Attività di recupero

Cap 1. Le disequazioni di secondo grado

Rivedi la teoria

Il segno del trinomio di secondo grado

Il segno di un trinomio di secondo grado può essere studiato, al variare di x in R, con l'aiuto di una parabola. In particolare, dato il trinomio $ax^2 + bx + c$ e associata ad esso la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, si ha che:

I caso: $a > 0$

- se la parabola interseca l'asse x in due punti di ascissa x_1 e x_2 ($\Delta > 0$), il trinomio è positivo per valori esterni a x_1 e x_2, è negativo per valori ad essi interni (***figura 1a***)
- se la parabola interseca l'asse x in un solo punto di ascissa x_1 ($\Delta = 0$), il trinomio è positivo per ogni $x \neq x_1$ (***figura 1b***)
- se la parabola non interseca l'asse x ($\Delta < 0$), il trinomio è positivo per ogni $x \in R$ (***figura 1c***)

II caso: $a < 0$

- se la parabola interseca l'asse x in due punti di ascissa x_1 e x_2 ($\Delta > 0$), il trinomio è negativo per valori esterni a x_1 e x_2, è positivo per valori ad essi interni (***figura 2a***)
- se la parabola interseca l'asse x in un solo punto di ascissa x_1 ($\Delta = 0$), il trinomio è negativo per ogni $x \neq x_1$ (***figura 2b***)
- se la parabola non interseca l'asse x ($\Delta < 0$), il trinomio è negativo per ogni $x \in R$ (***figura 2c***)

Figura 1

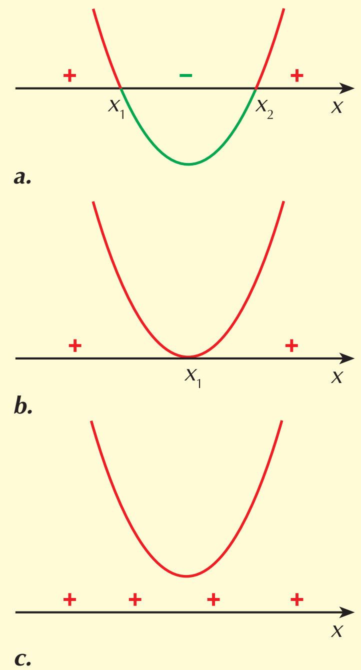
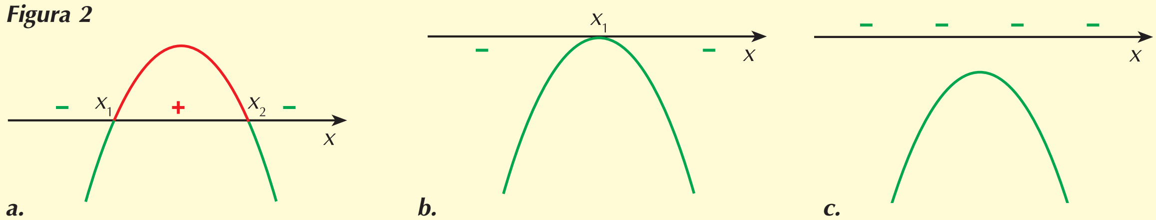


Figura 2



Per esempio, studiamo il segno dei seguenti trinomi:

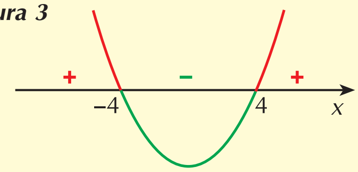
- $x^2 - 16$

  Risolviamo prima di tutto l'equazione $x^2 - 16 = 0$: $\quad x = -4 \quad \vee \quad x = 4$

  La parabola interseca l'asse x in due punti distinti ed ha concavità verso l'alto (***figura 3*** di pagina seguente), quindi il trinomio è:

- positivo se $x < -4 \ \vee \ x > 4$
- negativo se $-4 < x < 4$
- si annulla se $x = -4 \ \vee \ x = 4$.

Figura 3

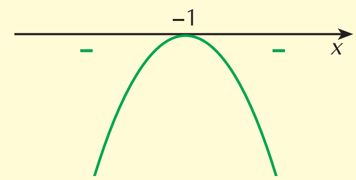


■ $-x^2 - 2x - 1$

Risolviamo l'equazione $-x^2 - 2x - 1 = 0: \quad x = -1$

La parabola interseca l'asse x in un solo punto ed ha concavità verso il basso (***figura 4***), quindi il trinomio è negativo per ogni $x \neq -1$, si annulla per $x = -1$.

Figura 4



Le disequazioni di secondo grado

Per risolvere una disequazione di secondo grado si deve seguire questa procedura:

- svolgere i calcoli fino ad arrivare ad avere una disequazione della forma $ax^2 + bx + c > 0$ (oppure $ax^2 + bx + c < 0$) in cui si può sempre supporre che sia $a > 0$ (in caso contrario basta cambiare segni e verso della disequazione)
- risolvere l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$
- disegnare la parabola associata al trinomio
- scegliere l'intervallo delle soluzioni.

Per esempio risolviamo le seguenti disequazioni:

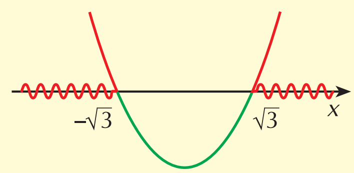
- $x^2 - 3 > 0$

  risolviamo l'equazione $x^2 - 3 = 0: \quad x = -\sqrt{3} \ \vee \ x = \sqrt{3}$

  disegniamo la parabola corrispondente (***figura 5***)

  l'insieme delle soluzioni è $x < -\sqrt{3} \ \vee \ x > \sqrt{3}$

Figura 5



- $(2 - 3x)(2 + 3x) > -6x$

  svolgiamo i calcoli $-9x^2 + 6x + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad 9x^2 - 6x - 4 < 0$

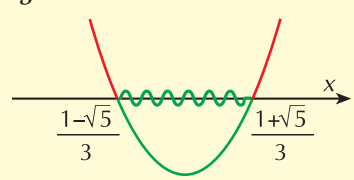
  risolviamo l'equazione $9x^2 - 6x - 4 = 0$

  $$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{9} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{9} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{3}$$

  disegniamo la parabola corrispondente (***figura 6***)

  l'insieme delle soluzioni è $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{3} < x < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3}$

Figura 6



Fai gli esercizi

Studia il segno dei seguenti trinomi.

1 **a.** $x^2 - 2x$ **b.** $x^2 - 2x - 15$

2 **a.** $-x^2 + x - 1$ **b.** $1 - 4x^2$

3 **a.** $x^2 + 5$ **b.** $-x^2 + 2x - 6$

4 **a.** $2x^2 - 5x - 3$ **b.** $-3x^2 - 4x - 1$

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

5 $x^2 - x - 2 > 0$

6 $4x^2 - 4x + 1 < 0$

7 $3x^2 - 2x + 5 > 0$

8 $(3x - 1)(3x + 1) < 15$

9 $\frac{x+1}{2} - \frac{x^2+3}{3} \geq \frac{x^2-3}{6}$

10 $(x - 1)^2 < (2x + 1)(x + 1)$

11 $x\left(x + \frac{1}{2}\right) - 3x - 1 > -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

12 $4x^2 - \frac{5x+1}{2} > \frac{5(x-1)}{3}$

13 $\frac{1+2x}{2} - \frac{3x+8}{3} < \frac{x(x+1)-5}{2} + \frac{1}{3}$

Rivedi la teoria

Le disequazioni frazionarie

Ogni disequazione frazionaria si può scrivere nella forma $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (oppure $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$) e bisogna ricordare che **i denominatori non si possono eliminare** a meno di sapere a priori se sono positivi o negativi.

Conviene poi procedere così:

- studiare il segno di ogni fattore che si trova al numeratore e di ogni fattore che si trova al denominatore
- costruire la tabella dei segni
- determinare il segno della frazione in ciascun intervallo
- scegliere gli intervalli delle soluzioni.

Risolviamo per esempio la disequazione: $\frac{x^2 - 36}{x^2 - 4x - 21} > 0$

di dominio $D = R - \{-3, 7\}$.

Studiamo il segno del numeratore andando a vedere quando è positivo:

$$x^2 - 36 > 0 \quad \text{se} \quad x < -6 \ \vee \ x > 6$$

Studiamo in modo analogo il segno del denominatore:

$$x^2 - 4x - 21 > 0 \qquad x = 2 \pm \sqrt{4 + 21} = 2 \pm 5 = \begin{cases} -3 \\ 7 \end{cases} \qquad x < -3 \quad \vee \quad x > 7$$

Costruiamo la tabella dei segni:

		-6		-3		6		7		R
x^2-36	+		−	‖	−		+	‖	+	
$x^2-4x-21$	+		+	‖	−		−	‖	+	
frazione	**+**		**−**	‖	**+**		**−**	‖	**+**	

Poiché vogliamo che la frazione sia positiva, l'insieme delle soluzioni è

$$x < -6 \quad \vee \quad -3 < x < 6 \quad \vee \quad x > 7$$

Le disequazioni di grado superiore al secondo

In modo analogo si può procedere per risolvere una disequazione $P(x) > 0$ di grado superiore al secondo, dopo aver scomposto in fattori al più di secondo grado il polinomio $P(x)$.

Risolviamo per esempio la disequazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 < 0$

Scomponiamo il polinomio al primo membro: $x^2(x-2) - 5(x-2) < 0$

$$(x-2)(x^2-5) < 0$$

Studiamo il segno di ciascun fattore del prodotto andando a vedere quando è positivo:

- $x - 2 > 0$ se $x > 2$
- $x^2 - 5 > 0$ se $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

Costruiamo la tabella dei segni:

	$-\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	R
$x-2$	−	−	+	+
x^2-5	+	−	−	+
prodotto	−	+	−	+

Poiché stiamo cercando i valori di x che rendono negativo il prodotto, la disequazione è verificata se:

$$x < -\sqrt{5} \vee 2 < x < \sqrt{5}$$

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

14 $\dfrac{9(x+2) - x(x+2)}{x^2 + x + 8} > 0$

15 $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 10x + 21} \geq 0$

16 $\dfrac{6x^2 - x - 1}{2x^2 - 5(x^2 - 4x)} \geq 0$

17 $\dfrac{x^2(2x^2 - x - 1)}{x - 3} \leq 0$

18 $\dfrac{7}{x-2} - 3 + \dfrac{8}{x-5} < 0$

19 $x + 1 > \dfrac{1}{x-1}$

20 $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} > \dfrac{1}{1-x^2}$

21 $\dfrac{(x-4)(x-3)}{x^2-4} < \dfrac{5}{x+2}$

22 $\dfrac{x^2+5}{x^2+5x+4} + \dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{x-2}{x+4}$

Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

23 $(6x^2 - 6x - 12)(x^2 + 1) > 0$

24 $2x^3 - 5x^2 - x + 6 < 0$

25 $4x^2 \leq x - 3x^3 + 2$

26 $3x^3 - 2x^2 \leq x^4$

Rivedi la teoria

I sistemi di disequazioni

Ricordiamo che per risolvere un sistema di disequazioni si deve:

- risolvere ciascuna disequazione del sistema
- costruire la tabella delle soluzioni
- determinare l'intersezione degli insiemi soluzione.

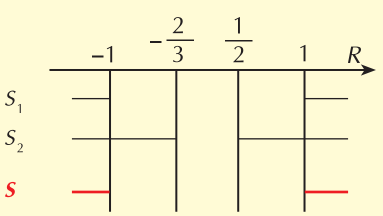
Risolviamo per esempio il seguente sistema: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 6x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$

Risolviamo la prima disequazione del sistema: $x^2 - 1 > 0$ se $x < -1 \vee x > 1 \leftarrow S_1$

Risolviamo la seconda disequazione: $6x^2 + x - 2 > 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \begin{cases} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad x < -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \leftarrow S_2$$

Costruiamo la tabella delle soluzioni:



L'insieme delle soluzioni è $x < -1 \quad \vee \quad x > 1$.

Fai gli esercizi

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

27 $\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 4x^2 + 1 > 0 \end{cases}$

28 $\begin{cases} 3x^2 + x - 4 < 0 \\ 1 - 4x^2 < 0 \end{cases}$

29 $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 - 3} > 0 \\ x^2 + 2x + 1 < 0 \end{cases}$

30 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3x^2 - 4x} > 0 \\ \dfrac{1}{6 - x^2} > 0 \end{cases}$

31 $\begin{cases} (x-3)(x^2+9) < 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 3(1-x)^2 > -1 \\ 2x(2x-1) \leq 0 \end{cases}$

33 $\begin{cases} \dfrac{x(1-2x)}{3} < 0 \\ 6x^2 - 5x - 1 \geq 0 \\ x^2 < 3x \end{cases}$

34 $\begin{cases} -4x^2 + 3x + 1 \leq 0 \\ \dfrac{1}{(2x-1)^2} > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < 0 \end{cases}$

Rivedi la teoria

Le equazioni con i moduli

Ricordiamo che il modulo di un'espressione $A(x)$ è uguale a:

- $A(x)$ per tutti gli x che la rendono positiva (o anche nulla)
- $-A(x)$ per tutti gli x che la rendono negativa.

Per risolvere un'equazione che contiene dei moduli si deve procedere in questo modo:

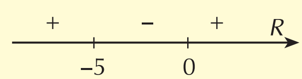
- studiare come varia il segno dell'espressione argomento del modulo
- risolvere l'equazione che si ottiene in ciascuno degli intervalli individuati
- considerare l'unione delle soluzioni trovate.

Per esempio:

- risolviamo l'equazione $10 + x - 5x^2 = |x^2 + 5x|$

  Studiamo il segno dell'espressione $x^2 + 5x$:

  $x^2 + 5x \geq 0 \quad$ se $\quad x \leq -5 \ \vee \ x \geq 0$



  - Se $x \leq -5 \ \vee \ x \geq 0$ l'argomento del modulo è positivo o nullo e l'equazione diventa

$$10 + x - 5x^2 = x^2 + 5x \quad \rightarrow \quad 6x^2 + 4x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \\ 1 \end{cases}$$

  Delle due soluzioni soltanto 1 è accettabile.

  - Se $-5 < x < 0$ l'argomento del modulo è negativo e, togliendolo, dobbiamo cambiare segno alla sua espressione:

$$10 + x - 5x^2 = -x^2 - 5x \quad \rightarrow \quad 4x^2 - 6x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} -1 \\ \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

  Delle due soluzioni soltanto -1 è accettabile.

  In definitiva, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $\quad S = \{-1, 1\}$.

Il calcolo si semplifica se l'equazione ha la forma $|f(x)| = k$ con $k \geq 0$ (se $k < 0$ l'equazione è impossibile).
In questo caso, infatti, basta risolvere le due equazioni $f(x) = k \ \vee \ f(x) = -k$. Per esempio:

- l'equazione $\left|4x^2 - 1\right| = 7$ è equivalente alle seguenti due:

  $4x^2 - 1 = 7 \quad \vee \quad 4x^2 - 1 = -7$

  Risolvendo la prima troviamo $4x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$

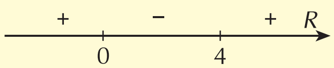
  Risolvendo la seconda troviamo $4x^2 + 6 = 0$ che è impossibile.

  L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$.

Le disequazioni con i moduli

Un procedimento analogo si segue per risolvere le disequazioni con i moduli.
Risolviamo per esempio la disequazione $5x^2 - |x^2 - 4x| > 0$

Studiamo il segno dell'argomento del modulo:



$x^2 - 4x \geq 0 \quad \text{se} \quad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4$

Negli intervalli $x \leq 0 \vee x \geq 4$ possiamo togliere il modulo lasciando invariati i segni della sua espressione; nell'intervallo $0 < x < 4$ dobbiamo togliere il modulo cambiando i segni ai termini della sua espressione; dobbiamo cioè risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4 \\ 5x^2 - (x^2 - 4x) > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 0 < x < 4 \\ 5x^2 - (-x^2 + 4x) > 0 \end{cases}$$

- Risolviamo il primo: $\begin{cases} x \leq 0 \ \vee x \geq 4 \\ 4x^2 + 4x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 4 \\ x < -1 \vee x > 0 \end{cases} \rightarrow \quad S_1: \quad x < -1 \vee x \geq 4$
- Risolviamo il secondo: $\begin{cases} 0 < x < 4 \\ 6x^2 - 4x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x < 0 \vee x > \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \quad S_2: \quad \dfrac{2}{3} < x < 4$

La soluzione della disequazione è l'unione degli insiemi S_1 e S_2 ed è: $S: x < -1 \ \vee \ x > \dfrac{2}{3}$.

Come nel caso delle equazioni, la procedura si semplifica se si deve risolvere una disequazione della forma $|f(x)| > k$ oppure $|f(x)| < k$:

- la disequazione $|f(x)| > k$:
  - se k è un numero negativo è sempre verificata
  - se k è un numero positivo è equivalente alle due disequazioni $f(x) < -k \quad \vee \quad f(x) > k$
- la disequazione $|f(x)| < k$:
  - se k è un numero negativo non è mai verificata
  - se k è un numero positivo è equivalente al sistema $\begin{cases} f(x) > -k \\ f(x) < k \end{cases}$

Per esempio:

- $|x^2 - 5x| > 6$ è equivalente alle disequazioni $x^2 - 5x < -6 \quad \vee \quad x^2 - 5x > 6$

  Risolvendo la prima troviamo $2 < x < 3$

  Risolvendo la seconda troviamo $x < -1 \vee x > 6$

  Unendo i due insiemi otteniamo le soluzioni della disequazione: $x < -1 \ \vee \ 2 < x < 3 \ \vee \ x > 6$
- $|3x + 1| < 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3x + 1 > -1 \\ 3x + 1 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{2}{3} \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \quad -\frac{2}{3} < x < 0$$

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti equazioni con i moduli.

35 $x^2 + x + 3 = 3x^2 + |1 - x^2|$

36 $(2x + 1)(x - 1) = x^2 + |2x^2 - 1|$

37 $|2x^2 - x - 1| = x^2 + x - 1$

38 $2|x^2 - 3| + 3x = x^2$

39 $|x^2 - 2x - 3| = x - 3$

40 $|3x^2 - 5x - 2| = 6$

41 $x^2 - |6x - x^2| + 4 = 0$

42 $x^2 + |2x^2 - 3| = 6$

43 $4 \cdot |x^2 + 3x| = 27$

44 $|x^2 + 5x| = 14$

45 $4 \cdot |3x^2 - 1| = 1$

46 $|3x^2 - 4x + 1| = 5$

47 $1 - 2x = |9 - x^2| - 2x^2$

48 $2|x^2 - 1| + 1 = |x^2 - 8|$

49 $\dfrac{x-3}{3} + \dfrac{|5x^2 - 2x + 2|}{2} = \dfrac{5}{6} + |2x^2 - 3x|$

Risolvi le seguenti disequazioni con i moduli.

50 $(x+3)^2 < |1 - 3x|$

51 $(3x - 1)(x + 2) > |x - 1| + 19$

52 $x(2x + 1) + |x^2 - 1| < 3$

53 $|x^2 - 9x| > -3$

54 $|6x^2 - 7x| < 20$

55 $|3x^2 - x| > 2$

56 $\dfrac{|x^2 + 5x + 4|}{2} > \dfrac{x^2 - 2x}{3} - \dfrac{x + 7}{6}$

57 $|3x^2 + x| - 2x > 1 - x$

Risultati di alcuni esercizi.

1 **a.** positivo per $x < 0 \ \vee \ x > 2$; negativo per $0 < x < 2$; nullo per $x = 0 \ \vee \ x = 2$
b. positivo per $x < -3 \ \vee \ x > 5$; negativo per $-3 < x < 5$; nullo per $x = -3 \ \vee \ x = 5$

2 **a.** sempre negativo; **b.** positivo per $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; negativo per $x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > \frac{1}{2}$; nullo per $x = \pm\frac{1}{2}$

3 **a.** sempre positivo; **b.** sempre negativo

4 **a.** positivo per $x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > 3$; negativo per $-\frac{1}{2} < x < 3$; nullo per $x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 3$; **b.** positivo per $-1 < x < -\frac{1}{3}$; negativo per $x < -1 \ \vee \ x > -\frac{1}{3}$; nullo per $x = -1 \ \vee \ x = -\frac{1}{3}$

5 $x < -1 \ \vee \ x > 2$

6 per nessun valore di x

7 $\forall x \in R$

8 $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

9 $0 \leq x \leq 1$

10 $x < -5 \ \vee \ x > 0$

11 $x < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \ \vee \ x > \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

12 $S = R$

13 $x < -1 \ \vee \ x > 0$

14 $-2 < x < 9$

15 $x \leq -2 \ \vee \ 1 \leq x < 3 \ \vee \ x > 7$

16 $-\frac{1}{3} \leq x < 0 \ \vee \ \frac{1}{2} \leq x < \frac{20}{3}$

17 $x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ 1 \leq x < 3 \ \vee \ x = 0$

18 $x < 2 \ \vee \ 3 < x < 5 \ \vee \ x > 9$

19 $-\sqrt{2} < x < 1 \ \vee \ x > \sqrt{2}$

20 $x < -1 \ \vee \ x > 1$

21 $-2 < x < 2 \ \vee \ 6 - \sqrt{14} < x < 6 + \sqrt{14}$

22 $-4 < x < -3$

23 $x < -1 \ \vee \ x > 2$

24 $x < -1 \ \vee \ \frac{3}{2} < x < 2$

25 $x \leq \frac{2}{3}$

26 $x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2$

27 $x < 0 \ \vee \ x > 1$

28 $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{2} \ \vee \ \frac{1}{2} < x < 1$

29 $S = \varnothing$

30 $0 < x < 1 \ \vee \ \frac{4}{3} < x < \sqrt{6}$

31 $x < -1$

32 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

33 $1 \leq x < 3$

34 $-5 < x \leq -\frac{1}{4} \ \vee \ 1 \leq x < 3$

35 $S = \left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$

36 $S = \left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$

37 $S = \left\{\frac{\sqrt{6}}{3}, 2\right\}$

38 $S = \left\{-1, \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}\right\}$ **39** $S = \{3\}$ **40** $S = \left\{-1, \dfrac{8}{3}\right\}$ **41** $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, 1, 2\right\}$

42 $S = \{\pm\sqrt{3}\}$ **43** $S = \left\{-\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$ **44** $S = \{-7, 2\}$ **45** $S = \left\{\pm\dfrac{\sqrt{15}}{6}, \pm\dfrac{1}{2}\right\}$

46 $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, 2\right\}$ **47** $S = \left\{-\dfrac{4}{3}, 2\right\}$ **48** $S = \{\pm\sqrt{3}\}$ **49** $S = \{-5, 1\}$

50 $-8 < x < -1$ **51** $x < \dfrac{-3-5\sqrt{3}}{3} \lor x > 2$ **52** $-\dfrac{4}{3} < x < 1$ **53** $S = R$

54 $-\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{5}{2}$ **55** $x < -\dfrac{2}{3} \lor x > 1$ **56** $x < -19 \lor x > -1$ **57** $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \lor x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Cap 2. Equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo e irrazionali

Rivedi la teoria

La risoluzione per scomposizione

Non sempre è possibile risolvere un'equazione polinomiale $E(x) = 0$ di grado superiore al secondo per via algebrica.
In genere lo si può fare nel caso in cui l'equazione ha una forma particolare, oppure quando è possibile scomporre il polinomio $E(x)$.
In questo secondo caso si deve applicare la legge di annullamento del prodotto:

- si scompone il polinomio $E(x)$ in fattori al più di secondo grado
- si annulla ciascun fattore e si risolvono le equazioni ottenute.

Per esempio, risolviamo l'equazione $x^2(12x+1) = 10x+3$

Svolgiamo i calcoli e scriviamo l'equazione nella forma $E(x) = 0$: $12x^3 + x^2 - 10x - 3 = 0$

Per scomporre $E(x)$ usiamo la regola di Ruffini; poiché $P(1) = 0$, il polinomio è divisibile per $x - 1$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 12 & 1 & -10 & -3 \\ 1 & & 12 & 13 & 3 \\ \hline & 12 & 13 & 3 & 0 \end{array} \qquad Q(x) = 12x^2 + 13x + 3$$

Scomposizione $(x-1)(12x^2+13x+3)$

Equazione da risolvere $(x-1)(12x^2+13x+3) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto deve essere $x - 1 = 0 \lor 12x^2 + 13x + 3 = 0$

Dalla prima equazione otteniamo $x = 1$

Dalla seconda equazione otteniamo $x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{24} = \dfrac{-13 \pm 5}{24} = \begin{cases} -\dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{3}, 1\right\}$.

Le equazioni reciproche

Un'equazione è **reciproca** se, una volta ordinato il polinomio $E(x)$, i coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali oppure opposti.
La caratteristica di queste equazioni è che se ammettono la soluzione k, ammettono anche la soluzione reciproca $\frac{1}{k}$.
Se poi l'equazione è di grado dispari, oppure di grado pari ma manca il termine centrale, allora essa ammette sempre la soluzione -1 oppure $+1$.

Risolviamo per esempio l'equazione $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$.

Osserviamo che i termini equidistanti dagli estremi sono opposti; il polinomio al primo membro si annulla quindi per $x = 1$. Abbiamo già trovato la prima soluzione; per trovare le altre dividiamo per $x - 1$ e annulliamo il polinomio ottenuto:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 6 & -19 & 19 & -6 \\ 1 & & 6 & -13 & 6 \\ \hline & 6 & -13 & 6 & 0 \end{array} \qquad Q(x) = 6x^2 - 13x + 6$$

Risolviamo l'equazione: $6x^2 - 13x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{2}{3} \\ \searrow \frac{3}{2} \end{array}$

In definitiva $S = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 1 \right\}$.

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti equazioni applicando il metodo di scomposizione.

1 $2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x = 0$

2 $2x(x-2) + x^2(x-2) - 3x + 6 = 0$

3 $x^5 - x^4 = 16x - 16$

4 $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

5 $3x^2 - 1 = x(x^2 + 1)$

6 $x(x^2 - 3x + 1) = 2x - (x-1)\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)$

7 $2x^2(3x^2 - 2x - 5) - \frac{1}{4} = 3x^2 - \left[\frac{1}{4} + \frac{2(x + 1 - x^3)}{2}\right] - \frac{(x-1)^2}{2}$

Risolvi le seguenti equazioni reciproche.

8 $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$
(Suggerimento: i termini equidistanti dagli estremi sono uguali; il polinomio al primo membro si annulla quindi per $x = -1$)

9 $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$
(Suggerimento: l'equazione è di quarto grado e manca il termine centrale di secondo grado; i coefficienti equidistanti dagli estremi sono di segno opposto, quindi il polinomio si annulla sia per $x = -1$ che per $x = 1$)

10 $8x^3 - 57x^2 - 57x + 8 = 0$

11 $x^3 + 13x^2 - 13x - 1 = 0$

12 $4x^4 + 17x^3 - 17x - 4 = 0$

Rivedi la teoria

Le equazioni binomie

Un'equazione **binomia** ha la forma $x^n = k$.

Per risolverla in R, basta determinare il valore di x applicando la definizione di radicale in R. Per esempio:

- $x^3 + 27 = 0 \qquad x^3 = -27 \qquad x = \sqrt[3]{-27} = -3$
- $x^4 + 16 = 0 \qquad x^4 = -16$ l'equazione non ha soluzioni reali
- $x^4 - 16 = 0 \qquad x^4 = 16 \qquad x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

Le equazioni trinomie

Un'equazione **trinomia** ha la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$; se $n = 2$ l'equazione si dice **biquadratica**.

Per risolverla si segue questa procedura:

- si opera la sostituzione $x^n = t$
- si risolve l'equazione di secondo grado ottenuta
- si opera la sostituzione inversa.

Per esempio, risolviamo l'equazione $3x^6 - 4x^3 + 1 = 0$:

- poniamo $x^3 = t \qquad 3t^2 - 4t + 1 = 0$
- risolviamo l'equazione $\qquad t = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \dfrac{2 \pm 1}{3} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \\ 1 \end{cases}$
- operiamo la sostituzione inversa $\qquad x^3 = \dfrac{1}{3} \quad \to \quad x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$

$x^3 = 1 \quad \to \quad x = 1$

Le equazioni reciproche di quarto grado

Per risolvere un'**equazione reciproca di quarto grado completa**, si deve seguire una procedura particolare che consiste nel:

- dividere entrambi i membri dell'equazione per x^2
- raccogliere a fattor comune i coefficienti uguali
- operare le sostituzioni $\quad x + \dfrac{1}{x} = t \quad$ e $\quad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Per esempio, risolviamo l'equazione $\quad 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

Dividiamo per $x^2 \qquad 6x^2 - 5x - 38 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} = 0$

Raccogliamo i coefficienti uguali $\qquad 6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 38 = 0$

Operiamo le sostituzioni indicate $\qquad 6(t^2 - 2) - 5t - 38 = 0 \quad \to \quad 6t^2 - 5t - 50 = 0$

Risolviamo l'equazione $t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+1200}}{12} = \dfrac{5 \pm 35}{12} = \begin{cases} -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{10}{3} \end{cases}$

Operiamo le sostituzioni inverse $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2}$ $\quad 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad x = \begin{cases} -2 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3} \quad 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad x = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \\ 3 \end{cases}$

In definitiva, l'insieme soluzione dell'equazione è $S = \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{3}\right\}$.

Fai gli esercizi

Risolvi in R le seguenti equazioni binomie e trinomie.

13 **a.** $x^6 - 729 = 0$ **b.** $27x^3 - 8 = 0$

14 **a.** $x^3 - 15 = 0$ **b.** $32x^5 + 1 = 0$

15 **a.** $3x^4 - 16 = 0$ **b.** $16x^4 - 81 = 0$

16 **a.** $4x^4 - 7x^2 - 2 = 0$ **b.** $4x^6 + 6x^3 - 18 = 0$

17 **a.** $16x^8 - 17x^4 + 1 = 0$ **b.** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

18 **a.** $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$ **b.** $16x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

19 **ESERCIZIO GUIDA**

E' spesso conveniente operare una sostituzione di variabile anche per individuare le soluzioni reali di equazioni particolari. Consideriamo per esempio l'equazione

$$(x+1)^3 - 8 = 0$$

Se, anziché sviluppare il cubo del binomio, poniamo $x + 1 = t$, l'equazione data si trasforma in una binomia di facile risoluzione:

$$t^3 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad t^3 = 8 \quad \rightarrow \quad t = 2$$

Operando poi la sostituzione inversa otteniamo $x + 1 = 2$ cioè $x = 1$

20 **ESERCIZIO GUIDA**

$$2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{x+1}{2} - 3 = 0$$

Anzichè sviluppare il quadrato e svolgere i calcoli, conviene operare la sostituzione $\dfrac{x+1}{2} = t$ e risolvere l'equazione in t:

$$2t^2 - t - 3 = 0 \qquad t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

Opera adesso la sostituzione inversa: $\frac{x+1}{2} = -1$ e $\frac{x+1}{2} = \frac{3}{2}$ e risolvi le equazioni ottenute.

21 **a.** $(x+2)^3 + 27 = 0$ **b.** $(x-3)^4 - 9 = 0$

22 **a.** $8(x+1)^4 - 7(x+1)^2 - 1 = 0$ **b.** $4(2x+3)^8 - 3(2x+3)^4 - 1 = 0$

23 $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$

24 $18x^4 - 99x^3 + 166x^2 - 99x + 18 = 0$

Rivedi la teoria

Le equazioni irrazionali

Un'equazione è **irrazionale** se l'incognita compare nell'argomento di almeno un radicale.

Un'equazione che ha un solo radicale si può sempre scrivere nella forma $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$.

Per risolverla è necessario elevare alla potenza n entrambi i membri dell'equazione in modo da ritrovare un'equazione di tipo polinomiale.
Occorre allora ricordare che, nell'ambito del dominio dell'equazione:

- se n è dispari, l'elevamento a potenza consente di scrivere un'equazione equivalente a quella data;
- se n è pari, si giunge a un'equazione equivalente solo se i due membri dell'equazione hanno lo stesso segno.

Per esempio:

- l'equazione $\sqrt[3]{x-1} = -2$ è equivalente a $x - 1 = -8$
- l'equazione $\sqrt{2x+1} = x$ è equivalente a $2x + 1 = x^2$ solo se $x \geq 0$.

Le equazioni irrazionali di indice dispari

Basta elevare alla potenza indicata dall'indice e risolvere l'equazione ottenuta; se infatti si elevano a potenza dispari i due membri di un'equazione, l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data. Per esempio

$$\sqrt[3]{x+7} = 2x \qquad \text{è equivalente a} \qquad x + 7 = 8x^3$$

Se risolviamo quest'ultima equazione otteniamo:

$$8x^3 - x - 7 = 0 \qquad (x-1)(8x^2 + 8x + 7) = 0$$

e poiché il fattore di secondo grado ha un discriminante negativo, la sola soluzione reale dell'equazione è 1; quindi $S = \{1\}$.

Le equazioni irrazionali di indice pari

Scritta innanzi tutto l'equazione nella forma $\sqrt{A(x)} = B(x)$ si può procedere in due modi:

- elevare al quadrato, risolvere l'equazione ottenuta e fare la verifica delle soluzioni
- risolvere l'equazione $A(x) = [B(x)]^2$ con la condizione che sia $B(x) \geq 0$ (condizione di equivalenza).

Risolviamo nei due modi l'equazione $\sqrt{x^2 + 3x} = 4x - 2$

- eleviamo al quadrato: $x^2 + 3x = (4x - 2)^2 \quad \rightarrow \quad 15x^2 - 19x + 4 = 0$

  risolviamo l'equazione ottenuta: $x = \frac{4}{15} \quad \vee \quad x = 1$

  Procediamo alla verifica delle soluzioni:

  per $x = \frac{4}{15}$: $\sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{15}} = 4 \cdot \frac{4}{15} - 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{196}{225}} = -\frac{14}{15} \quad \rightarrow \quad \frac{14}{15} = -\frac{14}{15}$ falso

  per $x = 1$: $\sqrt{1 + 3} = 4 - 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 2$ vero

  L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{1\}$.

- Troviamo la condizione di equivalenza: $4x - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$

  Elevando al quadrato e risolvendo l'equazione ottenuta si ottiene ancora $x = \frac{4}{15} \vee x = 1$

  Poichè solo la seconda soluzione soddisfa la condizione $x \geq \frac{1}{2}$, l'insieme delle soluzioni è $S = \{1\}$.

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali.

25 $\sqrt{3 - 4x} = 3$

26 $\sqrt[3]{8x^3 - 1} = 2x - 1$

27 $\sqrt{x - 2} = x - 2$

28 $\sqrt[3]{x^3 - 26} = x - 2$

29 $\sqrt{x - 1} = 2x - 3$

30 $3(1 + x) = \sqrt[3]{x^2 + 2} + 3x$

31 $1 + \sqrt{x - 2} + 7x = 0$

32 $\sqrt{4x^2 - 1} - 2 = 4x$

33 $1 + \sqrt{x - 2} = x - 1$

34 $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{5}x - 4$

35 $\sqrt{3 + 5x} = \frac{36 - 5x}{10}$

36 $5 + \sqrt{1 - 6x} = 2(3 - x)$

37 **ESERCIZIO GUIDA**

Per risolvere un'equazione irrazionale che contiene più di un radicale di indice pari si può procedere determinando l'insieme di accettabilità delle soluzioni E, oppure verificando le soluzioni.
In entrambi i casi, comunque, non si giunge all'equazione razionale con un solo elevamento a potenza, in genere ne occorrono di più. Osserva l'esercizio che segue.

$\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 6} = 3$

I metodo: determiniamo l'insieme di accettabilità E_1; deve essere:

$x + 3 \geq 0$ per l'esistenza del primo radicale

$x + 6 \geq 0$ per l'esistenza del secondo radicale

Non è necessario aggiungere ulteriori condizioni perché sia il primo membro che il secondo sono positivi. L'insieme E_1 è quindi la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad E_1 = \{x \geq -3\}$$

eleviamo al quadrato $\quad x+3+x+6+2\sqrt{x^2+9x+18} = 9$

isoliamo il radicale $\quad \sqrt{x^2+9x+18} = -x$

determiniamo il nuovo insieme di accettabilità $\quad \begin{cases} x \geq -3 \\ -x \geq 0 \end{cases} \quad E_2 = \{-3 \leq x \leq 0\}$

eleviamo di nuovo al quadrato $\quad x^2+9x+18 = x^2$

risolviamo l'equazione ottenuta $\quad 9x+18 = 0 \qquad x = -2$

Poiché la soluzione trovata appartiene ad E_2, $\quad S = \{-2\}$.

II metodo: verifichiamo le soluzioni.

Eleviamo al quadrato una prima volta $\quad x+3+x+6+2\sqrt{x^2+9x+18} = 9$

isoliamo il radicale ed eleviamo al quadrato la seconda volta $\quad x^2+9x+18 = x^2$

risolviamo l'equazione $\quad x = -2$

effettuiamo la verifica $\quad \sqrt{-2+3}+\sqrt{-2+6} = 3 \quad \rightarrow \quad 1+2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3 = 3$

poiché la soluzione verifica l'equazione, $\quad S = \{-2\}$.

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con il metodo che ritieni più opportuno.

38 $\sqrt{1+3x+x^2} = 1+\sqrt{1+x^2}$

39 $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x^2+2x-1} = 0$

40 $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3} = 0$

41 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione $\sqrt{x+1}+3 = \dfrac{10}{\sqrt{x+1}}$.

Per l'esistenza dell'equazione deve essere $x+1 > 0$, cioè $x > -1$.

Facciamo il denominatore comune e riscriviamo l'equazione in forma intera: $\quad x+1+3\sqrt{x+1} = 10$

Isoliamo il radicale: $\quad 3\sqrt{x+1} = 9-x$

Risolviamo il sistema $\quad \begin{cases} 9-x \geq 0 \\ 9(x+1) = (9-x)^2 \end{cases}$

Risolviamo la disequazione: $\quad x \leq 9$

Risolviamo l'equazione: $\quad x^2-27x+72 = 0$

$\quad x = 24 \ \vee \ x = 3$

La soluzione 24 non è minore di 9, quindi $\quad S = \{3\}$.

Risolvi le equazioni irrazionali.

42 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\dfrac{6}{\sqrt{x-2}}$

43 $\dfrac{\sqrt{1+8x^3}}{\sqrt{2x+1}}=2+2x$

Rivedi la teoria

Le disequazioni irrazionali

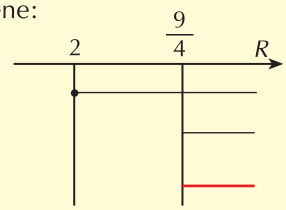
- Una disequazione irrazionale della forma $\sqrt{A(x)}>B(x)$ è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} B(x)\geq 0 \\ A(x)>[B(x)]^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)<0 \end{cases}$$

Per esempio: $\sqrt{x^2-5}>x-2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-2\geq 0 \\ x^2-5>(x-2)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2-5\geq 0 \\ x-2<0 \end{cases}$

Risolvendo il primo sistema si ottiene:

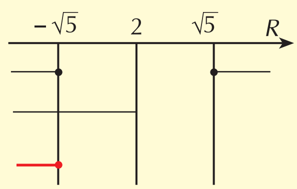
$$\begin{cases} x\geq 2 \\ x>\dfrac{9}{4} \end{cases}$$



$x>\dfrac{9}{4}$

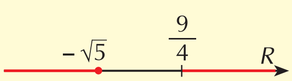
Risolvendo il secondo sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x\leq -\sqrt{5} \ \vee \ x\geq \sqrt{5} \\ x<2 \end{cases}$$



$x\leq -\sqrt{5}$

La soluzione è rappresentata dall'unione dei due intervalli:



cioè: $x\leq -\sqrt{5} \ \vee \ x>\dfrac{9}{4}$

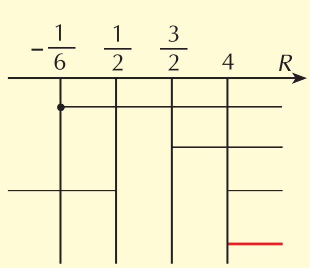
- Una disequazione irrazionale della forma $\sqrt{A(x)}<B(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<[B(x)]^2 \end{cases}$$

Per esempio: $\sqrt{6x+1}<2x-3 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6x+1\geq 0 \\ 2x-3>0 \\ 6x+1<(2x-3)^2 \end{cases}$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} x\geq -\dfrac{1}{6} \\ x>\dfrac{3}{2} \\ x<\dfrac{1}{2} \ \vee \ x>4 \end{cases}$$



$x>4$

- Una disequazione irrazionale della forma $\sqrt[3]{A(x)} \gtrless B(x)$ si risolve elevando al cubo i due membri della disequazione.

  Per esempio:

  $$\sqrt[3]{x^3-4x+2} > x-2 \quad \rightarrow \quad x^3-4x+2 > (x-2)^3 \quad \rightarrow \quad 3x^2-8x+5>0 \quad \rightarrow \quad x<1 \vee x>\frac{5}{3}$$

Fai gli esercizi

44 **ESERCIZIO GUIDA**

a. $\sqrt{x^2-x} > -x$

E' una disequazione della forma $\sqrt{A(x)} > B(x)$, quindi è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2-x > (-x)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2-x \geq 0 \\ -x < 0 \end{cases}$$

b. $\sqrt{2x^2+x+8} < 2x-1$

E' una disequazione della forma $\sqrt{A(x)} < B(x)$, quindi è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x^2+x+8 \geq 0 \\ 2x-1>0 \\ 2x^2+x+8 < (2x-1)^2 \end{cases}$$

45 $\sqrt{x^2-1} < x+4$

46 $\sqrt{6+2x-3x^2} > x+2$

47 $\sqrt[3]{7x-2x^2+5} > 1$

48 $\sqrt{4x^2+6x+6} < x+3$

Risultati di alcuni esercizi.

1 $S=\left\{0,\,-1,\,-2,\,\frac{3}{2}\right\}$

2 $S=\{1,\,2,\,-3\}$

3 $S=\{1,\,2,\,-3\}$

4 $S=\{\pm 1,\,-4\}$

5 $S=\{1,\,1\pm\sqrt{2}\}$

6 $S=\left\{-1,\,\frac{5}{2},\,\frac{1}{2}\right\}$

7 $S=\left\{-1,\,\frac{1}{3},\,\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}\right\}$

8 $S=\left\{\frac{1}{3},\,3,\,-1\right\}$

9 $S=\left\{\frac{1}{2},\,2,\,\pm 1\right\}$

10 $S=\left\{-1,\,8,\,\frac{1}{8}\right\}$

11 $S=\{1,\,-7\pm 4\sqrt{3}\}$

12 $S=\left\{-1,\,1,\,-4,\,-\frac{1}{4}\right\}$

13 **a.** $S=\{-3,\,3\}$; **b.** $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

14 **a.** $S=\{\sqrt[3]{15}\}$; **b.** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

15 **a.** $S=\left\{\pm\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right\}$; **b.** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

16 **a.** $S=\{\pm\sqrt{2}\}$; **b.** $S=\left\{-\sqrt[3]{3},\,\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right\}$

17 **a.** $S=\left\{\pm\frac{1}{2},\,\pm 1\right\}$; **b.** $S=\left\{\pm 2,\,\pm\frac{1}{2}\right\}$

18 **a.** $S=\left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\,\pm 1\right\}$; **b.** $S=\left\{\pm\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right\}$

20 $S=\{-3,\,2\}$

21 **a.** $S = \{-5\}$; **b.** $S = \{3 \pm \sqrt{3}\}$

22 **a.** $S = \{0, -2\}$; **b.** $S = \{-2, -1\}$

23 $S = \left\{2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}\right\}$

24 $S = \left\{3, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

25 $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

26 $S = \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$

27 $S = \{2, 3\}$

28 $S = \{-1, 3\}$

29 $S = \{2\}$

30 $S = \{\pm 5\}$

31 $S = \varnothing$

32 $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

33 $S = \{2, 3\}$

34 $S = \{\sqrt{5}\}$

35 $S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$

36 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$

38 $S = \left\{\frac{3 + 2\sqrt{6}}{5}\right\}$

39 $S = \{-1\}$

40 $S = \{3\}$

42 $S = \left\{\frac{70}{17}\right\}$

43 $S = \left\{-\frac{3}{10}\right\}$

44 **a.** $x < 0 \lor x \geq 1$; **b.** $x > \frac{7}{2}$

45 $-\frac{17}{8} < x \leq -1 \lor x \geq 1$

46 $-1 < x < \frac{1}{2}$

47 $-\frac{1}{2} < x < 4$

48 $-1 < x < 1$

Cap 3. SISTEMI NON LINEARI

Rivedi la teoria

Sistemi di secondo grado

Un sistema è di secondo grado se tutte le equazioni sono di primo grado tranne una che è di secondo. Per risolvere un sistema di questo tipo conviene di solito applicare il principio di sostituzione e ricavare una delle variabili dall'equazione di primo grado.

Risolviamo per esempio il sistema: $\begin{cases} x^2 - y + 6(x+1) = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Conviene ricavare l'espressione di y dalla seconda equazione e non quella di x perché nella prima questa variabile compare una sola volta ed è di primo grado:

$$\begin{cases} x^2 - (x+2) + 6x + 6 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado nella variabile x: $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$

Otteniamo allora i due sistemi: $\begin{cases} x = -4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = x + 2 \end{cases}$

le cui soluzioni sono $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

quindi $S = \{(-4, -2); (-1, 1)\}$.

Fai gli esercizi

Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado.

1 $\begin{cases} y + x = (x-2)(x+1) \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} \dfrac{2}{3} - y = \dfrac{x-1}{2} \cdot \dfrac{x+1}{3} \\ 3y = 2 - (x-1) \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2(y-x) = 1 - 2x \\ y = \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{5}{x} \end{cases}$

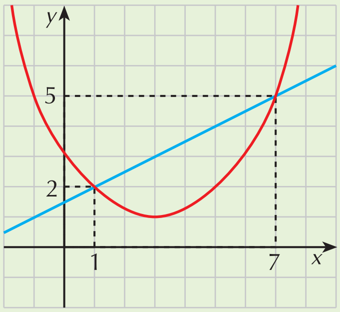
4 $\begin{cases} y = 2 - \dfrac{3}{x+10} \\ 8y + x + 4 = 0 \end{cases}$

Interpreta graficamente le soluzioni dei seguenti sistemi.

5 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{4} \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una parabola, la seconda una retta; le soluzioni del sistema sono le coordinate dei punti d'intersezione delle due curve.



6 $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$

7 $\begin{cases} y = x + 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

8 Trova le coordinate dei punti A e B di intersezione della parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 10$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante e calcola poi l'area del triangolo ABV, essendo V il vertice della parabola.

9 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il sistema $\begin{cases} x^2 + y + z = 0 \\ 2x - y = 10 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$

Conviene ricavare l'espressione di y dalla seconda equazione e sostituire nelle altre:

$$\begin{cases} y = 2x - 10 \\ x + z + 2 = 0 \\ x^2 + 2x - 10 + z = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo adesso l'espressione di z dalla seconda equazione: $\begin{cases} y = 2x - 10 \\ z = -x - 2 \\ x^2 + 2x - 10 - x - 2 = 0 \end{cases}$

Otteniamo alla fine il sistema: $\begin{cases} y = 2x - 10 \\ z = -x - 2 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases}$

Risolviamo adesso l'equazione in x: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$

Sostituendo i valori trovati nell'espressione di y e di z otteniamo $\begin{cases} x = -4 \\ y = -18 \\ z = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = -5 \end{cases}$

e pertanto l'insieme delle soluzioni è $S = \{(-4, -18, 2); (3, -4, -5)\}$.

Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado in più di due incognite.

10 $\begin{cases} (x+1)^2 - 3y + z = -6 \\ 2(x-2) + 3(3-y) = 2(2-y) \\ x - 1 + (y-1)^2 = 2z + y^2 + 1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 2x(x-3) + y^2 = z + 2 \\ -3(x+z) + 7(y-1) = 3(2y-z) - 2x - 7 \\ (z-2)^2 - 5x + y = z(z-3) - 5x \end{cases}$

Risolvi e discuti i seguenti sistemi letterali.

12 **ESERCIZIO GUIDA**

Se un sistema è letterale occorre discutere come variano le soluzioni al variare dei parametri in R;

risolviamo per esempio il sistema $\begin{cases} x(a+2) + y = 1 \\ x^2(4-a^2) - y - x(a-2) + 2 = 0 \end{cases}$

Conviene ricavare l'espressione di y dall'equazione di primo grado: $\begin{cases} y = 1 - x(a+2) \\ x^2(4-a^2) - y - x(a-2) + 2 = 0 \end{cases}$

Sostituendo otteniamo il sistema $\begin{cases} y = 1 - x(a+2) \\ (4-a^2)x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases}$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

- se $4 - a^2 \neq 0$, cioè se $a \neq \pm 2$, si può applicare la formula risolutiva ottenendo

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 + a^2}}{4 - a^2} = \frac{-2 \pm a}{4 - a^2} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{a+2} \vee x = \frac{1}{a-2}$$

Il sistema ha quindi soluzioni: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{a+2} \\ y = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{a-2} \\ y = \dfrac{4}{2-a} \end{cases}$

- se $4 - a^2 = 0$, cioè se $a = \pm 2$, l'equazione diventa

$4x + 1 = 0$ ed ha soluzione $x = -\dfrac{1}{4}$

Il sistema ha dunque una sola soluzione; in particolare:

- se $a = -2$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$
- se $a = 2$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}$

In definitiva:

- se $a \neq \pm 2$ allora $S = \left\{ \left(-\frac{1}{a+2}, 2 \right); \left(\frac{1}{a-2}, \frac{4}{2-a} \right) \right\}$
- se $a = -2$ allora $S = \left\{ \left(-\frac{1}{4}, 1 \right) \right\}$
- se $a = 2$ allora $S = \left\{ \left(-\frac{1}{4}, 2 \right) \right\}$

13 $\begin{cases} 2x + y = 4a \\ x^2 + ay = 7a^2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} y - 2ax + 1 = 0 \\ y^2 - \frac{1}{2}(x+1)^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 \end{cases}$

Rivedi la teoria

Sistemi di grado superiore al secondo

Se il sistema non è di tipo particolare, il metodo che di solito conviene applicare è quello di sostituzione, anche se a volte l'applicazione del principio di riduzione può ridurre la complessità del sistema.

Risolviamo per esempio il sistema di terzo grado: $\begin{cases} x = 2 - y \\ 3x^2y - 7(y-1) = 3x^2 \end{cases}$

Anche se nella prima equazione è già ricavata l'espressione di x, conviene ricavare quella di y che comporta un calcolo più semplice per la sostituzione

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 3x^2(2-x) - 7(2-x-1) = 3x^2 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli trovi il sistema $\begin{cases} y = 2 - x \\ 3x^3 - 3x^2 - 7x + 7 = 0 \end{cases}$

Per completare la risoluzione, dobbiamo risolvere l'equazione di terzo grado:

$3x^3 - 3x^2 - 7x + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2(x-1) - 7(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(3x^2-7) = 0$

$x = 1 \ \vee \ x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

Il sistema ha quindi soluzioni: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7}{3}} \\ y = 2 - \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{7}{3}} \\ y = 2 + \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases}$

Sistemi simmetrici

Un sistema è **simmetrico** se scambiando le variabili se ne ottiene uno identico a quello dato. Quando è di secondo grado, la sua forma tipica è la seguente:

$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ dove p e q sono numeri reali

Un sistema di questo tipo ha la caratteristica che, se ammette la soluzione (a, b), ammette anche la soluzione (b, a). Per risolverlo si usano le relazioni che avevamo imparato a proposito della somma e del prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado.

Risolviamo ad esempio il sistema: $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases}$

In sostanza dobbiamo trovare due numeri la cui somma è 3 ed il cui prodotto è -10. Consideriamo allora l'equazione

$t^2-3t-10=0$ le cui soluzioni sono -2 e 5

Le soluzioni del sistema sono allora le coppie ordinate $(-2, 5)$ oppure $(5, -2)$.

Fai gli esercizi

Risolvi i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

15 $\begin{cases} 5x^2+y^2-3x+y=7 \\ 3x^2-y^2+x-y+6=0 \end{cases}$

(Suggerimento: se sommi membro a membro le due equazioni ottieni un'equazione nella sola variabile x)

16 $\begin{cases} x^2y=3x-1 \\ y=x-3 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x^2+x+y-1=0 \\ x(2x+1)-y=2 \end{cases}$

18 $\begin{cases} y-x+1=0 \\ 2y^3-(x+1)^2+x=-3 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x^3+xy=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici.

20 $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{10} \\ xy=-\dfrac{3}{10} \end{cases}$

21 $\begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{16} \end{cases}$

22 $\begin{cases} (x-y)^2=x^2+6+y^2 \\ 2(x-y)=-3(y-x)+2(y-1) \end{cases}$

23 $\begin{cases} 2x+2y=5 \\ x(x-y)=x^2-1 \end{cases}$

24 **ESERCIZIO GUIDA**

$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Ricordiamo che $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, cioè nel nostro caso $\dfrac{5}{2}=(x+y)^2+\dfrac{3}{2}$, quindi possiamo riscrivere il sistema nella forma

$\begin{cases} \dfrac{5}{2}=(x+y)^2+\dfrac{3}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ cioè $\begin{cases} (x+y)^2=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Il sistema può quindi essere scomposto nei seguenti due $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Risolvi ora questi due sistemi.

25 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 2 \end{cases}$

26 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{65}{4} \\ x + y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$

Risultati di alcuni esercizi.

1 $S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right); (3, 1) \right\}$

2 $S = \left\{ \left(1, \frac{2}{3} \right) \right\}$

3 $S = \left\{ \left(5, \frac{1}{2} \right); \left(-2, \frac{1}{2} \right) \right\}$

4 $S = \left\{ \left(-22, \frac{9}{4} \right); \left(-8, \frac{1}{2} \right) \right\}$

5 $A(1, 2), B(7, 5)$

6 $A(-2, 0); B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right)$

7 $A(2, 3); B(-3, -2)$

8 $A(2, 2); B(5, 5)$; area $= 3$

10 $S = \left\{ (5, 11, -9); \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{9}{4} \right) \right\}$

11 $S = \left\{ (3, 3, 7); \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{10}{3} \right) \right\}$

13 $S = \{ (3a, -2a); (-a, 6a) \}$

14 se $a \neq \pm\frac{1}{2}$ allora $S = \left\{ (0, -1); \left(\frac{4a}{4a^2 - 1}, \frac{4a^2 + 1}{4a^2 - 1} \right) \right\}$; se $a = \pm\frac{1}{2}$ allora $S = \{ (0, -1) \}$

15 $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{30}}{2} \right); \left(-\frac{1}{4}, \frac{-2 \pm 3\sqrt{11}}{4} \right) \right\}$

16 $S = \left\{ (-1, -4); (2 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1); (2 - \sqrt{3}, -\sqrt{3} - 1) \right\}$

17 $S = \left\{ \left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$

18 $S = \left\{ (0, -1); (1, 0); \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$

19 $S = \{ (0, 2); (2, -4); (1, -1) \}$

20 $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{5} \right); \left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{2} \right) \right\}$

21 $S = \left\{ \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right); \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}$

22 $S = \{ (3, -1); (-1, 3) \}$

23 $S = \left\{ \left(2, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \right\}$

24 $S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right); \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right); \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$

25 $S = \{ (2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}); (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}); (-2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}); (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) \}$

26 $S = \left\{ \left(4, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}, 4 \right) \right\}$

Verifica del recupero

1 Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x^2-4x}{2}<-1$ — 0,25 punti

b. $\dfrac{8(1-x^2)}{x^2-5x+6}+\dfrac{x-2}{x-3}\geq\dfrac{x-3}{x-2}$ — 0,5 punti

2 Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni:

a. $\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ x^2-x>0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \dfrac{x}{3x^2-1}>0 \\ 6-x-x^2>0 \end{cases}$ — 0,5 punti per ogni esercizio

3 Risolvi la seguente equazione con i moduli: $2+|x^2-4x-5|=3x+5$ — 0,5 punti

4 Risolvi in R le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

a. $2x^3+x^2-13x+6=0$ **b.** $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ — 0,5 punti per ogni esercizio

5 Risolvi in R le seguenti equazioni binomie o trinomie:

a. $x^3-27=0$ — 0,25 punti

b. $x^4-25x^2+144=0$ — 0,25 punti

c. $(2x+1)^4-3(2x+1)^2+2=0$ — 0,5 punti

6 Risolvi le seguenti equazioni irrazionali:

a. $\sqrt{3(x^2-1)}=x+1$ — 0,25 punti

b. $\sqrt[3]{2x+9}=x-6$ — 0,25 punti

c. $\sqrt{1+x}+2=\sqrt{x+6}$ — 0,5 punti

d. $\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-5}{1-x}$ — 0,5 punti

7 Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali:

a. $\sqrt{2x+1}>x-1$ **b.** $\sqrt{3x^2-2}<2x+3$ — 1 punto per ogni esercizio

8 Risolvi i seguenti sistemi:

a. $\begin{cases} 3(x+y)=4(y+1) \\ 3xy=-3 \end{cases}$ — 0,25 punti

b. $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y+z=-1 \\ x^2+2xy-z+2=0 \end{cases}$ — 0,5 punti

c. $\begin{cases} y+1=x \\ (3-x^3)y = x^3(1-x) \end{cases}$ | 0,5 punti

9 Risolvi i seguenti sistemi simmetrici:

a. $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x^2+3y^2=15 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ | 0,5 punti per ogni esercizio

Soluzioni

1 **a.** $\frac{2}{3}<x<2$; **b.** $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{4} \vee 2<x<3$

2 **a.** $-3<x<0 \vee 1<x<2$; **b.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<0 \vee \frac{\sqrt{3}}{3}<x<2$

3 $S=\{-1, 2, 8\}$

4 **a.** $S=\left\{2, -3, \frac{1}{2}\right\}$; **b.** $S=\{\pm 1, 2, -3\}$

5 **a.** $S=\{3\}$; **b.** $S=\{\pm 3, \pm 4\}$; **c.** $S=\left\{-1, 0, \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$

6 **a.** $S=\{-1, 2\}$; **b.** $S=\{9\}$; **c.** $S=\left\{-\frac{15}{16}\right\}$; **d.** $S=\{3, 5\}$

7 **a.** $-\frac{1}{2}\leq x<4$; **b.** $-1<x\leq-\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x\geq\frac{\sqrt{6}}{3}$

8 **a.** $S=\left\{(1, -1); \left(\frac{1}{3}, -3\right)\right\}$; **b.** $S=\{(1, -2, -1); (0, -3, 2)\}$; **c.** $S=\{(1, 0)\}$

9 **a.** $S=\left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$; **b.** $S=\{(-2, 1); (1, -2)\}$

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Punteggio										

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

interval notation	notazione di intervallo
quadratic inequality	disequazione di secondo grado
solution set	insieme delle soluzioni
zero	zero (di un polinomio)

1 Solve the quadratic inequality and write your answer in interval notation $2x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

a. $(-\infty, -0.87] \cup [2.87, +\infty)$ **b.** $[-0.87, 2.87]$
c. $(-\infty, -1] \cup [2.5, +\infty)$ **d.** $[-1, 2.5]$ **e.** none of these

2 Solve the rational inequality $\dfrac{16x}{x+3} \leq 2x$

a. $(-3, 0] \cup [5, +\infty)$ **b.** $[-3, 5]$ **c.** $[8, 5]$ **d.** $(-3, 0) \cup (5, 8)$ **e.** $(-3, 5) \cup (8, +\infty)$

3 Solve the equation $\sqrt{1-5x} + 5 = 1$

a. $x = -3$ **b.** $x = 1$ **c.** $x = \dfrac{4}{5}$ **d.** $x = -1$ **e.** no solution

4 Solve the equation $\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x-2}$

a. $x = 8$ **b.** $x = 8$ or $x = 5$ **c.** $x = 6$ **d.** $x = 5$ **e.** none of these

5 Solve for x : $\sqrt{9(2x+3)} + (2x+3)^{\frac{1}{2}} = 8$

6 Find the real zeros of the polynomial: $P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$

a. $x = 1$ $x = -5$ and $x = 6$
b. $x = -1$ $x = 2$ and $x = 3$
c. $x = -1$ $x = 1$ and $x = 6$
d. $x = 1$ $x = -2$ and $x = -3$
e. $x = 1$ $x = 5$ and $x = -6$

7 Solve the inequality $x^3 + x^2 - 6x > 0$ and graph the solution set.

8 Solve the system of equations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x - y = -6 \end{cases}$

a. $(0, 6)$ $(-6, 0)$ **b.** $(6, 0)$ only **c.** $(5, 11)$ **d.** $(2, 8)$ **e.** none of these

9 Solve the system of equations $\begin{cases} y^2 = (x+8)(x^2+2) \\ y^2 - (8+4x)y + (16+16x-5x^2) = 0 \end{cases}$

1 a. **2** a. **3** e. **4** c. **5** $x = \frac{1}{2}$ **6** b. **7** $-3 < x < 0 \ \vee \ x > 2$ **8** a. **9** $(-2, \pm 6)$, $(19, 99)$, $(-5, 9)$, $(0, 4)$