Le disequazioni in due variabili

Per descrivere situazioni problematiche reali sono spesso necessarie più variabili e ci si trova quindi di fronte a modelli algebrici che hanno a che vedere con equazioni e disequazioni in più incognite.

Disequazioni lineari

Consideriamo per esempio la disequazione: $x + 2y - 2 > 0$.

Se la risolviamo rispetto a y otteniamo: $y > -\frac{1}{2}x + 1$.

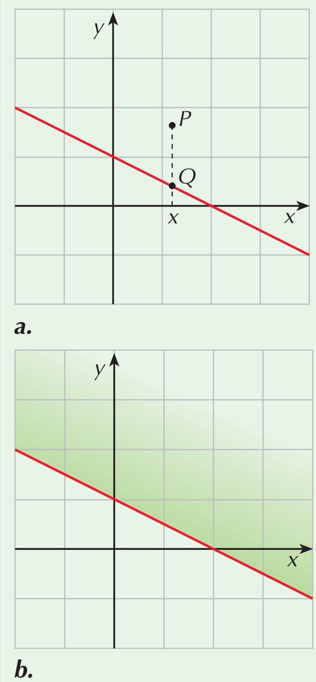
In un piano cartesiano la stessa relazione con il simbolo di uguaglianza rappresenta la retta $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (***figura 1a***).

Possiamo interpretare graficamente la disequazione come l'insieme dei punti P del piano la cui ordinata (la y) è maggiore, a parità di ascissa, di quella dei punti Q che si trovano sulla retta.

L'insieme dei punti P definisce il semipiano in colore in ***figura 1b***.

Le soluzioni di una disequazione lineare in due variabili sono rappresentate dai punti di un semipiano.

Figura 1



Disequazioni non lineari

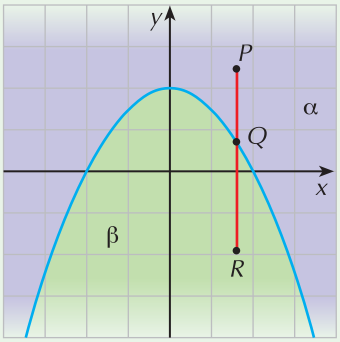
In modo analogo si deve procedere per risolvere una disequazione in due variabili che non è lineare.

Risolviamo per esempio la disequazione: $y \geq -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Disegniamo dapprima la parabola: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Essa divide il piano in due regioni α e β; i punti P che appartengono alla regione α hanno un'ordinata maggiore dei punti Q aventi la stessa ascissa che si trovano sulla parabola, quelli R della regione β hanno un'ordinata minore (***figura 2***). Questo significa che la disequazione è soddisfatta da tutti e soli i punti di α.

Figura 2



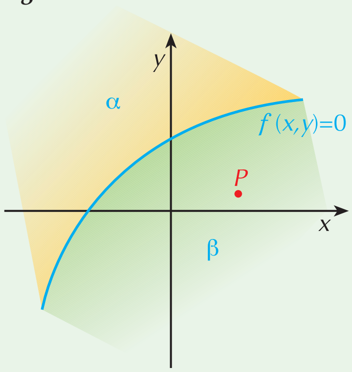
In generale, per risolvere una disequazione in due variabili nella forma

$$f(x, y) \gtreqless 0$$

si procede in questo modo, analogo a quello visto per le disequazioni lineari:

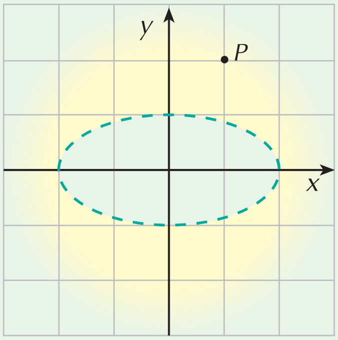
- si costruisce il grafico della relazione $f(x, y) = 0$ e si individuano le regioni del piano da essa delimitate
- si considera un punto $P(x_0, y_0)$ in una qualsiasi di tali regioni e si valuta $f(x_0, y_0)$
- se si ottiene una disuguaglianza vera, la regione delle soluzioni è quella che contiene il punto P (***figura 3***).

Figura 3



Vediamo qualche altro esempio.

Figura 4

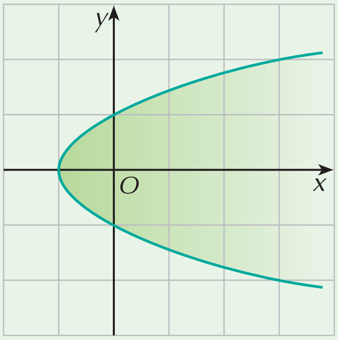


- Risolviamo la disequazione $x^2 + 4y^2 - 4 > 0$.

  Riscriviamo la disequazione nella forma $\frac{x^2}{4} + y^2 > 1$ ed associamo ad essa l'equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ che rappresenta un'ellisse di semiassi 2 e 1. Poiché vogliamo che $\frac{x^2}{4} + y^2$ sia maggiore di 1, la regione delle soluzioni è costituita dai punti che si trovano all'esterno dell'ellisse, esclusi i punti di tale curva (***figura 4***).
  Puoi verificarlo in modo molto semplice considerando un punto qualunque di questa regione, ad esempio il punto $P(1, 2)$, e verificando che le sue coordinate soddisfano la disequazione:

$$1 + 16 - 4 > 0$$

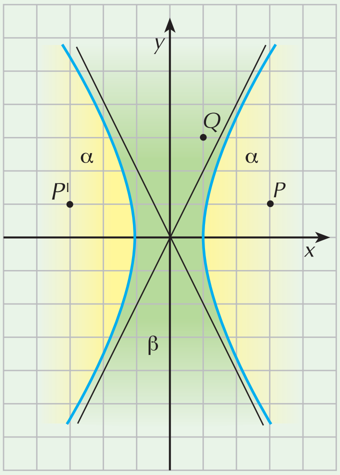
Figura 5



- Risolviamo la disequazione $x \geq y^2 - 1$.

  L'equazione $x = y^2 - 1$ ad essa associata rappresenta una parabola con asse coincidente con l'asse x avente vertice nel punto $(-1, 0)$ (***figura 5***). I punti che si trovano nella regione in colore hanno, a parità di ordinata, una ascissa maggiore di quelli che si trovano sulla parabola; tale regione è dunque l'insieme dei punti che sono soluzione della disequazione data, compresi i punti della parabola stessa.
  Puoi anche individuare l'insieme delle soluzioni considerando un punto di una delle due regioni, ad esempio l'origine: poiché le sue coordinate soddisfano la disequazione ($0 \geq -1$ è vero), questa è la regione cercata.

Figura 6



- Risolviamo la disequazione $x^2 - \frac{y^2}{4} \leq 1$.

  L'equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ rappresenta un'iperbole avente per asintoti le rette di equazioni $y = \pm 2x$; il suo grafico divide il piano cartesiano nelle due regioni α e β evidenziate in ***figura 6*** con due colori diversi.
  Per stabilire quale delle due regioni rappresenti la soluzione della disequazione, consideriamo un punto particolare nella regione α, ad esempio il punto $P(3, 1)$ (o il suo simmetrico $P'(-3, 1)$) e vediamo se le sue coordinate la soddisfano:

$$9 - \frac{1}{4} \leq 1$$

  Poiché la disuguaglianza ottenuta è falsa, i punti della regione α non sono soluzioni della disequazione. Lo saranno quindi quelli della regione β; per verificarlo consideriamo il punto $Q(1, 3)$ (oppure l'origine) e verifichiamo che le sue coordinate soddisfano la disequazione:

$$1 - \frac{9}{4} \leq 1$$

  Poiché la disuguaglianza ottenuta è vera, possiamo concludere che le soluzioni della disequazione sono rappresentate dai punti della regione β, compresi i punti dell'iperbole.

Disequazioni lineari

1 ESERCIZIO GUIDATO

$x - 5y \geq 3$

Esplicitiamo la disequazione rispetto alla variabile y: $y \leq \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

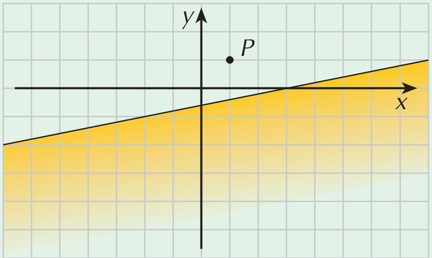
La retta associata alla disequazione è: $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

Disegniamo la retta e consideriamo per esempio il punto $P(1, 1)$.

Sostituiamo le coordinate di P nella disequazione:

$1 - 5 \geq 3 \qquad -4 \geq 3$

La disuguaglianza è falsa, il semipiano soluzione è quello cui non appartiene P, cioè quello in colore nella figura.

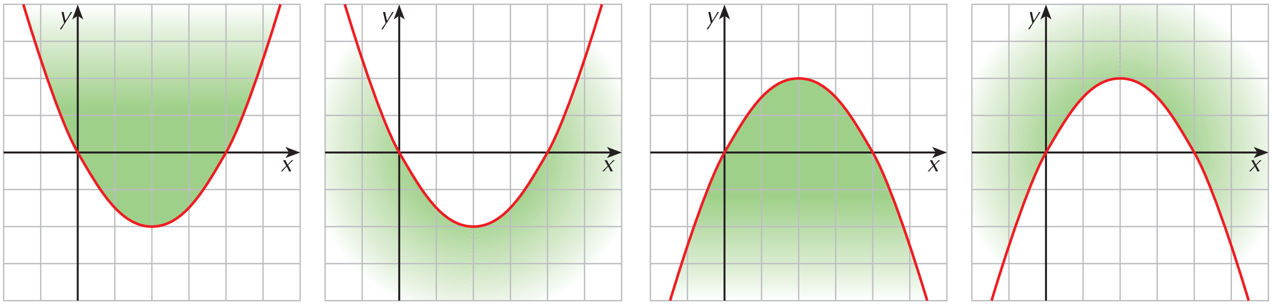


2 $\frac{2}{3}x + y + 1 \leq 0 \qquad x - \frac{1}{2}y - 2 \geq 0 \qquad -y + \frac{3}{2} \geq 0$

3 $x - 7 \leq 0 \qquad -y + x \leq 3 \qquad 2y + 4 \geq 0$

Disequazioni non lineari

4 Individua fra i seguenti disegni quello che rappresenta correttamente la regione delle soluzioni della disequazione $x^2 - 4x - 2y > 0$.



a. **b.** **c.** **d.**

5 La disequazione $16 < x^2 + 4y^2$ è verificata dalla regione di piano che, rispetto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, è formata dai punti:

a. che sono all'interno dell'ellisse esclusi i punti dell'ellisse
b. che sono all'interno dell'ellisse compresi i punti dell'ellisse
c. che sono all'esterno dell'ellisse compresi i punti dell'ellisse
d. che sono all'esterno dell'ellisse esclusi i punti dell'ellisse.

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni non lineari in due variabili.

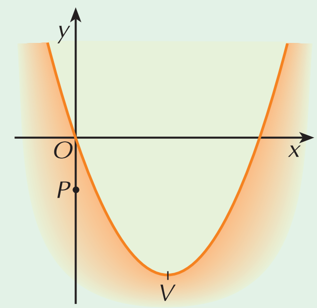
6 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x^2 - 3x - y \geq 0$

Esplicitando rispetto a y riscriviamo la disequazione nella forma

$$y \leq x^2 - 3x$$

La parabola $y = x^2 - 3x$ ha vertice $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ e passa per l'origine degli assi. Scelto un punto in una delle due regioni, per esempio $P(0, -1)$, vediamo se le sue coordinate soddisfano la disequazione: $1 \geq 0$. La regione delle soluzioni è quindi quella che contiene P.



7 $y \geq 3 - x^2$

8 $x^2 + y^2 - 4x - 5 > 0$

9 $6x - 4y^2 + 1 < 0$

10 $x^2 - y^2 > 3$

11 $x^2 + 4y^2 \leq 1$

12 $2y + 3x - 4y^2 > 1$

13 $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$

14 $x^2 - y^2 > 1$

15 $(x-1)^2 + (y+3)^2 - 4 > 0$

16 $(x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 16$

17 $x^2 + y^2 - 2x + 4y \geq 0$

18 $x^2 - y^2 \geq 9$

19 $y + 3x^2 - 12x > 0$

20 $x + 7y^2 - 14 \leq 0$

21 $x^2 + y^2 - 3x + 2y \geq 0$

22 $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 \geq 0$

23 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$

24 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{6} \geq 1$

25 $xy \leq 1$

26 $x^2 + y^2 - 3x - y \geq 3$

27 $x^2 - y^2 \geq 4$

28 $x^2 - 3y^2 < 1$

29 $x^2 + 49y^2 \leq 49$

30 $9x^2 + y^2 \geq 9$

31 $x^2 + y^2 + y - 1 \geq 0$

32 $x^2 + y^2 - 4x - 6y \geq 0$

33 $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 \geq 0$

34 $x^2 - y - 5x + 6 \leq 0$