

# Le funzioni goniometriche

## ANGOLI E FUNZIONI GONIOMETRICHE

la teoria è a pag. 1

### RICORDA

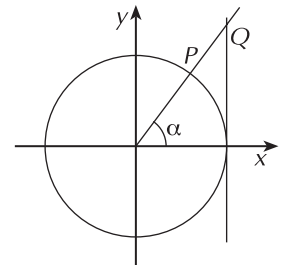
- In ogni triangolo rettangolo:
  - il seno di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa
  - il coseno di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente e l'ipotenusa
  - la tangente di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e il cateto adiacente.
- Fra il seno, il coseno e la tangente di un angolo acuto  $\alpha$  sussistono le seguenti relazioni:
  - $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
  - $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

### Comprensione della teoria

1 Considerando la circonferenza goniometrica e con riferimento alla figura a lato, si può dire che:

- a.  $\sin \alpha$  è l'ordinata del punto  $P$
- b.  $\cos \alpha$  è l'ordinata del punto  $P$
- c.  $\tan \alpha$  è l'ascissa del punto  $Q$ .

V F  
V F  
V F



2 Barra Vero o Falso.

- a. Il seno, il coseno e la tangente di un angolo acuto non nullo sono sempre numeri positivi.
- b. Il seno di un angolo ottuso è positivo, mentre il coseno è negativo.
- c. La tangente di un angolo di  $90^\circ$  non esiste.
- d. La tangente di un angolo di  $180^\circ$  è uguale a 1.

V F

V F

V F

V F

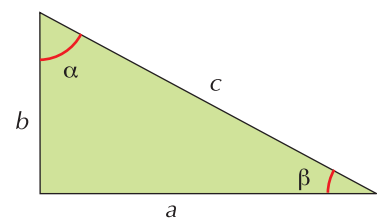
### Applicazione

Riferendoti alla figura, calcola i valori delle funzioni goniometriche fondamentali degli angoli acuti dei seguenti triangoli, di cui sono note le misure indicate.

3  $a = 6$                        $b = 4$

4  $a = 8$                          $c = 10$

5  $b = 5$                           $c = 15$



6  $a = 2\sqrt{3}$        $b = \sqrt{3}$

7  $c = 10$        $a = 2\sqrt{5}$

8 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 25cm e un angolo acuto è ampio  $50^\circ$ . Scrivi l'espressione dei suoi cateti.

9 In un triangolo rettangolo  $ABC$  di ipotenusa  $BC$ , si sa che  $BC = 15\text{cm}$  e che l'angolo di vertice  $B$  misura  $20^\circ$ . Scrivi le espressioni dei cateti del triangolo.

10 Dato un angolo acuto  $\alpha$ , stabilisci quali fra le seguenti relazioni hanno senso e quali non ne hanno:

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$

$\sin \alpha = 2$

$\sin \alpha = -\frac{3}{4}$

$\cos \alpha = \frac{5}{4}$

$\cos \alpha = \frac{3}{4}$

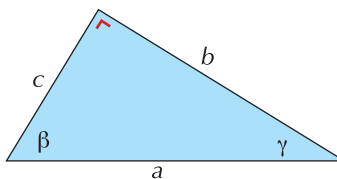
11 Con riferimento alla figura, correggi gli eventuali errori presenti nelle seguenti relazioni:

a.  $\frac{a}{b} = \tan \gamma$        $\frac{b}{c} = \tan \beta$

b.  $\frac{c}{b} = \tan \beta$        $\frac{c}{a} = \tan \gamma$

c.  $\frac{a}{c} = \tan \gamma$        $\frac{c}{b} = \tan \gamma$

d.  $\frac{b}{c} = \tan \gamma$        $\frac{b}{a} = \tan \beta$



12 In un triangolo rettangolo un cateto misura 15cm ed inoltre la tangente dell'angolo acuto ad esso adiacente è  $\frac{5}{3}$ . Determina la misura dell'altro cateto e la tangente dell'altro angolo acuto.

13 Scrivi, facendo riferimento alla figura dell'esercizio 11, le espressioni dei lati e determina le ampiezze degli angoli dei seguenti triangoli rettangoli dei quali si sa che:

a.  $b = 30$       e       $\gamma = 50^\circ$

b.  $c = 15$       e       $\beta = 25^\circ$

c.  $\frac{b}{c} = 1$       e       $a = 37$

14 Calcola un valore approssimato delle espressioni indicate usando la calcolatrice:

a.  $\sin 73^\circ$        $\cos 82^\circ$        $\tan 25^\circ$

b.  $\sin 214^\circ$        $\cos 213^\circ$        $\tan 153^\circ$

c.  $\sin 12^\circ 13' 25''$        $\cos 28^\circ 18' 6''$        $\tan 73^\circ 15'$

d.  $\sin 98^\circ 42'$        $\cos 135^\circ 15' 36''$        $\tan 155^\circ 3' 12''$

15 Trova un valore approssimato degli angoli  $\alpha$  acuti che soddisfano le seguenti relazioni:

a.  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$        $\cos \alpha = \frac{1}{4}$        $\tan \alpha = \frac{2}{5}$

b.  $\sin \alpha = 0,73$        $\cos \alpha = 0,28$        $\tan \alpha = 3,5$

16 **ESERCIZIO GUIDA**

Trova un valore approssimato di tutti gli angoli  $\alpha$ , con  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , che soddisfano alle seguenti relazioni.

a.  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$

Usando la calcolatrice troviamo che  $\alpha = 48^\circ 35' 25''$ .

Esiste però un altro angolo il cui seno è uguale a  $\frac{3}{4}$  ed è l'angolo  $\alpha' = 180^\circ - \alpha = 131^\circ 24' 35''$ .

b.  $\cos \alpha = \frac{5}{8}$

Usando la calcolatrice troviamo che  $\alpha = 51^\circ 19' 4''$ .

Esiste però un altro angolo il cui coseno è uguale a  $\frac{5}{8}$  ed è l'angolo  $\alpha' = 360^\circ - \alpha = 308^\circ 40' 56''$ .

Calcola adesso da solo:

c.  $\sin \alpha = \frac{5}{6}$

$\sin \alpha = -\frac{1}{3}$

$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

d.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$

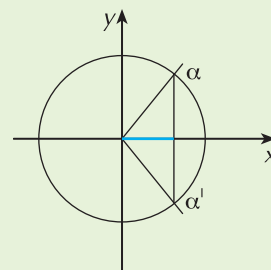
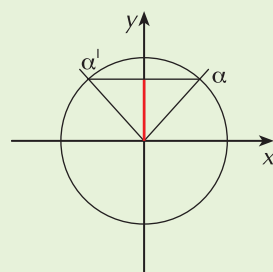
$\cos \alpha = -\frac{2}{7}$

$\cos \alpha = -\frac{3}{10}$

e.  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$

$\tan \alpha = -3$

$\tan \alpha = 10$



## LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI

la teoria è a pag. 9

### RICORDA

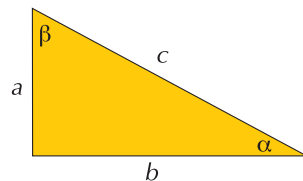
In ogni triangolo rettangolo, sussistono le seguenti relazioni:

- un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, oppure per il coseno dell'angolo adiacente al cateto
- un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo.

### Comprensione della teoria

- 17 Di un triangolo rettangolo si sa che un angolo acuto è di  $60^\circ$ ; quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- L'altro angolo acuto misura  $30^\circ$ .
  - Non è possibile calcolare le misure dei lati del triangolo.
  - Il cateto opposto all'angolo di  $60^\circ$  ha lunghezza doppia del cateto opposto all'angolo di  $30^\circ$ .
- 18 Dato un triangolo rettangolo e usando opportunamente i suoi angoli acuti, indica tutti i modi in cui si può esprimere un cateto in funzione:
- dell'altro cateto
  - dell'ipotenusa.
- 19 Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 30cm e l'ipotenusa è lunga 50cm; indica quali delle seguenti affermazioni sono vere.
- Non è possibile conoscere le misure degli angoli.
  - Non è possibile conoscere la misura dell'altro cateto.
  - Il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto è uguale a  $\frac{3}{5}$ .
  - La tangente dell'angolo acuto opposto al cateto è uguale a  $\frac{3}{4}$ .

Con riferimento alla figura a lato, risolvi i seguenti triangoli rettangoli, senza fare uso della calcolatrice.



- |           |                               |                               |   |
|-----------|-------------------------------|-------------------------------|---|
| <b>20</b> | $a = \sqrt{15}$               | $b = \sqrt{5}$                | $[c = 2\sqrt{5}; \beta = 30^\circ; \alpha = 60^\circ]$  |
| <b>21</b> | $b = 10(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ | $a = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ | $[c = 40; \alpha = 15^\circ; \beta = 75^\circ]$         |
| <b>22</b> | $c = 50$                      | $b = 25$                      | $[a = 25\sqrt{3}; \beta = 30^\circ; \alpha = 60^\circ]$ |
| <b>23</b> | $a = 32$                      | $c = 32\sqrt{2}$              | $[b = 32; \beta = \alpha = 45^\circ]$                   |
| <b>24</b> | $c = 120$                     | $\beta = 30^\circ$            | $[a = 60^\circ; b = 60; a = 60\sqrt{3}]$                |
| <b>25</b> | $c = 35,8$                    | $\alpha = 30^\circ$           | $[\beta = 60^\circ; a = 17,9; b = 17,9\sqrt{3}]$        |
| <b>26</b> | $b = 45$                      | $\beta = 30^\circ$            | $[\alpha = 60^\circ; a = 45\sqrt{3}; c = 90]$           |
| <b>27</b> | $b = 32$                      | $\alpha = 45^\circ$           | $[\beta = 45^\circ; a = 32; c = 32\sqrt{2}]$            |
| <b>28</b> | $a = 10\sqrt{3}$              | $\alpha = 30^\circ$           | $[\beta = 60^\circ; b = 30; c = 20\sqrt{3}]$            |
| <b>29</b> | $a = 100$                     | $\beta = 60^\circ$            | $[\alpha = 30^\circ; c = 200; b = 100\sqrt{3}]$         |

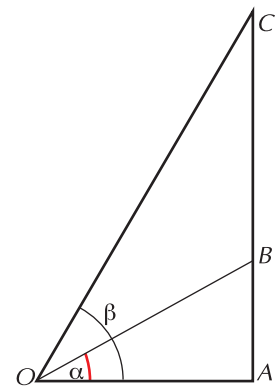
Con riferimento alla stessa figura del gruppo precedente di esercizi, risolvi i seguenti triangoli rettangoli facendo uso della calcolatrice scientifica essendo noti gli elementi indicati.

- |           |             |                         |  |
|-----------|-------------|-------------------------|--|
| <b>30</b> | $c = 12,05$ | $\beta = 36^\circ 52'$  | $[\alpha = 53^\circ 8'; a = 9,64; b = 7,23]$                         |
| <b>31</b> | $b = 28,1$  | $a = 42,7$              | $[c = 51,12; \alpha = 56^\circ 39' 7''; \beta = 33^\circ 20' 53'']$  |
| <b>32</b> | $c = 129,7$ | $\beta = 46^\circ 28'$  | $[a = 43^\circ 32'; b = 94,03; a = 89,33]$                           |
| <b>33</b> | $c = 62,46$ | $a = 28,34$             | $[b = 55,66; \beta = 63^\circ 01'; \alpha = 26^\circ 9']$            |
| <b>34</b> | $c = 15,3$  | $b = 12,4$              | $[a = 8,96; \beta = 54^\circ 8' 26''; \alpha = 35^\circ 51' 34'']$   |
| <b>35</b> | $b = 21,8$  | $\beta = 44^\circ 35'$  | $[a = 45^\circ 25'; c = 31,06; a = 22,12]$                           |
| <b>36</b> | $a = 4,8$   | $\alpha = 46^\circ 24'$ | $[\beta = 43^\circ 36'; b = 4,57; c = 6,63]$                         |
| <b>37</b> | $b = 15,4$  | $a = 9,03$              | $[c = 17,85; \alpha = 30^\circ 23' 39''; \beta = 59^\circ 36' 51'']$ |
| <b>38</b> | $b = 76,51$ | $\alpha = 65^\circ 54'$ | $[\beta = 24^\circ 6'; c = 187,37; a = 171,04]$                      |
| <b>39</b> | $a = 0,7$   | $\beta = 71^\circ 33'$  | $[\alpha = 18^\circ 27'; c = 2,21; b = 2,1]$                         |

Tenendo presenti le relazioni sui triangoli rettangoli, risolvi i seguenti problemi in cui le misure delle lunghezze, dove non specificato, si intendono espresse nella stessa unità.

- 40** In un triangolo isoscele il lato misura 15 e la base misura  $15\sqrt{3}$ . Determina l'ampiezza degli angoli del triangolo e calcolane l'area.  
(Suggerimento: tracciando l'altezza ottieni due triangoli rettangoli)  $[30^\circ; 30^\circ; 120^\circ; \text{area} = \frac{225\sqrt{3}}{4}]$
- 41** In un rombo un angolo misura  $120^\circ$ . Sapendo che il lato del rombo è 36, calcolane l'area.  
 $[\text{area} = 648\sqrt{3}]$
- 42** In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa misura  $3\sqrt{5}$  ed uno degli angoli acuti misura  $24^\circ 54'$ . Risolvi il triangolo.  
 $[65^\circ 6'; \text{lati: } 15,93; 7,4; 17,56]$

- 43 In un rettangolo la diagonale, che è lunga 20cm, forma un angolo di  $35^\circ$  con uno dei lati. Trova un valore approssimato dell'area del rettangolo in funzione degli elementi dati. [187,91cm<sup>2</sup>]
- 44 In un triangolo isoscele gli angoli alla base misurano  $25^\circ 12' 30''$  ed il lato misura 45. Determina perimetro e area del triangolo. [2p = 171,43; area = 780,332]
- 45 In un rombo un angolo misura  $74^\circ 20'$  e la diagonale ad esso opposta misura 40,8. Calcola l'area del rombo. [area = 1 097,87]
- 46 In un triangolo isoscele l'ampiezza dell'angolo al vertice è  $67^\circ$ . Sapendo che l'altezza relativa ad uno dei lati obliqui misura 24, determina la misura del perimetro e dell'area del triangolo. [2p = 80,92; area = 312,87]
- 47 Il lato di un triangolo isoscele misura 45 e l'angolo al vertice misura  $129^\circ 36'$ . Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [2p = 171,43; area = 780,14]
- 48 In un trapezio scaleno  $ABCD$  la base maggiore  $AB$  misura 100 e l'altezza  $DH$  misura 30. Sapendo che l'angolo in  $A$  misura  $60^\circ$  e che  $\sin \hat{B} = \frac{3}{5}$  determina il perimetro del trapezio. [2p = 10(21 +  $\sqrt{3}$ )]
- 49 Una strada con pendenza costante ha un angolo di inclinazione di  $20^\circ$ . Quanto sale lungo un percorso di 1500m? [ $\approx 513$ m]
- 50 Un ripetitore è posto su una base di altezza  $AB$ . Un osservatore  $O$  che dista 20m dalla base vede l'estremità superiore della base sotto un angolo  $\alpha = 30^\circ$  e la cima del ripetitore sotto un angolo  $\beta = 60^\circ$  (osserva la figura). Qual è l'altezza del ripetitore? [ $\frac{40\sqrt{3}}{3}$  m]
- 51 Una scala lunga 4m tocca il muro di una casa ad una altezza da terra di 3m. Quale inclinazione ha rispetto al pavimento? [ $48^\circ 35' 25''$ ]
- 52 Ponendosi a 30m dalla base di un albero, la sua cima è vista sotto un angolo di  $24^\circ 30'$ . Determina l'altezza dell'albero. [13,67m]
- 53 Una funicolare forma un angolo di  $35^\circ$  col piano orizzontale e ha un percorso di 415m. A quale altezza arriva? [ $\approx 238$ m]
- 54 Dalla sommità di un faro marino la cui altezza è di 70m sul livello del mare, viene avvistato un battello sotto un angolo di  $78^\circ$ . Calcola a quale distanza dalla base del faro si trova il battello. [329,32m]
- 55 Il comandante di un peschereccio in mare osserva la cima di un faro di cui conosce l'altezza che è di 75m, sotto un angolo di  $8^\circ$ . Calcola a quale distanza si trova il peschereccio dalla base del faro. [ $\approx 534$ m]
- 56 Un aereo si sta alzando in volo lungo una direzione che forma un angolo di  $29^\circ$  con l'orizzontale. A quale altezza si trova dopo un percorso di 1500m? [727,2m]
- 57 Un aereo che si trova ad una altezza di 8000m scende in picchiata per 6km con un angolo di  $21^\circ$  rispetto all'orizzontale. Qual è la sua nuova altitudine quando riassume l'andatura normale di volo? [5850m]
- 58 In cima ad una torre è posta un'asta. Un osservatore posto a 200m dalla base della torre vede la sua cima sotto un angolo di  $30^\circ$  e la punta finale dell'asta sotto un angolo di  $32^\circ$ . Calcola l'altezza della torre e la lunghezza dell'asta. [torre = 115,4m; asta = 9,5m]
- 59 Sapendo che la pendenza di una strada è del 12% calcola il suo angolo di inclinazione. [ $\alpha = 6^\circ 50' 34''$ ]



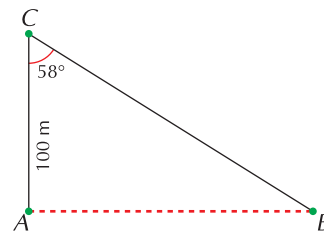
**60** Due bambini distanti l'uno dall'altro 600m su uno stesso piano orizzontale, stanno osservando una mongolfiera nel cielo sotto un angolo rispettivamente di  $75^\circ$  e  $67^\circ$ . Calcola l'altezza a cui si trova la mongolfiera. [866,52m]

**61** Determina l'inclinazione percentuale di una strada che forma un angolo di  $5^\circ 42'$  con il piano orizzontale. [ $\approx 10\%$ ]

**62** Un uomo che si trova su una barca guarda verso il faro alzando gli occhi di  $18^\circ$  rispetto alla direzione orizzontale. Se il faro è alto 20m e si trova su un promontorio a picco sul mare e alto 300m rispetto al livello del mare, quanto dista la barca dalla base del promontorio? [984,86m]

**63** Si deve misurare la distanza fra due punti  $A$  e  $B$  ma non lo si può fare in modo diretto perché vi è un ostacolo tra essi che li rende non visibili uno all'altro. Ci si pone allora in un punto  $C$  dal quale si vede sia  $A$  che  $B$  e si eseguono le seguenti misurazioni:  $\widehat{CAB} = 90^\circ$ ,  $AC = 100\text{m}$ ,  $\widehat{ACB} = 58^\circ$ . Qual è la distanza che separa  $A$  e  $B$ ?

[160m]



### Soluzioni esercizi di comprensione

**1** a. V, b. F, c. F

**2** a. V, b. V, c. V, d. F

**17** a. b.

**19** c. d.