

Il prodotto tra vettori

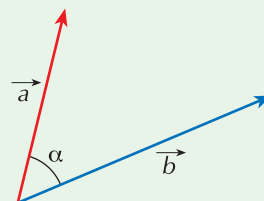
Oltre alle operazioni di addizione e sottrazione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare, in Fisica si definiscono anche due tipi di prodotto tra vettori: il **prodotto scalare**, il cui risultato è uno scalare, e il **prodotto vettoriale**, il cui risultato è un vettore.

Il prodotto scalare

Il **prodotto scalare** di due vettori \vec{a} e \vec{b} si indica con il simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$; esso è uno scalare (quindi un numero) che, indicato con α l'angolo formato dai due vettori, si definisce in questo modo (**figura 1**)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Figura 1



Per esempio:

- se il modulo di \vec{a} è 4, il modulo di \vec{b} è 6 e i due vettori formano un angolo α di 45° , allora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

- se il modulo di \vec{a} è $\frac{1}{2}$, il modulo di \vec{b} è 8 e i due vettori formano un angolo α di 120° , allora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Il prodotto scalare viene usato in Fisica in diverse occasioni, per esempio per il calcolo di un lavoro, come puoi vedere nel seguente esempio: un corpo che si sta muovendo su una traiettoria rettilinea viene fermato in uno spazio di 15m da una forza \vec{F} che forma un angolo di 162° con la direzione dello spostamento. Qual è il modulo di \vec{F} se il lavoro compiuto è di -285J ?

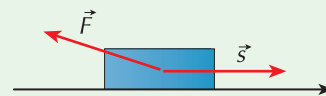
Il lavoro L compiuto da una forza costante \vec{F} quando il corpo si sposta di un tratto \vec{s} è dato dal prodotto scalare dei due vettori (**figura 2**)

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \text{cioè} \quad L = F \cdot s \cos \alpha$$

Sostituendo i valori noti troviamo l'equazione $-285 = F \cdot 15 \cdot \cos 162^\circ$

da cui ricaviamo che $F = -\frac{285}{15 \cdot \cos 162^\circ}$ cioè $F = 19,98\text{N}$

Figura 2



Il prodotto vettoriale

Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} e indicato con α l'angolo da essi formato, il loro **prodotto vettoriale** si indica con il simbolo $\vec{a} \times \vec{b}$; esso è un vettore \vec{c} che ha:

- modulo dato dall'espressione $c = ab \sin \alpha$
- direzione perpendicolare al piano definito dai due vettori \vec{a} e \vec{b}
- verso stabilito dalla regola della mano destra.

In base a questa regola il verso del vettore risultante si calcola usando le dita della mano destra (osserva la **figura 3**):

- si punta il pollice nella direzione del primo vettore (il vettore \vec{a})
- si puntano le altre dita nella direzione del secondo vettore (il vettore \vec{b})
- il verso del vettore \vec{c} è uscente dal palmo della mano.

Per esempio, sapendo che i vettori \vec{a} e \vec{b} appartengono al piano della pagina che stai leggendo e sono orientati come in **figura 4**, che \vec{a} ha modulo 8, \vec{b} ha modulo 12 e che l'angolo fra i due vettori è di 60° , del prodotto $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ si può dire che:

- ha modulo uguale a: $c = 8 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ = 96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$
- ha direzione perpendicolare al piano della pagina
- verso entrante nella pagina (il pollice nella direzione di \vec{a} , le altre dita nella direzione di \vec{b} , la mano è rivolta con il palmo appoggiato alla pagina).

Figura 3

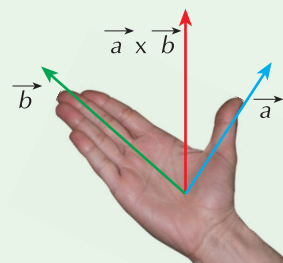
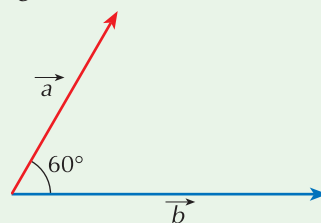


Figura 4

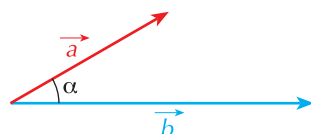
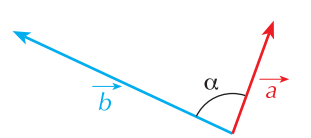


ESERCIZI

1 Rappresenta i seguenti vettori e determina il valore del prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

- | | | | | |
|----|----------|---------|----------------------|---------|
| a. | $a = 5$ | $b = 4$ | $\alpha = 45^\circ$ | [14,14] |
| b. | $a = 10$ | $b = 7$ | $\alpha = 135^\circ$ | [-49,5] |
| c. | $a = 9$ | $b = 3$ | $\alpha = 65^\circ$ | [11,41] |

2 Dati i seguenti vettori, determina il valore del prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ specificando modulo, direzione e verso:

- | | | | |
|----|---|---|--|
| a. |  | $a = 3$
$b = 5$
$\alpha = 30^\circ$ | [7,5 direzione \perp foglio, verso entrante] |
| b. |  | $a = 2$
$b = 4$
$\alpha = 85^\circ$ | [7,97 direzione \perp foglio, verso uscente] |