 13, dimostra che:
a. il quadrilatero $PQRS$ è un parallelogramma;
b. indicati con K e H i punti medi dei segmenti BD e AC, i quadrilateri $PHRK$ e $HSKQ$ sono anch'essi parallelogrammi.

55 Descrivi la procedura per tracciare un piano parallelo a due rette incidenti.

56 Sono dati due piani secanti α e β e un punto P dello spazio; descrivi la procedura per costruire la retta r passante per P e parallela ad entrambi i piani.

57 Dimostra che una retta ed un piano perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli fra loro.

58 Date due rette sghembe, descrivi la procedura per tracciare per una di esse un piano parallelo all'altra.

59 Date due rette sghembe, dimostra che i piani condotti per ciascuna di esse parallelamente all'altra sono paralleli fra loro.

60 Siano r e s due rette sghembe; qual è il luogo delle rette passanti per i punti di r che sono parallele a s?

61 Dimostra che se una retta r è perpendicolare ad un piano α, ogni piano parallelo a r è perpendicolare ad α.

62 Descrivi la procedura che ti permette, dati un punto A, una retta r ed un piano α che non appartengono uno all'altro, di tracciare una retta per A parallela ad α e che intersechi r.

63 Dimostra che le proiezioni di rette parallele sopra un piano sono rette parallele.

64 Siano α e β due piani che si intersecano lungo una retta r e siano γ e δ due piani ad essi paralleli; dimostra che le coppie di piani δ e γ, α e δ, γ e β si intersecano secondo rette parallele ad r.

65 Dimostra che l'insieme dei punti dello spazio equidistanti da due rette parallele è un piano.

66 Qual è il luogo dei punti equidistanti da due piani paralleli?

67 Sia r una retta parallela ad una seconda retta s e ad un piano α; dimostra che anche s è parallela ad α.

68 Una retta a interseca un piano α sul quale sono tracciate due rette r ed s aventi direzione ortogonale rispetto a quella di a. Dimostra che r ed s sono parallele.

69 Siano α, β, γ tre piani fra loro paralleli distanti rispettivamente 8cm e 12cm uno dall'altro; sia poi r una retta incidente i tre piani nei punti A, B, C. Se $\overline{AB} = 16\text{cm}$, quanto misura BC? Quanto misura l'angolo fra r e la giacitura dei tre piani? [24cm; 30°]

DIEDRI, PERPENDICOLARITÀ E ANGOLOIDI

la teoria è a pag. 12

Comprensione

70 Dai la definizione di angolo diedro e spiega quando:
a. un diedro si dice piatto
b. un diedro si dice concavo oppure convesso

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

c. due diedri sono consecutivi
d. due diedri sono adiacenti.

71 Un diedro concavo può anche essere definito come l'unione di due semispazi; come può essere definito in modo analogo un diedro convesso?

72 Definisci il semipiano bisettore e spiega che cosa significa che due diedri sono complementari.

73 Dopo aver definito la sezione di un diedro, specifica:
a. quando la sezione è normale
b. qual è la caratteristica delle sezioni normali
c. come si misura un diedro.

74 Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere.
a. Se una retta r è perpendicolare ad un piano α, tutti i piani che passano per r sono ....
b. Se una retta r è perpendicolare ad un piano α, tutti i piani perpendicolari a r sono ....
c. Se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare alla prima è ....

75 Dai la definizione di angoloide, enuncia le sue proprietà e dimostra in particolare quella relativa ai triedri.

Applicazione

Diedri e piani perpendicolari

76 Sia γ il semipiano bisettore del diedro $\alpha\beta$; una retta r perpendicolare a γ in un punto C incontra α in A e β in B. Dimostra che $AC \cong CB$.

77 Riprendi la costruzione del problema precedente e dimostra che, indicato con P un qualunque punto dello spigolo del diedro, il triangolo PAB è isoscele.

78 Sia $\widehat{\alpha\beta}$ un diedro di spigolo r e sia $\widehat{aOb}$ l'angolo definito da una sezione normale del diedro con un piano γ perpendicolare al suo spigolo; presi due punti A e B rispettivamente su a e su b in modo che $OA \cong OB$, considera un qualunque piano passante per la retta AB; indicato con P il suo punto di intersezione con r, dimostra che il triangolo PAB è isoscele.

79 Dimostra che i piani bisettori dei quattro diedri individuati da due piani incidenti sono perpendicolari.

80 Dimostra che il semipiano bisettore di un diedro convesso è il luogo dei punti equidistanti dalle sue facce.

81 Dimostra che se da un punto interno di un diedro si conducono due semirette perpendicolari alle sue facce, si ottiene un angolo supplementare della sezione normale del diedro.

82 Sia P un punto di una circonferenza di diametro AB appartenente ad un piano α; siano poi β e γ i due piani passanti rispettivamente per AP e BP perpendicolari al piano α. Qual è l'ampiezza del diedro formato da questi due piani? Come sono i due piani fra loro?

83 Individua le caratteristiche di un diedro che è dato da:
a. la somma di un diedro retto con un diedro acuto;
b. la somma di un diedro retto con un diedro ottuso;
c. il doppio di un diedro acuto;
d. il doppio di un diedro ottuso;
e. la metà di un diedro ottuso.

84 Quanti diedri ottusi si possono al massimo sommare per avere un diedro minore o uguale di un diedro giro?

85 Dimostra che un diedro la cui ampiezza è maggiore di 180° non è una figura convessa.

86 Dimostra che due piani sono paralleli se, intersecati da un altro piano, formano diedri alterni congruenti.

87 Sia ABC un triangolo equilatero di lato ℓ; dal vertice A traccia la perpendicolare al piano del triangolo e su essa fissa il punto D tale che $\overline{AD} = \ell$ e congiungi D con B e con C. Quali sono le ampiezze dei diedri di spigoli DA, CA e CB? [60°, 90°, 49°6′24″]

88 Descrivi come puoi tracciare una circonferenza tangente alle facce di un diedro e passante per un punto P ad esso interno.
(Suggerimento: conduci per P il piano perpendicolare a quello bisettore, ...)

Angoloidi

89 Dimostra che i piani bisettori dei tre diedri interni di un triedro passano per una stessa retta r.

90 Tenendo presente le conclusioni dell'esercizio precedente, deduci qual è il luogo dei punti equidistanti dalle tre facce di un triedro.

91 Tre semirette a, b, c aventi la stessa origine V e a due a due ortogonali sono gli spigoli di un triedro trirettangolo. Siano A, B e C tre punti presi ciascuno sulla semiretta omonima; dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché il triangolo ABC sia isoscele è che sia $VA \cong VB$.
(Suggerimento: un triedro trirettangolo ha per facce tre angoli retti)

92 Dimostra che la sezione di un piano perpendicolare ad uno spigolo di un triedro rettangolo è un triangolo rettangolo.
(Suggerimento: un triedro è rettangolo se ha un diedro retto)

93 Dal baricentro O di un triangolo equilatero ABC traccia la perpendicolare al piano che lo contiene e sia V un punto di tale perpendicolare. Dimostra che:
a. gli spigoli del triedro $VABC$ sono congruenti;
b. le facce AVB, BVC, CVA sono congruenti.
È vero che se VO aumenta, aumenta anche la lunghezza degli spigoli mentre diminuisce l'ampiezza delle facce?

94 Un triedro ha due facce congruenti; dimostra che:
a. i diedri opposti a tali facce sono congruenti;
b. il piano bisettore del diedro formato dalle facce congruenti è perpendicolare al piano della faccia opposta e la retta intersezione di questi due piani è bisettrice della faccia.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE NELLO SPAZIO

la teoria è a pag. 16

Comprensione

95 Definisci la simmetria centrale nello spazio. Quale delle proprietà della simmetria centrale valida nel piano non si conserva nello spazio?

96 Definisci la simmetria assiale nello spazio. Quali sono gli elementi uniti in una simmetria assiale?

97 Definisci la simmetria ortogonale nello spazio. Quali sono gli elementi uniti in una simmetria ortogonale?

98 Definisci la traslazione e la rotazione nello spazio.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

99 Barra vero o falso.

a. Ogni piano perpendicolare ad una retta oppure ad un piano è di simmetria per la retta o per il piano. V F

b. Se una retta r' è simmetrica di una retta r rispetto ad un piano α ed r è parallela ad α, anche r' lo è. V F

c. Due rette non parallele che si corrispondono in una simmetria ortogonale si intersecano in un punto del piano di simmetria, che è l'unico punto invariante nella trasformazione. V F

d. Se due piani sono simmetrici rispetto ad un piano α e uno di essi è parallelo ad α, anche l'altro lo è ed hanno entrambi la stessa distanza dal piano di simmetria. V F

e. In una simmetria ortogonale, le rette parallele al piano di simmetria sono unite. V F

100 Barra vero o falso.

a. In una traslazione, ogni piano che contiene il vettore di traslazione è unito. V F

b. In una traslazione, ad ogni retta corrisponde una retta avente direzione ortogonale a quella data. V F

c. Una rotazione non ha elementi uniti salvo il centro di rotazione. V F

d. Una rotazione è una congruenza diretta. V F

101 Quando due punti dello spazio si corrispondono in una omotetia? Quali sono le proprietà dell'omotetia?

Applicazione

102 Dati due punti A e B, qual è la simmetria centrale che porta A in B? E la simmetria ortogonale?

103 Dati due punti A e B ed una retta s, determina un punto T di s in modo che $TA \cong TB$.

104 Data una retta r e due punti A e B tali che i piani rA e rB siano distinti, determina la simmetria ortogonale che ha r come retta unita e che trasforma A in B.

105 Quanti piani di simmetria ha un quadrato nello spazio? Quanti assi di simmetria?

106 Dimostra che due piani simmetrici rispetto ad un piano α e non paralleli ad esso, si intersecano lungo una retta di α.

107 Siano A, B, C tre punti non allineati di un piano α. Dimostra che i piani assi di simmetria dei segmenti AB e BC si incontrano lungo una retta che è perpendicolare ad α.

108 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB appartenente ad un piano α; sia ABD un secondo triangolo isoscele di base AB appartenente ad un piano β. Dimostra che il piano passante per il punto medio M di AB e per i punti C e D è di simmetria per i due triangoli.

109 A quale trasformazione equivale il prodotto di due simmetrie ortogonali con i piani di simmetria fra loro paralleli?

110 Dimostra che una traslazione è il prodotto di due simmetrie ortogonali aventi i piani di simmetria paralleli.

111 Dimostra che il prodotto di due simmetrie ortogonali con i piani di simmetria incidenti equivale ad una rotazione. Specifica poi quali sono l'asse e l'ampiezza di tale rotazione. Che cosa accade se i piani di simmetria sono perpendicolari?

112 Due triangoli appartenenti a piani diversi si corrispondono in una omotetia di centro O e rapporto k; dimostra che le distanze dei piani dei due triangoli dal centro O sono proporzionali a:

a. una coppia di lati omologhi;

b. i perimetri dei due triangoli.

113 Dimostra che le aree di due triangoli omotetici stanno fra loro come i quadrati delle distanze dei piani cui appartengono dal centro dell'omotetia. Questa proprietà vale per qualunque poligono?

114 Dimostra che due triangoli ABC e $A'B'C'$ che hanno i lati paralleli ma non congruenti si corrispondono in una omotetia. Come si individua il centro di tale trasformazione?

115 Dimostra che i triangoli sezioni di un triedro con due piani paralleli sono omotetici.

116 Dimostra che se due triedri hanno spigoli paralleli, allora si corrispondono in una omotetia.

I POLIEDRI

la teoria è a pag. 21

Comprensione

117 Dopo aver definito una superficie poliedrica e un poliedro, illustra la relazione di Eulero.

118 I poliedri regolari sono solo cinque; spiega qual è la giustificazione di questa affermazione e dai la descrizione di ciascuno di essi mettendo in evidenza eventuali simmetrie.

119 Definisci il prisma e indica le sue caratteristiche. Quando un prisma prende il nome di *parallelepipedo*? Enuncia le proprietà di questo solido e dimostrale.

120 Considerate le seguenti proposizioni relative ad un prisma:
a. la base è un poligono regolare
b. gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani di base

si può dire che il prisma è regolare se:

① è vera la a
② è vera la b
③ sono vere entrambe la a e la b
④ oltre la a e la b servono altre condizioni.

121 Dopo aver definito la piramide, spiega:
a. quando una piramide è retta e quando è regolare
b. quali sono le caratteristiche di una piramide retta.

122 Barra vero o falso.
a. Esistono poligoni regolari con un qualsivoglia numero di lati. V F
b. Esistono poliedri regolari con un qualsivoglia numero di facce. V F
c. Le diagonali di un parallelepipedo sono congruenti. V F
d. Le diagonali di un parallelepipedo si tagliano scambievolmente a metà. V F
e. L'apotema di una piramide è una qualsiasi delle altezze della sue facce laterali. V F

Applicazione

123 Da un vertice di un cubo traccia la perpendicolare ad una diagonale non uscente dal vertice considerato. Dimostra che essa divide la diagonale in due parti di cui una è doppia dell'altra.

124 Tenendo presente anche l'esercizio precedente, dimostra che le proiezioni dei vertici di un cubo su una diagonale, la dividono in tre parti congruenti.

125 Dimostra che se per il centro di un cubo tracci un piano perpendicolare ad una sua diagonale, la sezione ottenuta è un esagono regolare.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

126 Dimostra che congiungendo i centri delle facce di un cubo si ottiene un ottaedro.

127 Se lo spigolo di un cubo misura ℓ, quanto misura lo spigolo dell'ottaedro che si ottiene congiungendo i centri delle facce del cubo? $\left[\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right]$

128 Dimostra che congiungendo i centri delle facce di un tetraedro si ottiene ancora un tetraedro.

129 Dimostra che l'altezza di un tetraedro regolare è tripla della distanza fra il piede dell'altezza ed una delle facce.

130 Dal centro di un parallelepipedo traccia due rette fra loro perpendicolari e dimostra che esse intersecano le sue facce in punti che sono vertici di un rombo.

131 Dimostra che in un prisma triangolare i piani che passano ciascuno per uno dei tre spigoli laterali e per la mediana della faccia opposta si incontrano lungo la stessa retta.

132 Qual è la figura geometrica sezione di un parallelepipedo con un piano che incontra i suoi spigoli laterali?

133 Dimostra che le diagonali di un parallelepipedo retto avente per base un rombo sono congruenti a due a due.

134 In una piramide a base quadrata uno spigolo è perpendicolare al piano della base; dimostra che le facce laterali sono tutte triangoli rettangoli.

135 Una piramide regolare a base quadrata ha gli spigoli tutti uguali fra loro; indicata con ℓ la loro lunghezza, esprimi la lunghezza dell'apotema e dell'altezza della piramide in funzione di ℓ. $\left[\frac{\ell\sqrt{3}}{2}; \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right]$

136 Sia *ABCD* un trapezio isoscele in cui la base maggiore *AD* è doppia di quella minore *BC* ed in cui i lati obliqui sono congruenti alla base minore. Nel piano β passante per *AD* e perpendicolare al piano del trapezio costruisci il triangolo equilatero *PAD*; sia poi γ il piano perpendicolare a β passante per *P* e per il punto medio *H* della base *AD*. Dimostra che:

a. il piano γ è piano di simmetria per la piramide di vertice *P* e avente per base il trapezio;
b. gli spigoli *PA*, *PD*, *PC*, *PB* sono tutti congruenti alla base maggiore *AD* del trapezio;
c. le facce laterali della piramide aventi per basi i lati obliqui e la base minore del trapezio sono triangoli isosceli congruenti.

I SOLIDI DI ROTAZIONE

la teoria è a pag. 26

Comprensione

137 Definisci il cilindro e successivamente:
a. enuncia le sue proprietà
b. spiega quando un cilindro si dice equilatero
c. definisci le posizioni reciproche di un cilindro e di un piano.

138 Definisci il cono e indica le sue proprietà.

139 Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere:
a. un cilindro è equilatero se la sua sezione con un piano passante per l'asse è ....
b. un cono è equilatero se la sua sezione con un piano passante per l'asse è ....
c. sezionando un cono con un piano perpendicolare all'asse si stacca un cono che è .... a quello dato.

140 Definisci la sfera e spiega che cosa sono:
a. il piano diametrale e quali sono le sue caratteristiche
b. la zona e la calotta sferica
c. il fuso e lo spicchio sferico.

141 Dati nello spazio due sfere S_1 e S_2 di raggi rispettivamente r_1 e r_2, completa le seguenti proposizioni:
a. se un piano dista da S_1 meno di r_1, il piano è ....
b. se la distanza fra i centri di S_1 e S_2 è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza le due sfere sono ....
c. se la distanza fra i centri di S_1 e S_2 è uguale alla somma dei raggi le due sfere sono ....
d. se la distanza fra i centri di S_1 e S_2 è uguale alla differenza dei raggi le due sfere sono ....

142 Barra vero o falso.
a. Sezionando una sfera con un piano si ottiene sempre una circonferenza. V F
b. Sezionando un cono con un piano si ottiene una circonferenza solo se il piano è perpendicolare all'asse del cono. V F
c. Sezionando un cono retto con un piano parallelo all'asse del cono si ottiene sempre un triangolo isoscele. V F
d. Da un punto esterno ad una sfera si possono condurre solo due piani tangenti. V F

Applicazione

143 Qual è il luogo delle rette che hanno distanza prefissata d da una retta r dello spazio?

144 Descrivi come puoi costruire un cilindro indefinito che sia tangente a tre piani assegnati che si intersecano a due a due secondo rette parallele.
(Suggerimento: ricorda come si costruisce una circonferenza tangente a tre rette incidenti a due a due)

145 Data una superficie cilindrica ed un punto P a essa esterno, quanti piani ad essa tangenti si possono condurre da P?

146 Data una superficie cilindrica ed una retta r ad essa esterna, descrivi la procedura per costruire il piano tangente alla superficie che sia parallelo a r.

147 Date due superfici cilindriche con gli assi paralleli, descrivi la procedura per costruire i piani tangenti ad entrambe le superfici.

148 **ESERCIZIO GUIDA**

Data una superficie conica di vertice V ed un punto P ad essa esterno, descrivi la procedura per tracciare i piani ad essa tangenti passanti per P.

Traccia il piano passante per il punto P dato e perpendicolare all'asse del cono; esso interseca il cono lungo una circonferenza complanare con P, quindi il problema si riconduce a quello di condurre le rette tangenti ad una circonferenza passanti per un punto P ad essa esterno.

149 Data una superficie conica di vertice V ed una retta r, descrivi la procedura per tracciare i piani tangenti alla superficie e paralleli a r.

150 Dato un triedro, come si costruisce il cono ad esso inscritto?
(Suggerimento: il vertice del cono è anche il vertice del triedro e le sue facce devono essere tangenti alla superficie conica, quindi ....)

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

151 Qual è il luogo geometrico dei piani che hanno distanza assegnata r da un punto P? E il luogo delle rette con le stesse caratteristiche?

152 Descrivi la procedura per individuare il centro di una superficie sferica che passa per quattro punti assegnati.

153 Dimostra che, tracciando in una sfera due piani simmetrici rispetto al suo centro, si ottengono cerchi congruenti.

154 Dati una sfera ed un punto P ad essa esterno, qual è il luogo delle rette per P ad essa tangenti?

155 Data una sfera ed una retta r descrivi la procedura per tracciare i piani tangenti alla sfera e passanti per r. Quanti sono tali piani?

156 Dimostra che, se una circonferenza ha tre punti su una superficie sferica, allora appartiene interamente a tale superficie.

157 Date due sfere, descrivi le proprietà dei piani tangenti ad esse comuni.

158 Trova il raggio della sfera circoscritta e di quella inscritta in un tetraedro regolare in funzione dello spigolo ℓ.

$\left[\frac{\sqrt{6}}{12}\ell;\ \frac{\sqrt{6}}{4}\ell\right]$

159 Nel cerchio massimo di una sfera di raggio r viene inscritto un quadrato. Quanto misurano gli spigoli, l'altezza e l'apotema della piramide retta che ha per base il quadrato e che ha il vertice sulla superficie sferica?

$\left[r\sqrt{2};\ r;\ \frac{r\sqrt{6}}{2}\right]$

Per la verifica delle competenze

1 Sia α il piano perpendicolare ad un segmento AB nel suo punto medio M; dimostra che α è il luogo dei punti equidistanti da A e da B.

2 Siano r e s due rette entrambe perpendicolari ad un piano α nei punti A e B; sia poi t una retta di α parallela al segmento AB e β un piano passante per t che incontra le rette r e s rispettivamente nei punti P e Q. Dimostra che:

a. PQ è parallelo e congruente ad AB;

b. indicato con C un punto di t, l'area del triangolo PQC non cambia al variare di C.

Dove deve trovarsi il punto C affinché il triangolo PQC sia isoscele?

3 Riprendi la costruzione dell'esercizio precedente; indicati con D ed E i piedi delle perpendicolari condotte da P e da Q sulla retta t, dimostra che i quadrilateri $QEDP$ e $ABED$ sono dei rettangoli.

4 Dimostra che la condizione necessaria e sufficiente affinché due rette sghembe abbiano direzioni ortogonali è che per una di esse passi un piano perpendicolare all'altra.

5 Dato un diedro $\widehat{\alpha\beta}$, sia AC un segmento del semipiano α. Descrivi la procedura che permette di individuare un punto B su β in modo che il triangolo ABC sia:

a. isoscele di base AC;

b. rettangolo in A.

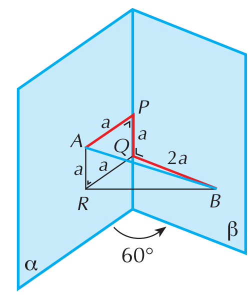
6 Considera tre rette generiche r, s, t e descrivi una procedura per costruire il piano α che contiene la retta r ed è parallelo alla retta t, il piano β che contiene s ed è parallelo a t. Supposto che i due piani così costruiti si intersechino lungo una retta a, dimostra che a è parallela a t.

7 In un piano α è dato un quadrato $ABCD$; fissata una retta r incidente ad α ed un piano β, traccia dai vertici del quadrato le parallele a r che incontrano β nei punti A', B', C', D'. Indica quali fra i piani individuati dai punti dati sono paralleli e individua la natura del quadrilatero $A'B'C'D'$. In quale caso $A'B'C'D'$ è un quadrato congruente a quello dato?

8 Dato un angolo $\widehat{AVB}$, siano α e β due piani perpendicolari ai lati VA e VB; dimostra che tali piani si intersecano lungo una retta che è perpendicolare al piano dell'angolo.

9 Per un punto A di una circonferenza considera la perpendicolare r al piano del suo cerchio. Su r considera poi un punto P e dimostra che, se lo congiungi con un punto B qualsiasi della circonferenza, diverso da A, l'area dei triangoli APB è massima quando AB è il diametro della circonferenza.

10 Sia $\widehat{\alpha\beta}$ un diedro di ampiezza 60°, una retta r incontra le sue facce nei punti A e B che distano rispettivamente di un segmento di lunghezza a e $2a$ dallo spigolo del diedro; se la distanza PQ fra i piedi delle due perpendicolari condotte da A e da B allo spigolo misura a, qual è la misura del segmento AB?
(Suggerimento: considera il triangolo QRB costruito nella figura a lato, $\overline{RB}$ = ... e quindi $\overline{AB}$ = ...) [$2a$]



11 Considera un piano π ed un punto P che non gli appartiene, indica con H il piede della perpendicolare condotta da P su π e con R un punto qualunque di esso. Siano poi α e β due piani fra loro perpendicolari passanti rispettivamente per PH e per PR. Il piano α ed il piano β così costruiti incontrano π rispettivamente lungo una retta r ed una retta s; sia K il punto di intersezione di queste due rette. Qual è il luogo dei punti K al variare di α e β?
(Suggerimento: è la circonferenza di diametro HR; infatti ....)

12 Sia $\widehat{\alpha\beta}$ un diedro retto avente per spigolo una retta r; sia s una retta non intersecante r ed avente direzione ad essa ortogonale. Indicati con A e B i punti di intersezione di s rispettivamente con α e β, dimostra che esiste una sezione normale del diedro passante per s. Indicato poi con C il punto di intersezione di tale sezione con lo spigolo r e con D un qualunque punto di r, dimostra che:

a. AC è ortogonale a DB

b. CB è ortogonale ad AD.

13 Fissati nello spazio una retta r ed un punto P che non gli appartiene, descrivi il luogo dei punti che sono piedi delle perpendicolari condotte da P ai piani passanti per r.

14 Dimostra che i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli opposti di un tetraedro si bisecano.

15 Dimostra che, congiungendo i centri delle facce di un ottaedro regolare, si ottiene un cubo.

Esame di Stato

1 Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra *concetto primitivo* e *assioma*.

2 Di due rette a e b, assegnate nello spazio ordinario, si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta p.

a. E' possibile che le due rette a, b siano parallele?

b. E' possibile che le due rette a, b siano ortogonali?

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

c. Le due rette a, b sono comunque parallele?
d. Le due rette a, b sono comunque ortogonali?
Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta. [**a.** si; **b.** si; **c.** no; **d.** no]

3 Dopo avere fornito una definizione di *rette sghembe*, si consideri la seguente proposizione:
"Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, a due a due distinte, se x e y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z, allora anche x e z sono sghembe."
Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [F]

4 Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

5 Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β e una retta r. Si sa che r è parallela ad α ed è perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [sono perpendicolari]

6 Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sè.

7 Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}s\right]$

8 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo". [$70°31'44''$]

9 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo". [$109°28'16''$]

10 Nello spazio si considerino tre rette a, b, c, comunque scelte ma alle seguenti condizioni: la retta a è strettamente parallela alla retta b e la retta b è strettamente parallela alla retta c. Si può concludere che le rette a, c non hanno punti in comune? Fornire un'esauriente motivazione della risposta. [si]

11 Si consideri la seguente proposizione:
"Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta."
Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. [è falsa]

12 Un piano g interseca i due piani α e β, paralleli in senso stretto, rispettivamente secondo le rette a e b. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette? Fornire esaurienti spiegazioni della risposta.

13 Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso. Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

14 Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

15 Sia ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

16 Si provi che nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

17 *Esiste un solo poliedro regolare le cui facce sono esagoni.* Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Risultati di alcuni esercizi

1 **c.** **2** **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F **18** **a.** **21** **b.**

22 **a.** parallele, **b.** perpendicolare anche all'altra, **c.** $t \| r \| s$, **d.** simmetrica, transitiva, direzione

47 **a.** F, **b.** F, **c.** V **50** **a.** F, **b.** F, **c.** F, **d.** V **52** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V

74 **a.** perpendicolari ad α, **b.** paralleli ad α, **c.** perpendicolare alla seconda

99 **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** V, **e.** F **100** **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V

120 ③ **122** **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V, **e.** F

139 **a.** un quadrato, **b.** un triangolo equilatero, **c.** simile

141 **a.** secante, **b.** secanti, **c.** tangenti esternamente, **d.** tangenti internamente

142 **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** F

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Test finale di autovalutazione

CONOSCENZE

1 Per due punti dello spazio passano:

a. infiniti piani e infinite rette **b.** infiniti piani e una sola retta
c. un solo piano e infinite rette **d.** un solo piano e una sola retta.

5 punti

2 Barra vero o falso.

a. Una retta non può avere solo due punti in comune con un piano. V F
b. Per un punto P passa una e una sola retta perpendicolare ad un piano assegnato. V F
c. Per un punto P passa una e una sola retta parallela ad un piano assegnato. V F
d. Due rette definiscono sempre un piano. V F
e. Due rette che si intersecano o che sono parallele definiscono sempre un piano. V F
f. Per un punto dello spazio esiste uno e un solo piano parallelo ad un piano dato. V F

15 punti

3 Assegnato un punto A fisso e un angolo α, il luogo dei punti P di un piano π tali che PA formi un angolo di ampiezza α con π è:

a. una retta **b.** una circonferenza **c.** il contorno di un quadrato **d.** il luogo non esiste

10 punti

4 Barra vero o falso.

a. Se due diedri hanno sezioni congruenti allora sono congruenti. V F
b. Due piani che si intersecano definiscono quattro diedri congruenti a due a due. V F
c. Due diedri opposti allo spigolo hanno la stessa sezione normale. V F
d. Un triedro è un angoloide che ha tre facce congruenti. V F
e. Un triedro non può avere tre facce congruenti. V F
f. La sezione di un angoloide con un piano non passante per il suo vertice è sempre un poligono. V F

15 punti

5 Barra vero o falso.

a. Nella simmetria centrale il corrispondente di un triangolo è un triangolo che appartiene allo stesso piano del primo. V F
b. Nella simmetria centrale il corrispondente di un triangolo è un triangolo che appartiene allo stesso piano del primo solo se il centro di simmetria appartiene allo stesso piano del triangolo. V F
c. Nella simmetria assiale il corrispondente di un segmento è un segmento che appartiene allo stesso piano del primo. V F
d. Due figure simmetriche rispetto ad un piano sono sempre inversamente congruenti. V F

12 punti

6 Un prisma è retto se:

a. due facce laterali consecutive formano diedri retti
b. l'altezza è perpendicolare ai piani di base
c. le sue facce laterali formano diedri retti con i piani di base.

6 punti

7 Barra vero o falso.

In una piramide:

a. l'apotema è l'altezza delle facce laterali ed esiste solo se le facce sono triangoli congruenti V F

b. l'apotema è l'altezza delle facce laterali ed esiste solo se il poligono di base è inscrittibile in una circonferenza V F

c. l'apotema è l'altezza delle facce laterali ed esiste solo se il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza V F

d. un piano parallelo alla base individua un poligono simile a quello di base. V F

12 punti

8 Barra vero o falso.

a. Un cilindro è equilatero se l'altezza è uguale al diametro di base. V F

b. Un cilindro è equilatero se l'altezza è uguale al raggio di base. V F

c. Un cono retto è originato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa. V F

d. In un cono retto l'altezza cade nel centro della circonferenza di base. V F

e. In una sfera il cerchio massimo passa per il suo centro. V F

f. Una sfera viene divisa da due piani che passano per un suo diametro in quattro calotte sferiche. V F

15 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
Punteggio									

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

ABILITÀ

1 Descrivi la procedura per costruire un piano passante per un punto assegnato P e perpendicolare a due piani incidenti.

14 punti

2 E' dato un triedro di vertice V; qual è il luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dalle facce del triedro?

16 punti

3 Dato un cubo, considera gli estremi non comuni di tre suoi spigoli che concorrono in uno stesso vertice; dimostra che tali punti sono i vertici di un triangolo equilatero.

20 punti

4 Tre rette aventi la stessa direzione appartengono ad una superficie cilindrica. Descrivi la procedura per costruire tale superficie.

20 punti

5 Dimostra che ad ogni cono si può sia inscrivere che circoscrivere una sfera. Si può dire la stessa cosa per un cilindro?

20 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	Totale
Punteggio						

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Soluzioni

Conoscenze

1 **b.**

2 **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F, **e.** V, **f.** V

3 **b.**

4 **a.** F, **b.** V, **c.** V, **d.** F, **e.** F, **f.** V

5 **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** V

6 **c.**

7 **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V

8 **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V, **e.** V, **f.** F

Abilità

1 Si conducono da *P* le rette perpendicolari ai due piani; il piano definito da queste due rette è perpendicolare a quelli assegnati.

2 Si tracciano i semipiani bisettori di due degli angoli diedri del triedro che si intersecano lungo una retta *r*; i punti di *r* sono quelli del luogo cercato.

3 Ciascun lato del triangolo è la diagonale di una faccia del cubo; i tre lati sono quindi congruenti ed il triangolo è equilatero.

4 Considerate le due strisce di piano comprese fra le coppie di rette parallele, si tracciano le rette bisettrici di tali strisce ed i piani passanti per esse e perpendicolari alle strisce; tali piani si incontrano lungo una retta che è l'asse della superficie cilindrica.

5 La sezione di un cono con un piano passante per il suo asse è un triangolo nel quale si può sempre sia inscrivere che circoscrivere una circonferenza; le sfere inscritta e circoscritta hanno tali circonferenze come circonferenze massime. Analogamente la sezione di un cilindro è un rettangolo che è sempre inscrittibile ma non circoscrittibile.